Условный экстремум

$y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$ при условиях

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Условный экстремум

$y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$ при условиях

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Опр. $y = f(x)$, опред. на обл. $E \subset \mathbb{E}_{n+m}$, имеет условный максимум (минимум, стр. макс., стр. мин.) при $x = x^{(0)} \in E$, удовлетворяющей условиям $\varphi_j(x^{(0)}) = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x^{(0)}) : \varphi_j(x) = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$

$$f(x) \leqslant f(x^{(0)}) \quad (\geqslant, <, >)$$

Условный экстремум

$y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$ при условиях

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = 0, \ j = 1, \dots, m.$$

<u>Опр.</u> $y = f(x)$, опред. на обл. $E \subset \mathbb{E}_{n+m}$, имеет условный максимум (минимум, стр. макс., стр. мин.) при $x = x^{(0)} \in E$, удовлетворяющей условиям $\varphi_j(x^{(0)}) = 0$ $(j = 1, \dots, m)$ если $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x^{(0)}) : \varphi_j(x) = 0$ $(j = 1, \dots, m)$

$$f(x) \leqslant f(x^{(0)}) \quad (\geqslant, <, >)$$

$$J\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n+1}} \dots \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n+m}} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} \dots \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{n+1}} \dots \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{n+m}} \end{pmatrix}$$

$f(x), \varphi_j(x) \in C_1$ в E.

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ независимые условия

$$\Rightarrow \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} \neq 0$$

(Перенумерация неизвестных, исключение зависимых условий)

$x_{n+j} = x_{n+j}(x_1, \dots, x_n)$ $(j = 1, \dots, m) \Rightarrow$ безусл. экстр. $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}(x_1, \dots, x_n), \dots, x_{n+m}(x_1, \dots, x_n))$

Явных формул $x_{n+j} = x_{n+j}(x_1, \dots, x_n)$ как правило, нет.

$y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$. $dy = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0$ (необх. усл. инвар. 1-го диф.)

$x_1, \ldots, x_{n+m}$ – завис. перем. $\not\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \ (i = 1, \ldots, n+m)$

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, x_{n+m}(x_1, \ldots, x_n)) = 0$$
$$(j = 1, \ldots, m)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i = 0 \ (j = 1, \ldots, m) \Rightarrow \sum_{i=n+1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i$$

$\Delta = \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})} \neq 0 \Rightarrow dx_{n+1}, \ldots, dx_{n+m}$ выражаем явно через $dx_1, \ldots, dx_n$ (Крамер)

$$0 = dy = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(x) dx_i \Rightarrow \begin{cases} \Psi_i(x) = 0, \ i = 1, \ldots, n & \text{(нез. перем)} \\ \varphi_j(x) = 0, \ j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Получена с-ма $n+m$ ур-ний с $n+m$ неизвестными $(x_1, \ldots, x_{n+m})$ для определения критических точек.

$$\sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i = 0 \Rightarrow \lambda_j \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad j = 1, \ldots, m$$

$$dy = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \ldots - \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \right) dx_i = 0$$

В искомой крит. точке $x^{(0)}$ рассмотрим с-му уравнений:

$$\lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = n+1, \ldots, n+m$$

$$\Delta = \left. \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})} \right|_{x = x^{(0)}} \neq 0 \Rightarrow \exists \text{ и ед. решение } \lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)}$$

Т.е. при $x = x^{(0)}$ $\lambda_1^{(0)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m^{(0)} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = n+1, \ldots, n+m$

Подставим $\lambda_j^{(0)}$. Тогда при $x = x^{(0)}$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{n \text{ (а не } n+m)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_1^{(0)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} - \ldots - \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \right) dx_i = 0 \Rightarrow$$ ($dx_1, \ldots dx_n$ – диффер-лы <u>незав.</u> перем.)

$$\lambda_1^{(0)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(x^{(0)}) + \ldots + \lambda_m^{(0)} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}), \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(0)} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}); \; i = 1, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m; \; \varphi_j(x^{(0)}) = 0; \; j = 1, \ldots, m$$

Итак, для нахождения крит. точек $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_{n+m}^{(0)})$ и множителей Лагранжа $\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_m^{(0)}$ (необх. усл. экстремума) надо решить с-му ур-ний:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \; i = 1, \ldots, n, n+1, \ldots, n+m \\ \varphi_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n+m}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx_i=0 \Rightarrow \lambda_j\sum_{i=1}^{n+m}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx_i=0 \quad j=1,\dots,m$$

$$dy=\sum_{i=1}^{n+m}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}-\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}-\dots-\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}\right)dx_i=0$$

В искомой крит. точке $x^{(0)}$ рассмотрим с-му уравнений:

$$\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}+\dots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i},\quad i=n+1,\dots,n+m$$

$$\Delta=\left.\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_m)}{D(x_{n+1},\dots,x_{n+m})}\right|_{x=x^{(0)}}\neq 0 \Rightarrow \exists \text{ и ед. решение } \lambda_1^{(0)},\dots,\lambda_m^{(0)}$$

Т.е. при $x=x^{(0)}$ $\lambda_1^{(0)}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}+\dots+\lambda_m^{(0)}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i},\quad i=n+1,\dots,n+m$

Подставим $\lambda_j^{(0)}$. Тогда при $x=x^{(0)}$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{n\ (\text{а не } n+m)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}-\lambda_1^{(0)}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}-\dots-\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}\right)dx_i=0 \Rightarrow (dx_1,\dots dx_n - \text{диффы } \underline{\text{незав.}} \text{ перем.})$$

$$\lambda_1^{(0)}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(x^{(0)})+\dots+\lambda_m^{(0)}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}(x^{(0)})=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}),\quad i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m}\lambda_j^{(0)}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x^{(0)})=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)});\ i=1,\dots,n,n+1,\dots,n+m;\ \varphi_j(x^{(0)})=0;\ j=1,\dots,m$$

Итак, для нахождения крит. точек $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\dots,x_{n+m}^{(0)})$ и множителей Лагранжа $\lambda_1^{(0)},\dots,\lambda_m^{(0)}$ (необх. усл. экстремума) надо решить с-му ур-ний:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), & i=1,\dots,n,n+1,\dots,n+m\\ \varphi_j(x)=0, & j=1,\dots,m\end{cases}$$

Для запоминания: функция $n+2m$ независимых перем. (функция Лагранжа):

$$F(x,\lambda)=F(x_1,\dots,x_{n+m},\lambda_1,\dots,\lambda_m)=f(x)-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_j(x).$$

Тогда $dF=0$, т.е. $\frac{\partial F}{\partial x_i}=0=-\frac{\partial F}{\partial \lambda_j}$, $i=1,\dots,n+m;\ j=1,\dots,m$

даёт необх. усл. экстремума

Достаточные условия усл. экстремума

$f(x) = f(x_1, \dots, x_{n+m})$, $\varphi_j(x) \in C_2$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_{n+m}$

$$\sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx_i = 0 \Rightarrow \left(\Delta = \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{D(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} \neq 0\right) \Rightarrow \left(\begin{matrix} dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m} \text{ выражены} \\ \text{через } dx_1, \dots, dx_n \end{matrix}\right)$$

$$\Rightarrow dy = \sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(x)\, dx_i \Rightarrow \left(\begin{matrix} dx_1, \dots, dx_n \text{ — дифф-лы} \\ \underline{\text{независ.}} \text{ переменных} \end{matrix}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 y = \sum_{i=1}^{n} d\left(\Psi_i(x)\right) dx_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n+m} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} dx_k\right) dx_i$$

$$\Rightarrow d^2 y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Omega_{ik}(x)\, dx_i dx_k.$$

Этот $d^2 y$ (квад. форму) исследуем на определённость при $x = x^{(0)}$

Пример. $y=f(x)=f(x_1,\dots,x_n)=x_1+\dots+x_n$. $\quad x_1\cdot\ldots\cdot x_n=c^n$ $(c>0)$ - условие

$F(x,\lambda)=x_1+\dots+x_n-\lambda(x_1\cdot\ldots\cdot x_n-c^n)$ $\qquad \varphi(x)=x_1\cdot\ldots\cdot x_n-c^n$

$$\begin{cases} 0=\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=1-\lambda(x_1\cdot\ldots\cdot x_{i-1}\cdot x_{i+1}\cdot\ldots\cdot x_n) \\ 0=-\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x_1\cdot\ldots\cdot x_n-c^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1\cdot\ldots\cdot x_{i-1}\, x_{i+1}\cdot\ldots\cdot x_n=\dfrac{1}{\lambda} \\ x_1\cdot\ldots\cdot x_n=c^n \end{cases}$$

$\Rightarrow x_i=\lambda c^n \ \forall i,\ (\lambda c^n)^n=c^n,\ \lambda c^n=c,\ \lambda=c^{1-n},\ x_1=\ldots=x_n=c$ - кр. точка

Пример. $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$. $\quad x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = c^n \quad (c>0)$ – условие

$F(x,\lambda) = x_1 + \dots + x_n - \lambda(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n - c^n) \qquad \varphi(x) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n - c^n$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 1 - \lambda(x_1 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_n) \\ 0 = -\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n - c^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} x_{i+1} \cdot \ldots \cdot x_n = \dfrac{1}{\lambda} \\ x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = c^n \end{cases}$$

$\Rightarrow x_i = \lambda c^n \ \forall i, \ (\lambda c^n)^n = c^n, \ \lambda c^n = c, \ \lambda = c^{1-n}, \ x_1 = \dots = x_n = c$ – кр. точка

$dy = dx_1 + \dots + dx_n$. $\quad x_2 \cdot \ldots \cdot x_n dx_1 + x_1 x_3 \cdot \ldots \cdot x_n dx_2 + \dots + x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} dx_n = 0$

$\dfrac{c^n}{x_1} dx_1 + \dots + \dfrac{c^n}{x_n} dx_n = 0 \quad \dfrac{dx_1}{x_1} + \dots + \dfrac{dx_n}{x_n} = 0 \Rightarrow dx_n = -x_n\left(\dfrac{dx_1}{x_1} + \dots + \dfrac{dx_{n-1}}{x_{n-1}}\right)$

$dy = dx_1 + \dots + dx_{n-1} - x_n\left(\dfrac{dx_1}{x_1} + \dots + \dfrac{dx_{n-1}}{x_{n-1}}\right)$, $d^2y = -dx_n\left(\dfrac{dx_1}{x_1} + \dots + \dfrac{dx_{n-1}}{x_{n-1}}\right) -$

$- x_n d\left(\dfrac{dx_1}{x_1} + \dots + \dfrac{dx_{n-1}}{x_{n-1}}\right) = x_n\left(\dfrac{dx_1}{x_1} + \dots + \dfrac{dx_{n-1}}{x_{n-1}}\right)^2 + x_n\left(\dfrac{dx_1^2}{x_1^2} + \dots + \dfrac{dx_{n-1}^2}{x_{n-1}^2}\right)$

$\Rightarrow d^2y\Big|_{x_1 = \dots = x_n = c} = \dfrac{1}{c}\left[(dx_1 + \dots + dx_{n-1})^2 + (dx_1^2 + \dots + dx_{n-1}^2)\right]$ – полож. опр.

$\Rightarrow x_1 = \dots = x_n = c$ – минимум (условный)

Задача (сделать самост.) Найти экстремум квадратичной формы $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ $(a_{ji}=a_{ij})$ на единичной сфере (условие: $x_1^2+\dots+x_n^2=1$).

Ответ: стац. т.: с. в., множители Лагранжа λ – с. ч. матрицы кв. формы