
Раздел 1.

Линейная алгебра.

Лекция №3

Решение систем линейных уравнений.

План

- Матричная запись системы линейных уравнений.
- Решение системы линейных уравнений матричным методом.
- Правило Крамера. Система двух уравнений с двумя неизвестными.
- Однородная система двух уравнений первой степени с тремя неизвестными.
- Система трех уравнений первой степени с тремя неизвестными.
- Теорема Кронекера-Капелли.
- Метод Гаусса.

Применяя правило умножения матриц система (1) может быть записана в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Или кратко:

$$A * X = B. \quad (2)$$

Пример: Записать в матричной форме систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5, \\ 3x_2 + x_3 &= 9, \\ x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 120 \\ 031 \\ 012 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Данная система линейных уравнений в матричной форме запишется так:

$$\begin{pmatrix} 120 \\ 031 \\ 012 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

П.2 Решение системы линейных уравнений матричным методом

Умножим левую и правую части равенства (2) слева на матрицу A^{-1} , получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Но

$$A^{-1} \cdot A = E, \quad E \cdot X = X.$$

Поэтому первоначальное равенство можем записать в виде:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Или в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + b_3 A_{23} \\ b_1 A_{13} + b_2 A_{32} + b_3 A_{33} \end{pmatrix}$$

Приравнивая члены матриц, стоящих слева и справа, получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31}}{\Delta} \\ x_2 &= \frac{b_1 A_{21} + b_2 A_{22} + b_3 A_{32}}{\Delta} \\ x_3 &= \frac{b_1 A_{13} + b_2 A_{23} + b_3 A_{33}}{\Delta} \end{aligned} \right\}$$

Пример: Решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5, \\ 3x_2 + x_3 &= 9, \\ x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned} \right.$$

матричным методом.

Решение. 1) Найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 120 \\ 031 \\ 012 \end{vmatrix} = 5$$

2) Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

3) Матрица B: $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

Решение в матричной форме запишется так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - \frac{4}{5} \cdot 9 + \frac{2}{5} \cdot 8 \\ 0 \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 9 - \frac{1}{5} \cdot 8 \\ 0 \cdot 5 - \frac{1}{5} \cdot 9 + \frac{3}{5} \cdot 8 \end{pmatrix}$$

4) Таким образом приравнивая строки матриц, стоящих слева и справа, получаем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

П.3 Правило Крамера. Решение систем линейных уравнений

Рассмотрим систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными x и y :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2 \end{cases}$$

Решим эту систему. Для этого почленно умножим первое уравнение на a_{22} , второе на $(-a_{12})$ и сложим полученные уравнения:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = c_1a_{22} - c_2a_{12}. \quad (*)$$

Аналогично, почленно умножая первое уравнение на $(-a_{21})$, второе на a_{11} и складывая, получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = c_2a_{11} - c_1a_{21}. \quad (**)$$

Но на основании формулы вычисления определителя 2 порядка можно написать

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad c_1a_{22} - c_2a_{12} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad c_2a_{11} - c_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}$$

Сокращенно эти определители обозначаются так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}$$

Определитель Δ , составленный из коэффициентов при неизвестных системы, называется определителем системы. Определитель Δ_x (или Δ_y) получается из определителя системы Δ , если в нем коэффициенты a_{11} и a_{21} (или a_{12} и a_{22}) при неизвестном x (или y) заменить свободными членами c_1 и c_2 .

Принимая это во внимание уравнения (*) и (**) можно записать в виде:

$$\Delta \cdot x = \Delta_x, \quad \Delta \cdot y = \Delta_y.$$

Если $\Delta \neq 0$, то отсюда получаем, что исходная система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

данные формулы называются формулами Крамера.

Замечание. Если определитель равен нулю, то система или не имеет решений (т.е. несовместна) или имеет бесконечно много решений (т.е. система неопределена).

Замечание. Если определитель системы $\Delta = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = 0$, т. е. $a_{11} a_{22} = a_{21} a_{12}$. В этом случае коэффициенты при неизвестных одного уравнения пропорциональны коэффициентам при неизвестных другого уравнения.

Здесь возможны два подслучая.

1) Оба определителя Δ_x и Δ_y равны нулю.

$$\begin{aligned}\Delta_x &= c_1 a_{22} - c_2 a_{12} = 0, \\ \Delta_y &= c_2 a_{11} - c_1 a_{21} = 0\end{aligned}$$

В таком случае исходная система имеет бесчисленное множество решений.

2) Хотя бы один из определителей Δ_x и $\Delta_y \neq 0$. Тогда система не имеет решения.

Пример 1. Решить систему
$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x - 5y = 2 \end{cases}$$

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -22$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -41$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -24$

т. к. определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение:

$$x = \Delta_x / \Delta = 41/22$$

$$y = \Delta_y / \Delta = 24/22 = 12/11.$$

Геометрически это означает, что прямые, заданные уравнениями $2x+3y=7$ и $4x-5y=2$, пересекаются в точке $(41/22, 12/11)$.

П.4 Однородная система двух уравнений первой степени с тремя неизвестными

Однородная система Двух уравнений с тремя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{cases}$$

Все решения данной системы определяются по формулам:

$$x = k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad y = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \quad z = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (*)$$

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ 4x + 2y - 6z = 0 \end{cases}$$

Применяя формулы (*), получим:

$$x = k \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -28k \quad y = k \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 32k \quad z = k \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -8k$$

Итак все решения системы задаются уравнениями $x=-28k$, $y=32k$, $z=-8k$.

Придавая k конкретные числовые значения, получим различные решения системы.

Так например, при $k = 1$ имеем: $x = -28$, $y = 32$, $z = -8$ и т. д.

П.5 Система трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

Рассмотрим систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases}$$

Предполагая, что определитель системы не равен нулю и

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

находим

$$x = \Delta_x / \Delta, \quad y = \Delta_y / \Delta, \quad z = \Delta_z / \Delta \quad (**)$$

Аналогичные формулы имеют место для систем уравнений первой степени с большим числом неизвестных.

Пример. Решить систему
$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -24$$

по формулам (**) находим

$$x = -8 / -8 = 1, \quad y = -16 / -8 = 2, \quad z = -24 / -8 = 3.$$

Теорема Кронекера – Капелли. Система линейных уравнений совместна, тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы B , причем в случае совместности система является определенной, когда ранг матрицы A равен числу неизвестных.

Пример.
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение. Ранг матрицы равен 2, отсюда следует, что система совместна, но неопределенна. Последнее уравнение можно отбросить.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = -3x_3 - x_4 + 6, \\ 3x_1 + 5x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 4. \end{cases} \quad x_1 = -\frac{2 - x_3 - 9x_4}{11} \quad x_2 = -\frac{5x_3 - x_4 - 10}{11}$$

Замечание. Система имеет решения, если ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы B . Система не имеет решений, если ранг матрицы A меньше ранга B . Если ранг матрицы A и ранг B равен 3, то система имеет единственное решение. Если ранг матрицы A и B равен 2, то система имеет бесчисленное множество решений, при этом два неизвестных выражаются через третье, которое имеет произвольное значение. Если ранг матриц A и B равен 1, то система имеет бесчисленное множество решений, при этом два неизвестных имеют произвольные значения, а третье выражается через них.

Вопросы для контроля

1. Матричная запись системы линейных уравнений.
2. Решение системы линейных уравнений матричным методом.
3. Правило Крамера.
4. Теорема Кронекера-Капелли.
5. Метод Гаусса.

Литература

1. Привалов И.И. Аналитическая геометрия, М: Гос. изд-во Юрайт, 2017.
2. Егоров В.В., Мустафина Л.М., Абаева Н.Ф., Головачёва В.Н. Математика. Часть I (для студентов горного профиля), изд-во КарГТУ, 2015.
3. Мустафина Л.М. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 1: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2016.
4. Мустафина Л.М. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 2: Введение в математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2017.
5. Мустафина Л.М., Абаева Н.Ф. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 3: Функции многих переменных. Кратные интегралы. Дифференциальные уравнения. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2017.
6. Мустафина Л.М., Абаева Н.Ф. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 4: Ряды. Элементы теории вероятностей и математической статистики. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2018.

7. Мустафина Л.М., Швейдель А.П. Индивидуальные задания для СРС и СРСП по математике для студентов технических специальностей. Часть II, Изд-во КарГТУ, Караганда, 2010.

8. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии, Спб.: Лань, 2019.

9. Рябушко А.П., Индивидуальные задания по высшей математике: Т-1,2, 3, Минск: Высшая школа, 2013.

10. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах, т.1-2., М.: Мир и образование, 2016.

11. Берман Н.Г. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие, Спб.: Лань, 2019.

12. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу, Спб.: Лань, 2010.

13. Демидович Б.П. и др., Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов: Учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений, М.: Транспортная компания, 2016.

Список дополнительной литературы

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: т.1-3. Спб.: Лань, 2018.

2. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами, М.: Айрис-пресс, 2013.