Условный экстремум

$y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$ при условиях

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Условный экстремум

$y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$ при условиях

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

<u>Опр.</u> $y = f(x)$, опред. на обл. $E \subset \mathbb{E}_{n+m}$, имеет условный максимум (минимум, стр. макс., стр. мин.) при $x = x^{(0)} \in E$, удовлетворяющей условиям $\varphi_j(x^{(0)}) = 0$ $(j = 1, \dots, m)$ если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x^{(0)}) : \varphi_j(x) = 0$ $(j = 1, \dots, m)$

$$f(x) \leq f(x^{(0)}) \quad (\geq, <, >)$$

Условный экстремум

$y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$ при условиях

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Опр. $y = f(x)$, опред. на обл. $E \subset \mathbb{E}_{n+m}$, имеет условный максимум (минимум, стр. макс., стр. мин.) при $x = x^{(0)} \in E$, удовлетворяющей условиям $\varphi_j(x^{(0)}) = 0$ $(j = 1, \dots, m)$ если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x^{(0)}) : \varphi_j(x) = 0$ $(j = 1, \dots, m)$

$$f(x) \leqslant f(x^{(0)}) \quad (\geqslant, <, >)$$

$$J\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n+1}} \dots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n+m}} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} \dots \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{n+1}} \dots \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{n+m}} \end{pmatrix}$$

$f(x), \varphi_j(x) \in C_1$ в E.

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ независимые условия $\Rightarrow \dfrac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} \neq 0$

(Перенумерация неизвестных, исключение зависимых условий)

$x_{n+j} = x_{n+j}(x_1, \dots, x_n)$ $(j = 1, \dots, m) \Rightarrow$ безусл. экстр. $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}(x_1, \dots, x_n), \dots, x_{n+m}(x_1, \dots, x_n))$

Явных формул $x_{n+j} = x_{n+j}(x_1, \dots, x_n)$ как правило, нет.

$$y=f(x)=f(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+m}).\quad dy=\sum_{i=1}^{n+m}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=0 \ \left(\begin{matrix}\text{необх. усл.}\\ \text{инвар. 1-го дифф.}\end{matrix}\right)$$

$x_1,\dots,x_{n+m}$ - завис. перем. $\not\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_i}=0 \ (i=1,\dots,n+m)$

$$\varphi_j(x)=\varphi_j(x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+m})=\varphi_j(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}(x_1,\dots,x_n),\dots,x_{n+m}(x_1,\dots,x_n))=0$$

$$(j=1,\dots,m)$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n+m}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx_i=0\ (j=1,\dots,m)\Rightarrow\sum_{i=n+1}^{n+m}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx_i=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx_i$$

$\Delta=\dfrac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_m)}{D(x_{n+1},\dots,x_{n+m})}\neq 0\Rightarrow dx_{n+1},\dots,dx_{n+m}$ выражаем явно через $dx_1,\dots,dx_n$ (Крамер)

$$0=dy=\sum_{i=1}^{n+m}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(x)dx_i\Rightarrow\begin{cases}\Psi_i(x)=0,\ i=1,\dots,n & \text{(нез. перем)}\\ \varphi_j(x)=0,\ j=1,\dots,m\end{cases}$$

Получена с-ма $n+m$ ур-ний с $n+m$ неизвестными $(x_1,\dots,x_{n+m})$

для определения критических точек.

$$\sum_{i=1}^{n+m}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx_i = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_j \sum_{i=1}^{n+m}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx_i = 0 \quad j=1,\dots,m$$

$$dy=\sum_{i=1}^{n+m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i=0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n+m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}-\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}-\dots-\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_i}\right)dx_i=0$$

В искомой крит. точке $x^{(0)}$ рассмотрим с-му уравнений:

$$\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}+\dots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i=n+1,\dots,n+m$$

$$\Delta=\left.\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_m)}{D(x_{n+1},\dots,x_{n+m})}\right|_{x=x^{(0)}}\neq 0 \Rightarrow \exists \text{ и ед. решение } \lambda_1^{(0)},\dots,\lambda_m^{(0)}$$

Т.е. при $x=x^{(0)}$ $\quad \lambda_1^{(0)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}+\dots+\lambda_m^{(0)}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i=n+1,\dots,n+m$

Подставим $\lambda_j^{(0)}$. Тогда при $x=x^{(0)}$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{n\ (\text{а не } n+m)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}-\lambda_1^{(0)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}-\dots-\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_i}\right)dx_i=0 \Rightarrow$$ ($dx_1,\dots dx_n$ — дифф-лы незав. перем.)

$$\lambda_1^{(0)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}(x^{(0)})+\dots+\lambda_m^{(0)}\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_i}(x^{(0)})=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}), \quad i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m}\lambda_j^{(0)}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x^{(0)})=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)});\ i=1,\dots,n,n+1,\dots,n+m;\ \varphi_j(x^{(0)})=0;\ j=1,\dots,m$$

Итак, для нахождения крит. точек $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\dots,x_{n+m}^{(0)})$ и множителей Лагранжа $\lambda_1^{(0)},\dots,\lambda_m^{(0)}$ (необх. усл. экстремума) надо решить с-му ур-ний:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), & i=1,\dots,n,n+1,\dots,n+m\\ \varphi_j(x)=0, & j=1,\dots,m\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i = 0 \Rightarrow \lambda_j \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

$$dy = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \dots - \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \right) dx_i = 0$$

В искомой крит. точке $x^{(0)}$ рассмотрим с-му уравнений:

$$\lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = n+1, \dots, n+m$$

$$\Delta = \left. \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} \right|_{x = x^{(0)}} \neq 0 \Rightarrow \exists \text{ и ед. решение } \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}$$

Т.е. при $x = x^{(0)}$ $\quad \lambda_1^{(0)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_m^{(0)} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = n+1, \dots, n+m$

Подставим $\lambda_j^{(0)}$. Тогда при $x = x^{(0)}$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{\overset{(\text{а не } n+m)}{n}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_1^{(0)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \dots - \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \right) dx_i = 0 \Rightarrow (dx_1, \dots dx_n - \text{дифф-лы независ. перем.})$$

$$\lambda_1^{(0)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(x^{(0)}) + \dots + \lambda_m^{(0)} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(0)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}); \; i = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m; \; \varphi_j(x^{(0)}) = 0; \; j = 1, \dots, m$$

Итак, для нахождения крит. точек $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_{n+m}^{(0)})$ и множителей Лагранжа $\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}$ (необх. усл. экстремума) надо решить с-му ур-ний:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), & i = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m \\ \varphi_j(x) = 0, & j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Для запоминания: функция $n+2m$ независимых перем. (функция Лагранжа):

$$F(x, \lambda) = F(x_1, \dots, x_{n+m}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(x).$$

Тогда $dF = 0$, т.е. $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 = -\frac{\partial F}{\partial \lambda_j}$, $i = 1, \dots, n+m$; $\; j = 1, \dots, m$

даёт необх. усл. экстремума

Достаточные условия усл. экстремума

$f(x) = f(x_1, \dots, x_{n+m})$, $\varphi_j(x) \in C_2$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_{n+m}$

$$\sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i = 0 \Rightarrow \left(\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} \neq 0 \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m} \text{ выражены} \\ \text{через } dx_1, \dots, dx_n \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow dy = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(x)\, dx_i \Rightarrow \left(\begin{array}{l} dx_1, \dots, dx_n \text{ — дифф-лы} \\ \underline{\text{независ.}} \text{ переменных} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2y = \sum_{i=1}^{n} d(\Psi_i(x))\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n+m} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} dx_k \right) dx_i$$

$$\Rightarrow d^2y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Omega_{ik}(x)\, dx_i dx_k.$$

Этот d^2y (квад. форму) исследуем на определённость при $x = x^{(0)}$

Пример. $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$. $\quad x_1 \cdot \dots \cdot x_n = c^n$ $(c > 0)$ – условие

$F(x, \lambda) = x_1 + \dots + x_n - \lambda(x_1 \cdot \dots \cdot x_n - c^n) \qquad \varphi(x) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n - c^n$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 1 - \lambda(x_1 \cdot \dots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_n) \\ 0 = -\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 \cdot \dots \cdot x_n - c^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \cdot \dots \cdot x_{i-1} x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_n = \dfrac{1}{\lambda} \\ x_1 \cdot \dots \cdot x_n = c^n \end{cases}$$

$\Rightarrow x_i = \lambda c^n \ \forall i$, $(\lambda c^n)^n = c^n$, $\lambda c^n = c$, $\lambda = c^{1-n}$, $x_1 = \dots = x_n = c$ – кр. точка

Пример. $y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$. $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = c^n$ $(c>0)$ - условие

$F(x, \lambda) = x_1 + \ldots + x_n - \lambda(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n - c^n)$ $\quad \varphi(x) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n - c^n$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 1 - \lambda(x_1 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_n) \\ 0 = -\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n - c^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_n = \dfrac{1}{\lambda} \\ x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = c^n \end{cases}$$

$\Rightarrow x_i = \lambda c^n \ \forall i$, $(\lambda c^n)^n = c^n$, $\lambda c^n = c$, $\lambda = c^{1-n}$, $x_1 = \ldots = x_n = c$ - кр. точка

$dy = dx_1 + \ldots + dx_n$. $x_2 \cdot \ldots \cdot x_n dx_1 + x_1 x_3 \cdot \ldots \cdot x_n dx_2 + \ldots + x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} dx_n = 0$

$$\frac{c^n}{x_1} dx_1 + \ldots + \frac{c^n}{x_n} dx_n = 0 \quad \frac{dx_1}{x_1} + \ldots + \frac{dx_n}{x_n} = 0 \Rightarrow dx_n = -x_n\left(\frac{dx_1}{x_1} + \ldots + \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}}\right)$$

$$dy = dx_1 + \ldots + dx_{n-1} - x_n\left(\frac{dx_1}{x_1} + \ldots + \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}}\right), \quad d^2y = -dx_n\left(\frac{dx_1}{x_1} + \ldots + \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}}\right) -$$

$$- x_n d\left(\frac{dx_1}{x_1} + \ldots + \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}}\right) = x_n\left(\frac{dx_1}{x_1} + \ldots + \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}}\right)^2 + x_n\left(\frac{dx_1^2}{x_1^2} + \ldots + \frac{dx_{n-1}^2}{x_{n-1}^2}\right)$$

$$\Rightarrow d^2y\Big|_{x_1 = \ldots = x_n = c} = \frac{1}{c}\left[(dx_1 + \ldots + dx_{n-1})^2 + (dx_1^2 + \ldots + dx_{n-1}^2)\right]$$ - полож. опр.

$\Rightarrow x_1 = \ldots = x_n = c$ - минимум (условный)

Задача (сделать самост.) Найти экстремум квадратичной формы $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ji}=a_{ij})$ на единичной сфере (условие: $x_1^2+\dots+x_n^2=1$).

Ответ: стац. т.: с. в., множители Лагранжа λ – с. ч. матрицы кв. формы