

## Условный экстремум

$y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$  при условиях

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

## Условный экстремум

$y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$  при условиях

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Опр.  $y = f(x)$ , опред. на обл.  $E \subset \mathbb{E}_{n+m}$ , имеет условный максимум

минимум, стр. макс., стр. мин.) при  $x = x^{(0)} \in E$ , удовлетворяющей условиям

$\varphi_j(x^{(0)}) = 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ) если  $\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x^{(0)}) : \varphi_j(x) = 0$  ( $j = 1, \dots, m$ )

$$f(x) \leq f(x^{(0)}) \quad (\geq, <, >)$$

## Условный экстремум

$y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$  при условиях

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Опр.  $y = f(x)$ , опред. на обл.  $E \subset \mathbb{E}_{n+m}$ , имеет условный максимум (минимум, стр. макс., стр. мин.) при  $x = x^{(0)} \in E$ , удовлетворяющей условиям

$\varphi_j(x^{(0)}) = 0$  ( $j = 1, \dots, m$ ) если  $\exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(x^{(0)}) : \varphi_j(x) = 0$  ( $j = 1, \dots, m$ )

$$f(x) \leq f(x^{(0)}) \quad (\geq, <, >)$$

$$J\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n+1}} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n+m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{n+1}} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{n+m}} \end{pmatrix}$$

$f(x), \varphi_j(x) \in C_1$  в  $E$ .

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$  независимые условия

$$\Rightarrow \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} \neq 0$$

(Переименование неизвестных, исключение зависимых условий)

$x_{n+j} = x_{n+j}(x_1, \dots, x_n)$  ( $j = 1, \dots, m$ )  $\Rightarrow$  безуслов. экстр.  $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}(x_1, \dots, x_n), \dots, x_{n+m}(x_1, \dots, x_n))$

В этих формул  $x_{n+j} = x_{n+j}(x_1, \dots, x_n)$  как правило, нет.

$$y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}). \quad dy = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad \left( \begin{array}{l} \text{незав. урн.} \\ \text{инвар. т-во} \end{array} \right)$$

$$x_1, \dots, x_{n+m} \text{ - завис. перемен.} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n+m)$$

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = \varphi_j(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}(x_1, \dots, x_n), \dots, x_{n+m}(x_1, \dots, x_n)) = 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \Rightarrow \sum_{i=n+1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i$$

$$\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} \neq 0 \Rightarrow dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m} \text{ выражены явно через } dx_1, \dots, dx_n \text{ (Кронекер)}$$

$$0 = dy = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n \Psi_i(x) dx_i \Rightarrow \begin{cases} \Psi_i(x) = 0, & i = 1, \dots, n \quad (\text{нез. перемен.}) \\ \varphi_j(x) = 0, & j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Получена с-ма  $n+m$  ур-ний с  $n+m$  неизвестными  $(x_1, \dots, x_{n+m})$

для определения критических точек.

$$\sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i = 0 \Rightarrow \lambda_j \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad j=1, \dots, m$$

$$dy = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+m} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \dots - \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \right) dx_i = 0$$

В указанной крит. точке  $x^{(0)}$  рассмотрим с-цу уравнений:

$$\lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = n+1, \dots, n+m$$

$$\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} \Big|_{x=x^{(0)}} \neq 0 \Rightarrow \exists \text{ и ед. решение } \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}$$

Т.е. при  $x = x^{(0)}$   $\lambda_1^{(0)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_m^{(0)} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = n+1, \dots, n+m$

Подставим  $\lambda_j^{(0)}$ . Тогда при  $x = x^{(0)}$  имеем!

$$\sum_{i=1}^{n+m} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_1^{(0)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \dots - \lambda_m^{(0)} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \right) dx_i = 0 \Rightarrow \left( \begin{array}{l} dx_1, \dots, dx_n \\ \text{незав. перемен.} \end{array} \right)$$

$$\lambda_1^{(0)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(x^{(0)}) + \dots + \lambda_m^{(0)} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^m \lambda_j^{(0)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}); \quad i = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m; \quad \varphi_j(x^{(0)}) = 0; \quad j = 1, \dots, m$$

Итак, для нахождения крит. точек  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_{n+m}^{(0)})$  и множителей Лагранжа  $\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}$  (крит. усл. экстремума) надо решить с-цу ур-ний:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), & i = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m \\ \varphi_j(x) = 0, & j = 1, \dots, m \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i = 0 \Rightarrow \lambda_j \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad j=1, \dots, m$$

$$dy = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+m} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \dots - \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \right) dx_i = 0$$

В каждой крит. точке  $x^{(0)}$  рассмотрим с-му уравнений:

$$\lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = n+1, \dots, n+m$$

$$\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} \Big|_{x=x^{(0)}} \neq 0 \Rightarrow \exists \text{ у ед. решение } \lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}$$

Т.е. при  $x = x^{(0)}$   $\lambda_1^{(0)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_m^{(0)} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = n+1, \dots, n+m$

Подставим  $\lambda_j^{(0)}$ . Тогда при  $x = x^{(0)}$  имеем:

$$\sum_{i=1}^{n+m} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_1^{(0)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \dots - \lambda_m^{(0)} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \right) dx_i = 0 \Rightarrow \left( \begin{array}{l} dx_1, \dots, dx_n \\ \text{незав. перемен.} \end{array} \right)$$

$$\lambda_1^{(0)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(x^{(0)}) + \dots + \lambda_m^{(0)} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}), \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^m \lambda_j^{(0)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}); \quad i = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m; \quad \varphi_j(x^{(0)}) = 0; \quad j = 1, \dots, m$$

Итак, для нахождения крит. точек  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_{n+m}^{(0)})$  и множеств значений лагранжа  $\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}$  (крит. усл. экстремума) надо решить с-му ур-ний:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), & i = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+m \\ \varphi_j(x) = 0, & j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Для этого введем функции  $n+2m$  независимых перемен. (функции Лагранжа):

$$F(x, \lambda) = F(x_1, \dots, x_{n+m}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(x).$$

Тогда  $dF = 0$ , т.е.  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 = -\frac{\partial F}{\partial \lambda_j}, \quad i = 1, \dots, n+m; \quad j = 1, \dots, m$

даёт крит. усл. экстремума

## Достаточные условия усл. экстремума

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_{n+m}), \quad \varphi_j(x) \in C_2 \text{ в одн. } E \subset \mathbb{E}_{n+m}$$

$$\sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i = 0 \Rightarrow \left( \Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} \neq 0 \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m} \text{ выражены} \\ \text{через } dx_1, \dots, dx_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow dy = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n \Psi_i(x) dx_i \Rightarrow \begin{pmatrix} dx_1, \dots, dx_n \text{ — независимы} \\ \text{кватрн. независимы} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2y = \sum_{i=1}^n d(\Psi_i(x)) dx_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^{n+m} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} dx_k \right) dx_i$$

$$\Rightarrow d^2y = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \Omega_{ik}(x) dx_i dx_k.$$

Эта  $d^2y$  (кватрн. формула) исследуем на определенность при  $x = x^{(0)}$

Пример.  $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ ,  $x_1, \dots, x_n = c^n$  ( $c > 0$ ) - условие

$$F(x, \lambda) = x_1 + \dots + x_n - \lambda(x_1 \cdot \dots \cdot x_n - c^n)$$

$$\varphi(x) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n - c^n$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial F}{\partial x_i} = 1 - \lambda(x_1 \cdot \dots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_n) \\ 0 = -\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 \cdot \dots \cdot x_n - c^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \cdot \dots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_n = \frac{1}{\lambda} \\ x_1 \cdot \dots \cdot x_n = c^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_i = \lambda c^n \quad \forall i, \quad (\lambda c^n)^n = c^n, \quad \lambda c^n = c, \quad \lambda = c^{1-n}, \quad x_1 = \dots = x_n = c \text{ - кр. точка}$$



Пример.  $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ .  $x_1, \dots, x_n = c^n$  ( $c > 0$ ) - условие

$$F(x, \lambda) = x_1 + \dots + x_n - \lambda(x_1, \dots, x_n - c^n) \quad \varphi(x) = x_1, \dots, x_n - c^n$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial F}{\partial x_i} = 1 - \lambda(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ 0 = -\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1, \dots, x_n - c^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n = \frac{1}{\lambda} \\ x_1, \dots, x_n = c^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_i = \lambda c^n \quad \forall i, \quad (\lambda c^n)^n = c^n, \quad \lambda c^n = c, \quad \lambda = c^{1-n}, \quad x_1 = \dots = x_n = c - \text{кр. точка}$$

$$dy = dx_1 + \dots + dx_n. \quad x_1, \dots, x_n dx_1 + x_1 x_2, \dots, x_n dx_2 + \dots + x_1, \dots, x_{n-1} dx_n = 0$$

$$\frac{c^n}{x_1} dx_1 + \dots + \frac{c^n}{x_n} dx_n = 0 \quad \frac{dx_1}{x_1} + \dots + \frac{dx_n}{x_n} = 0 \Rightarrow dx_n = -x_n \left( \frac{dx_1}{x_1} + \dots + \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} \right)$$

$$dy = dx_1 + \dots + dx_{n-1} - x_n \left( \frac{dx_1}{x_1} + \dots + \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} \right), \quad d^2 y = -dx_n \left( \frac{dx_1}{x_1} + \dots + \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} \right) -$$

$$- x_n d \left( \frac{dx_1}{x_1} + \dots + \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} \right) = x_n \left( \frac{dx_1}{x_1} + \dots + \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} \right)^2 + x_n \left( \frac{dx_1^2}{x_1^2} + \dots + \frac{dx_{n-1}^2}{x_{n-1}^2} \right)$$

$$\Rightarrow d^2 y \Big|_{x_1 = \dots = x_n = c} = \frac{1}{c} \left[ (dx_1 + \dots + dx_{n-1})^2 + (dx_1^2 + \dots + dx_{n-1}^2) \right] - \text{полож. вып.}$$

$$\Rightarrow x_1 = \dots = x_n = c - \text{максимум (условный)}$$

Задача (сделать самим.) Найти экстремумы квадратичной формы  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  ( $a_{ji} = a_{ij}$ ) на единичной сфере (условие:  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ ).

Ответ: ст.т. с.в., множители Лагранжа  $\lambda$  - с.з. матрицы кв. формы