Ряды

# Лекция 4: Ряды Тейлора. Применение степенных рядов

- Разложение функций в степенные ряды.
- Ряды Тейлора
- Приложения степенных рядов

## 3.3. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Ряд, полученный почленным дифференцированием (интегрированием) степенного ряда, имеет тот же интервал сходимости и его сумма внутри интервала сходимости равна производной (интегралу) от суммы первоначального ряда.

Если $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, то

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}, \quad \int_a^x S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-x_0)^{n+1}}{n+1}, \qquad -R<x-x_0<R.$$

## 3.4. Разложение функций в степенные ряды

Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале $|x - x_0| < R$, то есть

$$x_0 - R < x < x_0 + R$$

может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots,$$

если в этом интервале выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0,$$

где $R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора (остаток ряда),

$$c = x_0 + \Theta(x - x_0),\ 0 < \Theta < 1.$$

При $x_0 = 0$ получим ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

**Теорема 1**

Для того чтобы ряд Тейлора функции $f(x)$ сходился к $f(x)$ в точке $x$, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $R_n(x)$ удовлетворял условию:

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

**Теорема 2 (достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора)**

Если в некотором интервале, содержащем точку $x_0$, при любом $n$ выполняется неравенство

$$\left|f^{(n)}(x)\right| < M,$$

где $M$ — положительная постоянная, то

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

и $f(x)$ разложима в ряд Тейлора.

## Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Рассмотрим разложения в ряд Тейлора некоторых элементарных функций.

1. $f(x)=\sin x$.

Данная функция имеет производные любого порядка, причем

$$\left|(\sin x)^{(n)}\right|=\left|\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|\le 1,\ \ n=0,\,1,\,2,\,\ldots,\ \ x\in(-\infty;+\infty).$$

$$f(x)=\sin x,\ \ f(0)=0,$$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ \ f'(0)=1,$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \ f''(0)=1,$$

$$f'''(x)=-\cos x=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \ f'''(0)=-1,\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \ f^{(n)}(0)=\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Ряд будет иметь вид

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\ \ -\infty<x<+\infty. \quad (3.6)$$

2. $f(x) = \cos x$.

Заметим, что $\cos x = (\sin x)'$. Продифференцируем ряд (3.6) и получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

3. $f(x)=e^x$.

Данная функция имеет производные всех порядков на интервале $(-a;a)$, где $a>0$ — любое число, причем $\left|f^{(n)}(x)\right|=e^x<e^a$, $(n=0,1,2,\ldots)$. Так как $f^{(n)}(0)=e^0=1$, то получаем ряд

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ -\infty<x<+\infty.$$

4. $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Данную функцию можно представить следующим образом

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots.$$

Тогда

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots)dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

Область сходимости: $-1 \le x \le 1$.

5. $f(x)=\ln x$.

Разложим в ряд по степеням $(x-1)$.

Заметим, что $\dfrac{1}{x}=(\ln x)'$.

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1+(x-1)}$ — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=-(x-1)$.

$$\frac{1}{x}=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\ldots+(-1)^n(x-1)^n+\ldots. \tag{3.7}$$

Область сходимости: $|q|<1 \Rightarrow |x-1|<1 \Rightarrow 0<x<2$.

Интегрируем почленно ряд (3.7)

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \left[ t - \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(t-1)^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{(t-1)^{n+1}}{n+1} + \ldots \right] \Bigg|_1^x .$$

Итак,

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \ldots (-1)^{n-1} \frac{1}{n}(x-1)^n + \ldots,\ 0 < x \le 2.$$

6. $f(x) = \ln(x+1)$.

Заметим, что

$$(\ln(x+1))' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,\ \ -1 < x < 1.$$

Проинтегрируем

$$\int_0^x \frac{dt}{t+1} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \ldots)dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Итак,

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots,\ \ -1 < x \le 1.$$

7. $f(x)=(1+x)^m$, $m$ — любое действительное число.

Вычислим производные:

$$f(x)=(1+x)^m,\quad (0)=1,$$

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1},\quad f'(0)=m,$$

$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},\quad f(0)=m(m-1),\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots.(m-(n-1))(1+x)^{m-n},\quad f^{(n)}(0)=m(m-1)\ldots(m-(n-1)).$$

Составим ряд

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n+\ldots.$$

Найдем область сходимости по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n)x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))x^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(n-m)}{n+1}\right| = |x|,$$

$$|x|<1 \Rightarrow -1<x<1.$$

При $m \geq 0 \quad -1<x<1$;

при $-1<m<0 \quad -1<x\leq 1$;

при $m \leq -1 \quad -1<x<1$.

8. $f(x)=\operatorname{sh}x$, $f(x)=\operatorname{ch}x$.

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ -\infty<x<\infty.$$

$$\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!}+\ldots,\quad -\infty<x<\infty.$$

**Пример.** Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x-5}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-6)$.

*Решение*

Разложить в ряд Тейлора — это значит:

1. Составить формально этот ряд.
2. Найти его область сходимости.
3. Доказать, что для всех $x$ из области сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

1. Вычислим производные

$$y = \frac{1}{x-5},\ y(6) = 1,$$

$$y' = -\frac{1}{(x-5)^2}, y'(6) = -1,$$

$$y'' = \frac{2}{(x-5)^3}, y''(6) = 2!,$$

$$y''' = -\frac{2 \cdot 3}{(x-5)^4}, y'''(6) = -3!,$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-5)^{n+1}}, y^{(n)}(6) = (-1)^n n!.$$

Составим формально ряд

$$\frac{1}{x-5}=1+\frac{-1}{1!}(x-6)+\frac{2!}{2!}(x-6)^2-\frac{3!}{3!}(x-6)^3+\ldots=\sum_{n}^{\infty}(-1)^n(x-6)^n.$$

Остаточный член будет иметь вид

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ c=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1;$$

$$R_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(c-5)^{n+2}(n+1)!}(x-6)^{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}(x-6)^{n+1}}{(c-5)^{n+2}},\ c=6+\theta(x-6).$$

2. Найдем область сходимости ряда. Используем признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-6)^{n+1}}{(x-6)^n}\right| = |x-6| < 1, \quad 5 < x < 7.$$

Пусть $x = 5$, тогда получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-1)^n = 1+1+\ldots$, который расходится.

Пусть $x = 7$, тогда получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, который также расходится.

Область сходимости ряда: $x \in (5;7)$.

3. Докажем, что для всех $x$ из области сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$

Для всех $x \in (5;7)$ имеем

$c - 5 > 1,\ |x - 6| < 1,$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-6)^{n+1}}{(c-5)^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{c-5}\left(\frac{x-6}{c-5}\right)^{n+1} = 0.$$

Итак,

$$\frac{1}{x-5} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-6)^n, \quad x \in (5;7).$$

## Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^{n-1}}$.

*Ответ.* На промежутке $[-4;0)$ заданный ряд сходится, радиус сходимости $R=2$.

2. Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

*Ответ.* Область сходимости степенного ряда $(-1;1)$, радиус сходимости $R=1$.

3. Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.

*Ответ*. Ряд сходится абсолютно в каждой точке числовой прямой $(-\infty;\infty)$.

4. Разложить функцию $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0=0$.

*Ответ*. $1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{(2n)!!}x^{2n}$.

5. Разложить функцию $f(x)=\sin^2 x$ в степенной ряд.

*Ответ*. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}\cdot x^{2n}}{(2n)!}$.

5. Разложить функцию $f(x) = \sin^2 x$ в степенной ряд.

*Ответ.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$.

6. Разложить функцию $f(x) = \ln(3 - x)$ в ряд Маклорена.

*Ответ.* $\ln 3 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{3^{n+1} \cdot (n+1)}$.

# 4. Приложения степенных рядов

## 4.1. Приближенные вычисления значений функции

Для вычисления приближенного значения функции $f(x)$ в ее разложении в степенной ряд сохраняют первые $n$ членов ($n$ — конечная величина), а остальные члены отбрасывают. Для оценки погрешности найденного приближенного значения нужно оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $|R_n| < |u_{n+1}|$, где $u_{n+1}$ — первый из отброшенных членов ряда.

**Пример.** Вычислить $\cos 10^\circ$ с точностью до $0{,}0001$.

*Решение*

Используем разложение функции $\cos x$ в ряд

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Переведем градусы в радианы

$$10^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{18} \approx 0{,}17453.$$

Подставим в разложение $\cos x$ вместо $x$ число $0{,}17453$, получим

$$\cos 10^\circ = 1 - \frac{(0{,}17453)^2}{2!} + \frac{(0{,}17453)^4}{4!} + \ldots.$$

Третий член ряда меньше заданной точности, то есть

$$\frac{(0{,}17453)^4}{4!} < 0{,}0001.$$

Так как ряд знакочередующийся, то

$$|R_2| < |u_3| < 0{,}0001,$$

то есть погрешность от отбрасывания всех членов ряда, начиная с третьего, меньше 0,0001.

Таким образом,

$$\cos 10^\circ \approx 1 - 0{,}01523;$$

$$\cos 10^\circ \approx 0{,}9848.$$

## 4.2. Приближенные вычисления определенных интегралов

Ряды применяются для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции, либо нахождение первообразной затруднительно.

**Пример.** Вычислить интеграл $J=\int_0^{0,25} e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,001.

*Решение*

Используем разложение функции $e^x$ в ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \ -\infty < x < +\infty.$$

Подставим в разложение $e^x$ вместо $x$ выражение $-x^2$, получим

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots, \ -\infty < x < +\infty.$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^{0,25} e^{-x^2} dx = \int_0^{0,25} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx = x\Big|_0^{0,25} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,25} + \frac{x^5}{10}\Big|_0^{0,25} - \frac{x^7}{42}\Big|_0^{0,25} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} + \ldots.$$

Так как $\frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} < 0,001$, то

$$\int_0^{0,25} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0,245.$$

## 4.3. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.

Рассмотрим на примерах два метода решения дифференциальных уравнений с помощью рядов.

### Метод неопределенных коэффициентов

Данный метод наиболее удобен для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

**Пример.** Найти решение дифференциального уравнения,

$$y' = x^2 + y,\ y(0) = 1,$$

используя метод неопределенных коэффициентов.

*Решение*

Решение будем искать в виде ряда:

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots .$$

Продифференцируем последнее равенство по $x$

$$y'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots .$$

Подставим $y(x), y'(x)$ в данное по условию уравнение и затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $x$:

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots = x^2 + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots,$$

$$x^0 : c_1 = c_0,$$
$$x^1 : 2c_2 = c_1,$$
$$x^2 : 3c_3 = c_2 + 1,$$
$$x^3 : 4c_4 = c_3, \ldots .$$

Определяем коэффициенты:

$$c_0 = y(0) = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = \frac{1}{2},\ c_4 = \frac{1}{8}.$$

Таким образом,

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{8} + \ldots.$$

## Метод последовательного дифференцирования

Метод последовательного дифференцирования применим для решения дифференциальных уравнений любого порядка.

**Пример.** Найти решение дифференциального уравнения

$$y' = x^2 y^2 - 1, y(0) = 1,$$

используя метод последовательного дифференцирования.

*Решение*

Решение будем искать в виде

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Вычислим значения производных $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, ...:

$$y'(x) = x^2 y^2 - 1,\ y'(0) = -1;$$

$$y''(x) = 2xy^2 + 2x^2 yy',\ y''(0) = 0;$$

$$y''' = 2y^2 + 4xyy' + 4xyy' + 2x^2(yy')' =$$

$$= 2y^2 + 4xyy' + 4xyy' + 2x^2 y'^2 + 2x^2 yy'',\ y'''(0) = 2,\ \ldots .$$

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим

$$y(x) = 1 + (-x) + \frac{1}{3}x^3 - \ldots .$$

## Задачи для самостоятельного решения

1. Используя соответствующий ряд, вычислить $\cos 18^\circ$ с точностью до $10^{-4}$.

*Ответ*. 0,9511.

2. Используя соответствующий ряд, вычислить $\sqrt[4]{630}$ с точностью до $10^{-4}$.

*Ответ*. 5,0100.

3. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить $\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$.

*Ответ*. 0,2483 с точностью до $10^{-4}$.

4. Взяв шесть членов разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

*Ответ*. 0,747 с точностью до $10^{-3}$.

5. Найти первые четыре члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y' = 2x^2 + 3x + y^2 \qquad y(0) = 2.$$

*Ответ*. $y(x) = 2 + 4x + \frac{19}{2}x^2 + \frac{56}{3}x^3 + \ldots$ .