Раздел 1.
Линейная алгебра.

Лекция №3
Решение систем линейных уравнений.

План

- **Матричная запись системы линейных уравнений.**
- **Решение системы линейных уравнений матричным методом.**
- **Правило Крамера. Система двух уравнений с двумя неизвестными.**
- **Однородная система двух уравнений первой степени с тремя неизвестными.**
- **Система трех уравнений первой степени с тремя неизвестными.**
- **Теорема Кронекера-Капелли.**
- **Метод Гаусса.**

П.1 Матричная запись системы линейных уравнений

Пусть имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (1)$$

Рассмотрим три матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Применяя правило умножения матриц система (1) может быть записана в матричной форме:

Применяя правило умножения матриц система (1) может быть записана в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Или кратко:

A*X=B. (2)

Пример: Записать в матричной форме систему уравнений

$$x_1 + 2x_2 = 5,$$
$$3x_2 + x_3 = 9,$$
$$x_2 + 2x_3 = 8$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 120 \\ 031 \\ 012 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Данная система линейных уравнений в матричной форме запишется так:

$$\begin{pmatrix} 120 \\ 031 \\ 012 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

П.2 Решение системы линейных уравнений матричным методом

Умножим левую и правую части равенства (2) слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Но

$$A^{-1} \cdot A = E, \qquad E \cdot X = X.$$

Поэтому первоначальное равенство можем записать в виде:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Или в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + b_3 A_{23} \\ b_1 A_{13} + b_2 A_{32} + b_3 A_{33} \end{pmatrix}$$

Приравнивая члены матриц, стоящих слева и справа, получаем:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31}}{\Delta} \\ x_2 &= \frac{b_1 A_{21} + b_2 A_{22} + b_3 A_{32}}{\Delta} \\ x_3 &= \frac{b_1 A_{13} + b_2 A_{23} + b_3 A_{33}}{\Delta} \end{aligned}\right\}$$

Пример: Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 3x_2 + x_3 = 9, \\ x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

матричным методом.

Решение. 1) Найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

2) Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

3) Матрица B: $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

Решение в матричной форме запишется так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - \frac{4}{5} \cdot 9 + \frac{2}{5} \cdot 8 \\ 0 \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 9 - \frac{1}{5} \cdot 8 \\ 0 \cdot 5 - \frac{1}{5} \cdot 9 + \frac{3}{5} \cdot 8 \end{pmatrix}$$

4) Таким образом приравнивая строки матриц, стоящих слева и справа, получаем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

П.3 Правило Крамера. Решение систем линейных уравнений

Рассмотрим систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2 \end{cases}$$

Решим эту систему. Для этого почленно умножим первое уравнение на a_{22}, второе на ($- a_{12}$) и сложим полученные уравнения:

$$(a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12})x = c_1 a_{22} - c_2 a_{12}. \qquad (*)$$

Аналогично, почленно умножая первое уравнение на ($-a_{21}$), второе на a_{11} и складывая, получим

$$(a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})y = c_2 a_{11} - c_1 a_{21}. \qquad (**)$$

Но на основании формулы вычисления определителя 2 порядка можно написать

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} \qquad c_1 a_{22} - c_2 a_{12} = \begin{vmatrix} c_1 a_{12} \\ c_2 a_{22} \end{vmatrix} \qquad c_{11} a_{11} - c_2 a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} c_1 \\ a_{21} c_2 \end{vmatrix}$$

Сокращенно эти определители обозначаются так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 a_{12} \\ c_2 a_{22} \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} c_1 \\ a_{21} c_2 \end{vmatrix}$$

Определитель Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных системы, называется определителем системы. Определитель Δ_x (или Δ_y) получается из определителя системы Δ, если в нем коэффициенты a_{11} и a_{21} (или a_{12} и a_{22}) при неизвестном x (или y) заменить свободными членами c_1 и c_2.

Принимая это во внимание уравнения (*) и (**) можно записать в виде:

$$\Delta \bullet x = \Delta_x , \quad \Delta \bullet y = \Delta_y .$$

Если $\Delta \neq 0$, то отсюда получаем, что исходная система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

данные формулы называются формулами Крамера.

<u>Замечание.</u> Если определитель равен нулю, то система или не имеет решений (т.е. несовместна) или имеет бесконечно много решений (т.е. система неопределена).

Замечание. Если определитель системы $\Delta = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = 0$, т. е. $a_{11} a_{22} = a_{21} a_{12}$. В этом случае коэффициенты при неизвестных одного уравнения пропорциональны коэффициентам при неизвестных другого уравнения.

Здесь возможны два подслучая.

1) Оба определителя Δ_x и Δ_y равны нулю.

$$\Delta_x = c_1 a_{22} - c_2 a_{12} = 0,$$
$$\Delta_y = c_2 a_{11} - c_1 a_{21} = 0$$

В таком случае исходная система имеет бесчисленное множество решений.

2) Хотя бы один из определителей Δ_x и $\Delta_y \neq 0$. Тогда система не имеет решения.

Пример 1. Решить систему $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x - 5y = 2 \end{cases}$

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -22$ $\quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -41$ $\quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -24$

т. к. определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение:

$x = \Delta_x / \Delta = 41/22$

$y = \Delta_y / \Delta = 24/22 = 12/11.$

Геометрически это означает, что прямые, заданные уравнениями $2x+3y=7$ и $4x-5y=2$, пересекаются в точке $(41/22, 12/11)$.

П.4 Однородная система двух уравнений первой степени с тремя неизвестными

Однородная система Двух уравнений с тремя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{cases}$$

Все решения данной системы определяются по формулам:

$$x = k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad y = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad z = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (*)$$

<u>Пример.</u> Решить систему
$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ 4x + 2y - 6z = 0 \end{cases}$$

Применяя формулы (*), получим:

$$x = k\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -28k \qquad y = k\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 32k \qquad z = k\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -8k$$

Итак все решения системы задаются уравнениями x=-28k, y=32k, z=-8k.
Придавая k конкретные числовые значения, получим различные решения системы.
Так например, при k = 1 имеем: x = -28, y = 32, z = -8 и т. д.

П.5 Система трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

Рассмотрим систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases}$$

Предполагая, что определитель системы не равен нулю и

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

находим

$$x = \Delta_x / \Delta, \quad y = \Delta_y / \Delta, \quad z = \Delta_z / \Delta \qquad (**)$$

Аналогичные формулы имеют место для систем уравнений первой степени с большим числом неизвестных.

Пример. Решить систему
$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -24$$

по формулам (**) находим

$x = -8 / -8 = 1$, $y = -16 / -8 = 2$, $z = -24 / -8 = 3$.

П.6 Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим вопрос об исследовании системы линейных уравнений общего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n, \end{cases}$$

где число уравнений m может и не равняться числу неизвестных n. Системы могут быть совместимыми, определенными, неопределенными и несовместимыми.

Составим матрицу из коэффициентов или матрицу системы и матрицу полученную путем присоединения к А столбца свободных членов, расширенную.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

Теорема Кронекера – Капелли. Система линейных уравнений совместна, тогда и только тогда, когда ранг матрицы А равен рангу расширенной матрицы В, причем в случае совместности система является определенной, когда ранг матрицы А равен числу неизвестных.

Пример.
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение. Ранг матрицы равен 2, отсюда следует, что система совместна, но неопределенна. Последнее уравнение можно отбросить.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = -3x_3 - x_4 + 6, \\ 3x_1 + 5x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 4. \end{cases} \qquad x_1 = -\frac{2 - x_3 - 9x_4}{11} \qquad x_2 = -\frac{5x_3 - x_4 - 10}{11}$$

Замечание. ***Система имеет решения, если ранг матрицы А равен рангу расширенной матрицы В. Система не имеет решений, если ранг матрицы А меньше ранга В. Если ранг матрицы А и ранг В равен 3, то система имеет единственное решение. Если ранг матрицы А и В равен 2, то система имеет бесчисленное множество решений, при этом два неизвестных выражаются через третье, которое имеет произвольное значение. Если ранг матриц А и В равен 1, то система имеет бесчисленное множество решений, при этом два неизвестных имеют произвольные значения, а третье выражается через них.***

П. 6 Метод Гаусса

Рассмотрим систему *n* линейных уравнений с *n неизвестными:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_{n,n+1}. \end{cases} \qquad (1)$$

У коэффициента a_{ij} первый индекс обозначает номер уравнения, а второй – номер неизвестного.

Пусть для определенности a_{11} не равен нулю «ведущий коэффициент». Разделив все члены первого уравнения на a_{11}, будем иметь приведенное уравнение

$$x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha x_n = \alpha_{1,n+1} \qquad (2)$$

где

$$\alpha_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} (j = 1,2,\ldots,n+1) \qquad (3)$$

Рассмотрим *i-е* уравнение системы (1):

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = a_{i,n+1} \qquad (4)$$

Для исключения x_1 из этого уравнения умножим приведенное уравнение (2) на a_{i1} и полученное уравнение вычтем из уравнения (4). Тогда получим:

$$a_{i2}^{(1)} x_2 + .. + a_{in}^{(1)} x_n = a_{i,n+1}^{(1)} \qquad (5)$$

где

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}\alpha_{1j} \, (j = 2,3,...,n+1) \qquad (6)$$

Таким образом получаем укороченную систему

$$\left.\begin{array}{l} a_{22}^{(1)} x_2 + ... + a_{2n}^{(1)} x_n = a_{2,n+1}^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n2}^{(1)} x_2 + ... + a_{nn}^{(1)} x_n = a_{n,n+1} \end{array}\right\} \qquad (7)$$

коэффициенты которой определяются по формулам (6).
Если ее ведущий коэффициента $a_{22}^{(1)} \neq 0$, то из системы (7) можно исключить неизвестное x_2 , причем новые коэффициенты будут вычисляться по формулам типа (6) и т.д. Эта часть вычислений называется прямым ходом метода Гаусса.

Для определения неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ рассмотрим приведенные уравнения

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n &= \alpha_{1,n+1} \\ x_2 + \alpha_{2n}^{(1)}x_n &= \alpha_{2,n+1}^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \alpha_{n,n+1}^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Отсюда последовательно находим неизвестные (обратный ход)

$$\left.\begin{aligned} & x_n = \alpha_{n,n+1}^{(n-1)}, \\ & x_{n-1} = \alpha_{n-1,n+1}^{(n-2)} - \alpha_{n-1,n}^{(n-2)} x_n, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & x_1 = \alpha_{1,n+1} - \alpha_{1n}x_n - \ldots - \alpha_{1,n-1}x_{n-1} - \ldots - \alpha_{i2}x_2 \end{aligned}\right\}$$

Операции (9) выполняются без деления.

Если очередной ведущий коэффициент окажется равным нулю, то уравнения системы следует переставить надлежащим образом. Возможно, что система (1) несовместна, тогда метод Гаусса не допускает реализации.

Вопросы для контроля

1. Матричная запись системы линейных уравнений.
2. Решение системы линейных уравнений матричным методом.
3. Правило Крамера.
4. Теорема Кронекера-Капелли.
5. Метод Гаусса.

Литература

1. Привалов И.И. Аналитическая геометрия, М: Гос. изд-во Юрайт, 2017.
2. Егоров В.В., Мустафина Л.М., Абаева Н.Ф., Головачёва В.Н. Математика. Часть I (для студентов горного профиля), изд-во КарГТУ, 2015.
3. Мустафина Л.М. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 1: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2016.
4. Мустафина Л.М. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 2: Введение в математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2017.
5. Мустафина Л.М., Абаева Н.Ф. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 3: Функции многих переменных. Кратные интегралы. Дифференциальные уравнения. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2017.
6. Мустафина Л.М., Абаева Н.Ф. Высшая математика для студентов технических специальностей. Часть 4: Ряды. Элементы теории вероятностей и математической статистики. Изд-во КарГТУ, Караганда, 2018.

7. Мустафина Л.М., Швейдель А.П. Индивидуальные задания для СРС и СРСП по математике для студентов технических специальностей. Часть II, Изд-во КарГТУ, Караганда, 2010.

8. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии, Спб.: Лань, 2019.

9. Рябушко А.П., Индивидуальные задания по высшей математике: Т-1,2, 3, Минск: Высшая школа, 2013.

10. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах, т.1-2., М.: Мир и образование, 2016.

11. Берман Н.Г. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие, Спб.: Лань, 2019.

12. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу, Спб.: Лань, 2010.

13. Демидович Б.П. и др., Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: Учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений, М.: Транспортная компания, 2016.

Список дополнительной литературы

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: т.1-3. Спб.: Лань, 2018.

2. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами, М.: Айрис-пресс, 2013.