

Скалярное произведение в евклидовом и унитарном пространстве

Определение. Пусть F - одно из полей R или C , а V - векторное пространство над F . **Пространство V называется пространством со скалярным произведением**, если задано отображение из $V \times V$ в F , которое любой упорядоченной паре векторов $x, y \in V$ ставит в соответствие число из F , называемое скалярным произведением этих векторов и обозначаемое через $x y$ или (x, y) , так, что выполнены следующие условия, называемые аксиомами скалярного произведения:

- 1) для любых $x, y \in V$: $x y = \overline{y x}$;
- 2) для любых $x, y \in V$ и любого $\alpha \in F$: $(\alpha x) y = \alpha(x y)$;
- 3) для любых $x, y, z \in V$: $(x + y) z = x z + y z$ (скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов);
- 4) для любого $x \in V$: $x x \geq 0$, причем $x x = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Пространство со скалярным произведением называется **евклидовым**, если $F = R$, и **унитарным**, если $F = C$.

Как и «обычное» скалярное произведение в трехмерном пространстве, скалярное произведение в векторном пространстве не является алгебраической операцией, поскольку его результатом является число, а не вектор.

Если $F = \mathbb{R}$, то аксиома 1) означает, что $x y = y x$. Иными словами, скалярное произведение в евклидовом пространстве коммутативно.

Хотя для комплексного числа α соотношение $\alpha > 0$, вообще говоря, не имеет смысла (поскольку на множестве всех комплексных чисел нет естественного отношения порядка), аксиома 4) имеет смысл не только в евклидовом, но и в унитарном пространстве.

Из аксиомы 1) вытекает, что

$$x x = \overline{x x},$$

и потому $x x \in \mathbb{R}$ для любого $x \in V$ даже в случае, когда $F = \mathbb{C}$.

Пример 1. Множество всех векторов обычного трехмерного пространства с обычным скалярным произведением является евклидовым пространством, так как все аксиомы 1)–4) в этом случае выполнены. То же самое можно сказать и о множестве всех векторов на плоскости с обычным скалярным произведением.

Следующий пример, в сочетании с примером 1, показывает, что в одном и том же векторном пространстве скалярное произведение можно вводить разными способами.

Пример 2. На множестве всех векторов на плоскости введем следующую операцию $\bullet$: если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ этой плоскости имеют в некотором базисе координаты (x_1, x_2) и (y_1, y_2) соответственно, то $\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$.

Несложно проверить, что все аксиомы евклидова пространства будут при этом выполнены, и потому множество векторов на плоскости с указанной операцией является евклидовым пространством.

Пример 3. Ясно, что нулевое векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$) станет евклидовым (унитарным), если мы определим скалярное произведение правилом $0 \bullet 0 = 0$.

Пример 4. Рассмотрим векторное пространство $R[x]$ всех многочленов над полем R .

Для произвольных многочленов $f, g \in R[x]$ положим

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Нетрудно убедиться, что эта операция удовлетворяет аксиомам 1)–4). Это означает, что $R[x]$ превращается в евклидово пространство. Точно таким же образом можно ввести скалярное произведение в пространстве всех многочленов степени $\leq n$ над полем R .

Следующий пример показывает, что операцию скалярного произведения можно ввести в произвольном конечномерном векторном пространстве над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Пример 5. Пусть V - произвольное ненулевое конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а $b_1, b_2, \dots, b_n$ - его базис. Пусть $x, y \in V$. Обозначим координаты векторов x и y в базисе $b_1, b_2, \dots, b_n$ через $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ соответственно. Положим

$$xy = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \alpha_2 \overline{\beta_2} + \dots + \alpha_n \overline{\beta_n}. \quad (1)$$

Простая проверка показывает, что аксиомы 1)–4) в этом случае также выполняются. Следовательно, пространство V с введенной операцией является пространством со скалярным произведением.

Если V -пространство над R , то равенство (1) можно переписать в более простом виде:

$$xy = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n.$$

Укажем несколько простых следствий из аксиом скалярного произведения.

Аксиома 2) утверждает, что скалярный множитель можно выносить за скобки от первого сомножителя. В действительности, его можно выносить и от второго сомножителя, но при этом его надо сопрягать. Более точно,

$$x(\alpha y) = \overline{\alpha}(x y) \quad (2)$$

для любых $x, y \in V$ и $\alpha \in F$. В самом деле, используя аксиомы 1) и 2) и свойства комплексно сопряженных чисел, имеем

$$x(\alpha y) = \overline{(\alpha y)x} = \overline{\alpha(yx)} = \overline{\alpha}(\overline{yx}) = \overline{\alpha}(xy).$$

Если $F = R$, то формула (2) принимает более простой вид:
 $x(\alpha y) = \alpha(xy).$

Аналогичное замечание можно сделать об аксиоме 3): скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения не только по первому, но и по второму аргументу. В самом деле, используя аксиомы 1) и 3), имеем

$$x(y + z) = \overline{(y + z)x} = \overline{yx} + \overline{zx} = \overline{xy} + \overline{xz} = xy + xz.$$

Далее, для любого вектора $x \in V$ выполнены равенства

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0, \tag{3}$$

поскольку $0 \cdot x = (0 \cdot x)x = 0 \cdot (xx) = 0$ и $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 = 0$.

Следующее утверждение как по формулировке, так и по доказательству, вполне аналогично ослабленному закону сокращения для скалярного произведения в обычном пространстве.

Ослабленный закон сокращения в пространстве со скалярным произведением

Если V - пространство со скалярным произведением, а векторы $a, b \in V$ таковы, что для любого вектора $x \in V$ выполняется равенство $ax = bx$, то $a = b$.

То же заключение верно, если для любого вектора $x \in V$ выполняется равенство $xa = xb$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Из условия вытекает, что $(a - b)x = 0$ для любого $x \in V$. В частности, $(a - b)(a - b) = 0$.

В силу аксиомы 4) отсюда вытекает, что $a - b = 0$, т. е. $a = b$. Второе утверждение доказывается аналогично.

Определение. Скалярное произведение вектора x на себя называется **скалярным квадратом** вектора x и обозначается через x^2 .

Аксиома 4) позволяет дать следующее

Определение. Длиной вектора x называется число $\sqrt{xx}$, обозначаемое через $|x|$.

Это определение представляется естественным, так как в обычном пространстве длина вектора также равна корню квадратному из его скалярного квадрата. Как мы увидим ниже, на пространства со скалярным произведением переносятся и многие другие свойства, связанные с длинами векторов в обычном пространстве. В частности, легко понять, что если $\alpha \in F$, то

$$|\alpha x| = |\alpha| |x|. \quad (4)$$

В самом деле, $\alpha \bar{\alpha} = |\alpha|^2$, и потому

$$|\alpha x| = \sqrt{(\alpha x)(\alpha x)} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha}(xx)} = \sqrt{|\alpha|^2 (xx)} = \sqrt{|\alpha|^2} \sqrt{xx} = |\alpha| |x|.$$

Отсюда вытекает, что, как и в обычном пространстве, справедливо

Замечание об орте вектора. Если $x \neq 0$, то длина вектора $\frac{x}{|x|}$ равна 1.

Доказательство. Используя (4), имеем

$$\left| \frac{x}{|x|} \right| = \left| \frac{1}{|x|} \right| |x| = \frac{1}{|x|} |x| = 1,$$

что и требовалось доказать.

Определение. Если $x \neq 0$, то вектор $\frac{x}{|x|}$ называется **ортом вектора** x .

Теорема о модуле скалярного произведения. Пусть V -пространство со скалярным произведением над полем F и $x, y \in V$.

1) Выполнено неравенство

$$|x y| \leq |x| \cdot |y|. \quad (5)$$

2) Равенство $|x y| = |x| \cdot |y|$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы.

Неравенство (5) называется **неравенством Коши–Буняковского**.

Доказательство.

1) Из (3) вытекает, что если $y = 0$, то обе части неравенства (5) равны нулю и потому неравенство выполняется. Поэтому далее можно считать, что $y \neq 0$, и, в силу аксиомы 4), $y y > 0$. Рассмотрим вектор $x - \alpha y$, где $\alpha \in F$.

По аксиоме 4) $(x - \alpha y)(x - \alpha y) \geq 0$. Раскрывая скобки и используя аксиому 1) и равенство (2), получаем неравенство

$$xx - \alpha yx - \overline{\alpha} x y + \alpha \overline{\alpha} y y \geq 0. \quad (6)$$

Подставим в (6) вместо α число $\frac{x y}{y y}$. Получим

$$0 \leq x x - \frac{x y}{y y} y x - \frac{\overline{x y}}{y y} x y + \frac{x y}{y y} \frac{\overline{x y}}{y y} y y = x x - \frac{x y \cdot y x}{y y} = x x - \frac{x y \cdot \overline{x y}}{y y} = x x - \frac{|x y|^2}{y y}.$$

$$\text{Итак, } \frac{|x y|^2}{y y} \leq x x.$$

Домножая обе части этого неравенства на положительное число $y y$, имеем $|x y|^2 \leq x x \cdot y y$. Заменяя в последнем неравенстве $x x$ на $|x|^2$ и $y y$ на $|y|^2$ и извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, получаем (5).

2) Если векторы x и y линейно независимы, то $x - \alpha y \neq 0$ для всякого α и вместо неравенства (6) можно записать неравенство $x x - \alpha y x - \overline{\alpha} x y + \alpha \overline{\alpha} y y > 0$.

После этого во всех последующих неравенствах можно заменить нестрогое неравенство на строгое и вместо (5) получить неравенство $|x y| < |x| \cdot |y|$.

Таким образом, если в (5) имеет место равенство, то x и y линейно зависимы. Докажем обратное утверждение. Пусть x и y линейно зависимы, т. е. $\alpha x + \beta y = 0$ для некоторых чисел $\alpha, \beta \in F$, по крайней мере одно из которых не равно 0.

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha \neq 0$. Тогда

$x = \gamma y$, где $\gamma = -\frac{\beta}{\alpha}$. Используя (4), имеем

$$|x y| = |(\gamma y) y| = |\gamma(y y)| = |\gamma \|y y|| = |\gamma \|y\| y| = |\gamma y \|y|| = |x \|y||.$$

Теорема доказана.

Предположим, что пространство V евклидово. В этом случае, если $x, y \neq 0$, то неравенство Коши–Буняковского равносильно тому, что

$$-1 \leq \frac{xy}{|x||y|} \leq 1.$$

Это делает корректным следующее определение.

Определение. Углом между ненулевыми векторами x и y евклидова пространства называется наименьший угол φ такой, что

$$\cos \varphi = \frac{xy}{|x||y|}.$$

Угол между нулевым вектором и любым другим вектором не определен. Угол между векторами x, y обозначается через $\angle(x, y)$.

В унитарном пространстве понятие угла между векторами не определено.