Лекция 8.
Логика предикатов.

Для чего нужна алгебра предикатов?

$$\forall x \exists y (x \notin y)$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall a \forall b \forall c \left(\begin{array}{l} \left(\left(ax_1^2 + bx_1 + c = 0\right) \wedge \left(ax_2^2 + bx_2 + c = 0\right) \wedge \left(ax_3^2 + bx_3 + c = 0\right)\right) \\ \rightarrow \left(\left(x_1 = x_2\right) \vee \left(x_1 = x_3\right) \vee \left(x_2 = x_3\right)\right) \end{array} \right)$$

10.2. Введя подходящие одноместные предикаты на соответствующих областях, переведите следующие высказывания на язык логики предикатов:

а) Все рациональные числа действительные;

б) Ни одно рациональное число не является действительным;

в) Некоторые рациональные числа действительные;

г) Некоторые рациональные числа не являются действительными.

Определите, какие из данных высказываний истинны.

Решение. Введем следующие одноместные предикаты: $Q(x)$: «x — рациональное число»; $R(x)$: «x — действительное число». Тогда перевод данных высказываний на язык логики предикатов будет таким: а) $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$; б) $(\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg R(x))$; в) $(\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$; г) $(\exists x)(Q(x) \wedge \neg R(x))$.

Основные понятия

Определение 18.1. Определенным на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *n-местным предикатом* называется предложение, содержащее n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ соответственно.

Примеры.
«Студент x учится в группе МО-219» - одноместный предикат P(x), определенный на множестве студентов (например, присутствующих).
x – предметная переменная.
Если x принимает значение $M_1 =$ «Халитова Сэйда», то получаем
$P(M_1)$ - истинное высказывание. Если x принимает значение $M_2 =$ «Саубанов Эмиль», то получаем $P(M_2)$ - ложное высказывание.
Q(x,y) - «$x^2 + y^2 \le 9$» - двухместный предикат, определенный на R,R или R^2.
Q(1,2) – истинное высказывание.
Q(3,1) – ложное высказывание.
Q(4,y) - ?
Q(x,2) - ?

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \text{функция } M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n \to \{0,1\}$$

Классификация предикатов. ***Определение 18.2.*** Предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, называется:

а) ***тождественно истинным***, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ любых конкретных предметов $a_1, a_2, ..., a_n$ из множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ соответственно он превращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$;

б) ***тождественно ложным***, если при любой подстановке вместо переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ любых конкретных предметов из множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ соответственно он превращается в ложное высказывание;

в) ***выполнимым*** (***опровержимым***), если существует по меньшей мере один набор конкретных предметов $a_1, a_2, ..., a_n$ из множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ соответственно, при подстановке которых вместо соответствующих предметных переменных в предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ последний превратится в истинное (ложное) высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$.

ТЗ: привести примеры предикатов а,б),в) на множестве 1)людей 2)чисел

Множество истинности предиката. *Определение 18.3. Множеством истинности* предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданного на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, называется совокупность всех упорядоченных n-систем $(a_1, a_2, ..., a_n)$, в которых $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$, ..., $a_n \in M_n$, таких, что данный предикат обращается в истинное высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ при подстановке $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, ..., $x_n = a_n$. Это множество будем обозначать P^+. Таким образом,

$$P^+ = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : \lambda(P(a_1, a_2, ..., a_n)) = 1\}.$$

Множество P^+ истинности n-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ представляет собой n-арное отношение между элементами множеств $M_1, M_2, ..., M_n$. Если предикат $P(x)$ — одноместный, заданный над множеством M, то его множество истинности P^+ является подмножеством множества M: $P^+ \subseteq M$.

Пример.

$A(x)$ - «$|x| \geq 2$» на $x \in R$

$A^+ = (-\infty;2] \cup [2;+\infty)$

Выполнимый предикат - $P^+ \neq \varnothing$

ТЗ: записать условия тождественно истинного, тождественно ложного и опровержимого предикатов, используя множество истинности предиката.

Равносильность и следование предикатов

Равносильность и следование предикатов. ***Определение 18.4.*** Два n-местных предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданных над одними и теми же множествами $M_1, M_2, ..., M_n$, называются *равносильными*, если набор предметов (элементов) $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ превращает первый предикат в истинное высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ в том и только в том случае, когда этот набор предметов превращает второй предикат в истинное высказывание $Q(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Другими словами (на языке множеств истинности), предикаты $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают: $P^+ = Q^+$.

Определение 18.5. Предикат $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданный над множествами $M_1, M_2, ..., M_n$, называется *следствием* предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданного над теми же множествами, если он превращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений предметных переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание превращается предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Другими словами (в терминах множеств истинности), можно сказать, что предикат Q является следствием предиката P тогда и только тогда, когда $P^+ \subseteq Q^+$.

Утверждение о том, что предикат Q является следствием предиката P, будем символически записывать так: $P \Rightarrow Q$.

Теорема 18.6. *Каждые два тождественно истинных (тождественно ложных) предиката, заданных на одних и тех же множествах, равносильны. Обратно, всякий предикат, равносильный тождественно истинному (тождественно ложному) предикату, сам является тождественно истинным (тождественно ложным) предикатом.*

Теорема 18.7. *Каждый тождественно истинный n-местный предикат является следствием любого другого n-местного предиката, определенного на тех же множествах. Каждый n-местный предикат является следствием любого тождественно ложного n-местного предиката, определенного на тех же множествах.*

Теорема 18.8. *Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — два n-местных предиката, определенные на одних и тех же множествах, такие, что $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть следствие $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда:*

а) если $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тождественно истинный (выполнимый), то и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тождественно истинный (выполнимый);

б) если $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тождественно ложный (опровержимый), то и $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тождественно ложный (опровержимый).

ТЗ: доказать теоремы 18.6,18.7,18.8

Логические операции над предикатами

Отрицание предиката. *Определение 19.1. Отрицанием n-местного предиката* $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенного на множествах M_1, M_2, ..., M_n, называется новый n-местный предикат, определенный на тех же множествах, обозначаемый $\neg P(x_1, x_2, ..., x_n)$ (читается: «неверно, что $P(x_1, x_2, ..., x_n)$»), который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых исходное высказывание превращается в ложное высказывание.

Другими словами, предикат $\neg P(x_1, x_2, ..., x_n)$ таков, что для любых предметов $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$, ..., $a_n \in M_n$ высказывание $\neg P(a_1, a_2, ..., a_n)$ является отрицанием высказывания $P(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Конъюнкция двух предикатов. ***Определение 19.5.*** *Конъюнкцией* n-местного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенного на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, и m-местного предиката $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$, определенного на множествах $N_1, N_2, ..., N_m$, называется новый $(n + m)$-местный предикат, определенный на множествах $M_1, M_2, ..., M_n, N_1, N_2, ..., N_m$, обозначаемый $P(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge Q(y_1, y_2, ..., y_m)$ (читается «$P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$»), который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых оба исходных предиката превращаются в истинные высказывания.

Другими словами, предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge Q(y_1, y_2, ..., y_m)$ таков, что для любых предметов $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ и $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, ..., b_m \in N_m$ высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n) \wedge Q(b_1, b_2, ..., b_m)$ является конъюнкцией высказываний $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $Q(b_1, b_2, ..., b_m)$.

Дизъюнкция двух предикатов. *Определение 19.8. Дизъюнкцией n-местного предиката* $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенного на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, и m-местного предиката $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$, определенного на множествах $N_1, N_2, ..., N_m$, называется новый $(n+m)$-местный предикат, определенный на множествах $M_1, M_2, ..., M_n, N_1, N_2, ..., N_m$, обозначаемый $P(x_1, x_2, ..., x_n) \vee Q(y_1, y_2, ..., y_m)$ (читается «$P(x_1, x_2, ..., x_n)$ или $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$»), который превращается в истинное высказывание при всех тех и только тех значениях предметных переменных, при которых в истинное высказывание превращается по меньшей мере один из исходных предикатов.

Другими словами, предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n) \vee Q(y_1, y_2, ..., y_m)$ таков, что для любых предметов $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ и $b_1 \in N_1, b_2 \in N_2, ..., b_m \in N_m$ высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n) \vee Q(b_1, b_2, ..., b_m)$ является дизъюнкцией высказываний $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $Q(b_1, b_2, ..., b_m)$.

ТЗ: Сформулировать правила получения множества истинности для Отрицания, конъюнкции и дизъюнкции предикатов

Импликация и эквивалентность двух предикатов. Импликация $P(x_1, x_2, ..., x_n) \to Q(y_1, y_2, ..., y_m)$ определяется как такой предикат, что для любых предметов $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$, ..., $a_n \in M_n$ и $b_1 \in N_1$, $b_2 \in N_2$, ..., $b_m \in N_m$ высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n) \to Q(b_1, b_2, ..., b_m)$ является импликацией высказываний $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $Q(b_1, b_2, ..., b_m)$. Аналогично определяется эквивалентность двух предикатов. Нетрудно проверить, что импликация двух предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, есть тождественно истинный предикат тогда и только тогда, когда ее заключение является следствием посылки, а эквивалентность тождественно истинна, если и только если исходные предикаты равносильны. Свойства этих операций над предикатами, подобно свойствам операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции над предикатами (см. теорему 19.12), получаются из соответствующих тавтологий теоремы 3.3. Так, если P, Q, R — предикаты, то, например,

а) $(P \to (Q \to R)) \Rightarrow ((P \to Q) \to (P \to R))$;
д) $(\neg Q \wedge (P \to Q)) \Rightarrow \neg P$;
п) $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$

и т. д. Аналогично, из тавтологий теоремы 3.4 получаются равносильности, выражающие одни логические операции над предикатами через другие. Например,

а) $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$;
в) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$;
ж) $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$

и так далее для любых предикатов P, Q, R.

Кванторные операции над предикатами

Определение 20.1. Операцией ***связывания квантором общности*** называется правило, по которому каждому одноместному предикату $P(x)$, определенному на множестве M, сопоставляется высказывание, обозначаемое $(\forall x)(P(x))$ (читается: «для всякого [значения] x $P(x)$ [истинное высказывание]»), которое истинно в том и только в том случае, когда предикат $P(x)$ тождественно истинен, и ложно в противном случае,

$$\lambda[(\forall x)(P(x))] = \begin{cases} 1, \text{ если } P(x) \text{ — тождественно истинный предикат,} \\ 0, \text{ если } P(x) \text{ — опровержимый предикат.} \end{cases}$$

При чтении высказывания $(\forall x)(P(x))$ слова в квадратных скобках могут опускаться. Высказывание $(\forall x)(P(x))$ называется ***универсальным высказыванием*** для предиката $P(x)$. Символ $\forall$ происходит от первой буквы англ. *all* — «все». Сам символ $(\forall x)$ также называют квантором общности по переменной x.

Пример.
P(x) – “x имеет 2 глаза”, Q(x) – “x студент группы МО-213” на множестве присутствующих

$(\forall x)(P(x))$ - истинное высказывание
$(\forall x)(Q(x))$ - ложное высказывание

Определение 20.2. Операцией *связывания квантором общности* по переменной x_1 называется правило, по которому каждому n-местному ($n \geq 2$) предикату $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенному на множествах $M_1, M_2, ..., M_n$, ставится в соответствие новый $(n-1)$-местный предикат, обозначаемый $(\forall x_1)(P(x_1, x_2, ..., x_n))$ (читается: «для всех x_1 $P(x_1, x_2, ..., x_n)$»), который для любых предметов $a_2 \in M_2, ..., a_n \in M_n$ превращается в высказывание $(\forall x_1)(P(x_1, a_2, ..., a_n))$, истинное в том и только в том случае, когда одноместный предикат $P(x_1, a_2, ..., a_n)$, определенный на множестве M_1, тождественно истинен, и ложное в противном случае. Другими словами:

$$\lambda[(\forall x_1)(P(x_1, a_2, ..., a_n))] = \begin{cases} 1, \text{если } P(x_1, a_2, ..., a_n) \text{ — тождественно} \\ \qquad\qquad \text{истинный предикат от } x_1, \\ 0, \text{если } P(x_1, a_2, ..., a_n) \text{ — опровержимый} \\ \qquad\qquad \text{предикат от } x_1. \end{cases}$$

Пример.

$P(x,y)$ – “x является родителем y” на множестве всех людей

$(\forall x)(P(x,y))$ - “любой человек x является родителем y” – одноместный предикат (тождественно ложный)

$(\forall y)(P(x,y))$ - “x является родителем любого человека y” – одноместный предикат (тождественно ложный)

$(\forall x)(\forall y)(P(x,y))$ - ?

$P(x,y)$ – “$\sin x + \cos y \leq 2$” на множестве R^2

$(\forall x)(P(x,y))$ и $(\forall y)(P(x,y))$ - тождественно истинные одноместные предикаты

$(\forall x)(\forall y)(P(x,y))$ - тождественно истинное высказывание

Квантор существования. Как и в предыдущем пункте, начнем рассмотрение с операции связывания квантором существования, применяемой к одноместному предикату.

Определение 20.3. Операцией *связывания квантором существования* называется правило, по которому каждому одноместному предикату $P(x)$, определенному на множестве M, ставится в соответствие высказывание, обозначаемое $(\exists x)(P(x))$ (читается: «существует [значение] x, такое, что $P(x)$ [истинное высказывание]»), которое ложно в том и только в том случае, когда $P(x)$ тождественно ложен, и истинно в противном случае, т.е.

$$\lambda[(\exists x)(P(x))] = \begin{cases} 0, \text{ если } P(x) \text{ — тождественно ложный предикат,} \\ 1, \text{ если } P(x) \text{ — выполнимый предикат.} \end{cases}$$

При чтении высказывания $(\exists x)(P(x))$ слова в квадратных скобках могут опускаться. Высказывание $(\exists x)(P(x))$ называется *экзистенциальным высказыванием* для предиката $P(x)$. Символ $\exists$ происходит от первой буквы англ. *exist* — «существовать». Сам символ $\exists x$ также называют *квантором существования по переменной x*.

Пример.
P(x) – “x имеет 2 глаза”, Q(x) – “x студент группы МО-213”, R(x) - “x посещал планету Марс” на множестве присутствующих
$(\exists x)(P(x))$ - истинное высказывание
$(\exists x)(Q(x))$ - истинное высказывание
$(\exists x)(R(x))$ - ложное высказывание

Подобно выражению $(\forall x)(P(x))$, в выражении $(\exists x)(P(x))$ переменная x также перестает быть переменной в обычном смысле слова: это — *связанная переменная.*

Если одноместный предикат $P(x)$ задан на конечном множестве $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, то высказывание $(\exists x)(P(x))$ эквивалентно (имеет то же логическое значение) дизъюнкции $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$. В самом деле, по определению 20.3 ложность высказывания $(\exists x)(P(x))$ означает, что предикат $P(x)$ тождественно ложен, т.е. каждое из высказываний $P(a_1)$, $P(a_2)$, ..., $P(a_n)$, в которые данный предикат может превратиться, ложно. Последнее равносильно ложности дизъюнкции $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$.

Значит, для предикатов, заданных на конечном множестве, операция связывания квантором существования может быть выражена через дизъюнкцию. Для предикатов, заданных на бесконечном множестве, такого сделать нельзя, и в этом случае операция связывания квантором существования является существенно новой.

Определение 20.4. Операцией *связывания квантором существования* по переменной x_1 называется правило, по которому каждому n-местному ($n \geq 2$) предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенному на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, ставится в соответствие новый $(n-1)$-местный предикат, обозначаемый $(\exists x_1)(P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ (читается: «существует такой x_1, что $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, который для любых предметов $a_2 \in M_2, \ldots, a_n \in M_n$ превращается в высказывание $(\exists x_1)(P(x_1, a_2, \ldots, a_n))$, ложное в том и только в том случае, когда одноместный предикат $P(x_1, a_2, \ldots, a_n)$, определенный на множестве M_1, тождественно ложен, и истинное в противном случае, т.е.

$$\lambda[(\exists x_1)(P(x_1, a_2, \ldots, a_n))] = \begin{cases} 0, \text{ если } P(x_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ — тождественно ложный предикат от } x_1, \\ 1, \text{ если } P(x_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ — выполнимый предикат от } x_1. \end{cases}$$

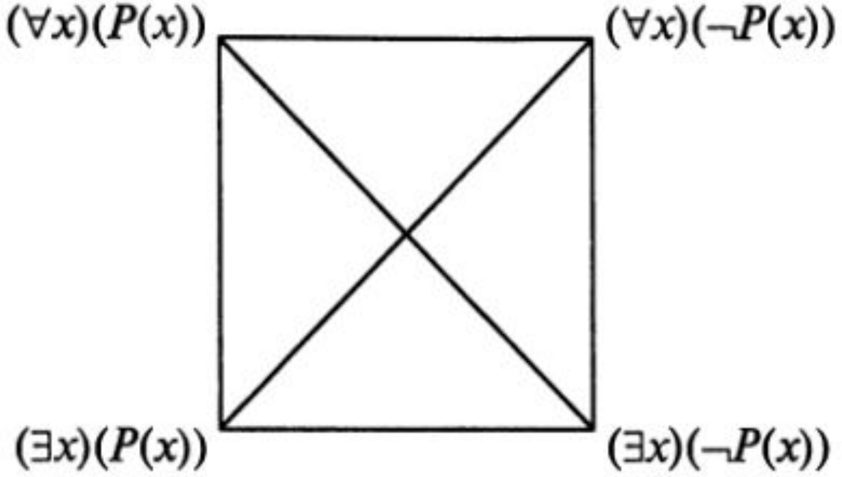
Пример.

P(x,y) – “x является родителем y” на множестве всех людей

$(\exists x)(P(x,y))$ - “существует x , являющийся родителем y ” – одноместный тождественно-истинный предикат

$(\exists y)(P(x,y))$ - “существует такой y, что x является его родителем ” – одноместный предикат – выполнимый, опровержимый

Логический квадрат. Кванторные операции (или операции квантификации) над предикатами — важнейший принципиальный шаг, отличающий теорию предикатов от теории высказываний. Систему взаимоотношений между универсальными и экзистенциальными высказываниями, возникающими при определении операций взятия квантора общности и квантора существования, схематично представляют в виде следующего так называемого *«логического квадрата»*:



Универсальные высказывания $(\forall x)(P(x))$ и $(\forall x)(\neg P(x))$, стоящие в двух верхних вершинах квадрата, не могут быть (ни для какого предиката $P(x)$) одновременно истинными (хотя конечно же могут быть одновременно ложными). Говорят, что эти высказывания являются *противными* или *контрарными*. Экзистенциальные высказывания $(\exists x)(P(x))$ и $(\exists x)(\neg P(x))$, стоящие в двух нижних вершинах квадрата, наоборот, не могут быть (ни для какого предиката $P(x)$) одновременно ложными (хотя конечно же могут быть одновременно истинными). Говорят, что эти высказывания *субпротивны* (или *субконтрарны*). Высказывания, стоящие в вершинах каждой диагонали квадрата, противоречат одно другому, т.е. одно является отрицанием другого. Наконец, под каждым из универсальных высказываний, стоящих у верхних вершин, стоит высказывание у нижней вершины, следующее из него, т.е. такое, что импликация этих высказываний (для любого предиката $P(x)$) является истинным высказыванием.