Скалярное произведение в евклидовом и унитарном пространстве

Определение. Пусть F - одно из полей R или C, а V - векторное пространство над F. **Пространство V называется пространством со скалярным произведением**, если задано отображение из V × V в F, которое любой упорядоченной паре векторов $x, y \in$ V ставит в соответствие число из F, называемое скалярным произведением этих векторов и обозначаемое через $x\,y$ или (x, y), так, что выполнены следующие условия, называемые аксиомами скалярного произведения:

1) для любых $x, y \in$ V: $x\,y = \overline{y\,x}$;

2) для любых $x, y \in$ V и любого α ∈ F: (αx)y = α(xy);

3) для любых $x, y, z \in$ V: (x + y)z = xz + yz (скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов);

4) для любого $x \in$ V: $x\,x \geq 0$, причем $x\,x = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Пространство со скалярным произведением называется **евклидовым**, если F = R, и **унитарным**, если F = C.

Как и «обычное» скалярное произведение в трехмерном пространстве, скалярное произведение в векторном пространстве не является алгебраической операцией, поскольку его результатом является число, а не вектор.

Если F = R, то аксиома 1) означает, что $xy = yx$. Иными словами, скалярное произведение в евклидовом пространстве коммутативно.

Хотя для комплексного числа α соотношение $\alpha > 0$, вообще говоря, не имеет смысла (поскольку на множестве всех комплексных чисел нет естественного отношения порядка), аксиома 4) имеет смысл не только в евклидовом, но и в унитарном пространстве.

Из аксиомы 1) вытекает, что

$$xx = \overline{xx},$$

и потому $xx \in$ R для любого $x \in$ V даже в случае, когда F = C.

Пример 1. Множество всех векторов обычного трехмерного пространства с обычным скалярным произведением является евклидовым пространством, так как все аксиомы 1)–4) в этом случае выполнены. Тоже самое можно сказать и о множестве всех векторов на плоскости с обычным скалярным произведением.

Следующий пример, в сочетании с примером 1, показывает, что в одном и том же векторном пространстве скалярное произведение можно вводить разными способами.

Пример 2. На множестве всех векторов на плоскости введем следующую операцию •: если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ этой плоскости имеют в некотором базисе координаты (x_1, x_2) и (y_1, y_2) соответственно, то $\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$.

Несложно проверить, что все аксиомы евклидова пространства будут при этом выполнены, и потому множество векторов на плоскости с указанной операцией является евклидовым пространством.

Пример 3. Ясно, что нулевое векторное пространство над полем R (соответственно C) станет евклидовым (унитарным), если мы определим скалярное произведение правилом $0 \bullet 0 = 0$.

Пример 4. Рассмотрим векторное пространство R[x] всех многочленов над полем R.

Для произвольных многочленов f , g ∈ R[x] положим

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt\,.$$

Нетрудно убедиться, что эта операция удовлетворяет аксиомам 1)–4). Это означает, что R[x] превращается в евклидово пространство. Точно таким же образом можно ввести скалярное произведение в пространстве всех многочленов степени $\le n$ над полем R.

Следующий пример показывает, что операцию скалярного произведения можно ввести в произвольном конечномерном векторном пространстве над полем R или C.

Пример 5. Пусть V - произвольное ненулевое конечномерное векторное пространство над полем R или C, а $b_1, b_2, ..., b_n$ - его базис. Пусть x, y ∈ V. Обозначим координаты векторов x и y в базисе $b_1, b_2, ..., b_n$ через $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ соответственно. Положим

$$\mathrm{xy} = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \alpha_2 \overline{\beta_2} + ... + \alpha_n \overline{\beta_n}. \qquad (1)$$

Простая проверка показывает, что аксиомы 1)–4) в этом случае также выполняются. Следовательно, пространство V с введенной операцией является пространством со скалярным произведением.

Если V-пространство над R, то равенство (1) можно переписать в более простом виде:

$$xy = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n.$$

Укажем несколько простых следствий из аксиом скалярного произведения.

Аксиома 2) утверждает, что скалярный множитель можно выносить за скобки от первого сомножителя. В действительности, его можно выносить и от второго сомножителя, но при этом его надо сопрягать. Более точно,

$$x(\alpha y) = \overline{\alpha}(x\,y) \qquad (2)$$

для любых x, y ∈ V и α ∈ F. В самом деле, используя аксиомы 1) и 2) и свойства комплексно сопряженных чисел, имеем

$$x(\alpha y) = \overline{(\alpha y)x} = \overline{\alpha(yx)} = \overline{\alpha}\left(\overline{yx}\right) = \overline{\alpha}(xy).$$

Если F = R, то формула (2) принимает более простой вид: $x(\alpha y) = \alpha(x\,y)$.

Аналогичное замечание можно сделать об аксиоме 3): скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения не только по первому, но и по второму аргументу. В самом деле, используя аксиомы 1)и 3), имеем

$$x(y+z)=\overline{(y+z)x}=\overline{yx}+\overline{zx}=\overline{\overline{xy}}+\overline{\overline{xz}}=xy+xz.$$

Далее, для любого вектора x ∈ V выполнены равенства

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0, \qquad (3)$$

поскольку $0 \cdot x = (0 \cdot x)x = 0 \cdot (x\,x) = 0$ и $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 = 0$.

Следующее утверждение как по формулировке, так и по доказательству, вполне аналогично ослабленному закону сокращения для скалярного произведения в обычном пространстве.

Ослабленный закон сокращения в пространстве со скалярным произведением

Если V - пространство со скалярным произведением, а векторы a, b ∈ V таковы, что для любого вектора x∈V выполняется равенство **ax = bx, то a = b**.

То же заключение верно, если для любого вектора x∈V выполняется равенство **xa = xb**.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Из условия вытекает, что (a − b)x = 0 для любого x ∈ V. В частности, (a − b)(a − b) = 0.

В силу аксиомы 4) отсюда вытекает, что a − b = 0, т. е. a = b. Второе утверждение доказывается аналогично.

Определение. Скалярное произведение вектора x на себя называется **скалярным квадратом** вектора x и обозначается через x^2.

Аксиома 4) позволяет дать следующее

Определение. Длиной вектора x называется число $\sqrt{xx}$, обозначаемое через $|x|$.

Это определение представляется естественным, так как в обычном пространстве длина вектора также равна корню квадратному из его скалярного квадрата. Как мы увидим ниже, на пространства со скалярным произведением переносятся и многие другие свойства, связанные с длинами векторов в обычном пространстве. В частности, легко понять, что если $\alpha \in F$, то

$$|\alpha x| = |\alpha||x|. \tag{4}$$

В самом деле, $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$, и потому

$$|\alpha x| = \sqrt{(\alpha x)(\alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(xx)} = \sqrt{|\alpha|^2 (x x)} = \sqrt{|\alpha|^2}\sqrt{x x} = |\alpha||x|.$$

Отсюда вытекает, что, как и в обычном пространстве, справедливо

Замечание об орте вектора. Если $x \neq 0$, то длина вектора $\frac{x}{|x|}$ равна 1.

Доказательство. Используя (4), имеем

$$\left|\frac{x}{|x|}\right| = \left|\frac{1}{|x|}\right||x| = \frac{1}{|x|}|x| = 1,$$

что и требовалось доказать.

Определение. Если $x \neq 0$, то вектор $\frac{x}{|x|}$ называется **ортом вектора** x.

Теорема о модуле скалярного произведения. Пусть V-пространство со скалярным произведением над полем F и x, y ∈ V.
1) Выполнено неравенство

$$|x\,y| \leq |x| \cdot |y|. \qquad (5)$$

2) Равенство $|x\,y| = |x| \cdot |y|$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы.
Неравенство (5) называется **неравенством Коши–Буняковского.**
Доказательство.
1) Из (3) вытекает, что если $y = 0$, то обе части неравенства (5) равны нулю и потому неравенство выполняется. Поэтому далее можно считать, что $y \neq 0$, и, в силу аксиомы 4), $y\,y > 0$.
Рассмотрим вектор $x - \alpha y$, где α ∈ F.
По аксиоме 4) $(x - \alpha y)(x - \alpha y) \geq 0$. Раскрывая скобки и используя аксиому 1) и равенство (2), получаем неравенство

$$xx - \alpha yx - \overline{\alpha} xy + \alpha \overline{\alpha} yy \geq 0. \qquad (6)$$

Подставим в (6) вместо α число $\dfrac{xy}{yy}$. Получим

$$0 \le xx - \frac{xy}{yy}yx - \frac{\overline{xy}}{yy}xy + \frac{xy}{yy}\frac{\overline{xy}}{yy}yy = xx - \frac{xy \cdot yx}{yy} = xx - \frac{xy \cdot \overline{xy}}{yy} = xx - \frac{|xy|^2}{yy}.$$

$$\text{Итак, } \frac{|xy|^2}{yy} \le xx.$$

Домножая обе части этого неравенства на положительное число yy, имеем $|xy|^2 \le xx \cdot yy$. Заменяя в последнем неравенстве xx на $|x|^2$ и yy на $|y|^2$ и извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, получаем (5).

2) Если векторы x и y линейно независимы, то $x - \alpha y \ne 0$ для всякого α и вместо неравенства (6) можно записать неравенство

$xx - \alpha yx - \overline{\alpha}xy + \alpha\overline{\alpha}yy > 0$.

После этого во всех последующих неравенствах можно заменить нестрогое неравенство на строгое и вместо (5) получить неравенство $|x\,y| < |x| \cdot |y|$.

Таким образом, если в (5) имеет место равенство, то x и y линейно зависимы. Докажем обратное утверждение. Пусть x и y линейно зависимы, т. е. $\alpha x + \beta y = 0$ для некоторых чисел α, β ∈ F, по крайней мере одно из которых не равно 0.

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha \neq 0$. Тогда $x = \gamma y$, где $\gamma = -\dfrac{\beta}{\alpha}$. Используя (4), имеем

$$|x\,y| = |(\gamma\,y)\,y| = |\gamma(y\,y)| = |\gamma||y\,y| = |\gamma||y||y| = |\gamma\,y||y| = |x||y|.$$

Теорема доказана.

Предположим, что пространство V евклидово. В этом случае, если $x, y \neq 0$, то неравенство Коши–Буняковского равносильно тому, что

$$-1 \leq \frac{xy}{|x||y|} \leq 1.$$

Это делает корректным следующее определение.

Определение. Углом между ненулевыми векторами x и y евклидова пространства называется наименьший угол φ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{xy}{|x||y|}.$$

Угол между нулевым вектором и любым другим вектором не определен. Угол между векторами x, y обозначается через $\angle(x, y)$.

В унитарном пространстве понятие угла между векторами не определено.