

Ряды

Лекция 4: Ряды Тейлора. Применение степенных рядов

-
- Разложение функций в степенные ряды.
 - Ряды Тейлора
 - Приложения степенных рядов

3.3. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Ряд, полученный почленным дифференцированием (интегрированием) степенного ряда, имеет тот же интервал сходимости и его сумма внутри интервала сходимости равна производной (интегралу) от суммы первоначального ряда.

Если $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, то

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad \int_a^x S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x - x_0)^{n+1}}{n+1}, \quad -R < x - x_0 < R.$$

3.4. Разложение функций в степенные ряды

Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале $|x - x_0| < R$, то есть

$$x_0 - R < x < x_0 + R$$

может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots,$$

если в этом интервале выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = 0,$$

где $R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора (остаток ряда),

$$c = x_0 + \Theta(x - x_0), \quad 0 < \Theta < 1.$$

При $x_0 = 0$ получим ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \dots$$

Теорема 1

Для того чтобы ряд Тейлора функции $f(x)$ сходилась к $f(x)$ в точке x , необходимо и достаточно, чтобы остаточный член $R_n(x)$ удовлетворял условию:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Теорема 2 (достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора)

Если в некотором интервале, содержащем точку x_0 , при любом n выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(x)| < M,$$

где M — положительная постоянная, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

и $f(x)$ разложима в ряд Тейлора.

Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Рассмотрим разложения в ряд Тейлора некоторых элементарных функций.

1. $f(x) = \sin x$.

Данная функция имеет производные любого порядка, причем

$$|(\sin x)^{(n)}| = \left| \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

$$f(x) = \sin x, \quad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = -\cos x = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f'''(0) = 1, \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin \frac{\pi n}{2}.$$

Ряд будет иметь вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3.6)$$

$$2. f(x) = \cos x.$$

Заметим, что $\cos x = (\sin x)'$. Продифференцируем ряд (3.6) и получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

3. $f(x) = e^x$.

Данная функция имеет производные всех порядков на интервале $(-a, a)$, где $a > 0$ — любое число, причем $|f^{(n)}(x)| = e^x < e^a$, ($n = 0, 1, 2, \dots$). Так как $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, то получаем ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

4. $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Данную функцию можно представить следующим образом

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$$

Тогда

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots) dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

Область сходимости: $-1 \leq x \leq 1$.

5. $f(x) = \ln x$.

Разложим в ряд по степеням $(x-1)$.

Заметим, что $\frac{1}{x} = (\ln x)'$.

$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)}$ — сумма бесконечно убывающей геометриче-

ской прогрессии со знаменателем $q = -(x-1)$.

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots + (-1)^n (x-1)^n + \dots \quad (3.7)$$

Область сходимости: $|q| < 1 \Rightarrow |x-1| < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$.

Интегрируем почленно ряд (3.7)

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \left[t - \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(t-1)^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{(t-1)^{n+1}}{n+1} + \dots \right] \Big|_1^x .$$

Итак,

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \dots (-1)^{n-1} \frac{1}{n}(x-1)^n + \dots, \quad 0 < x \leq 2.$$

6. $f(x) = \ln(x+1)$.

Заметим, что

$$(\ln(x+1))' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Проинтегрируем

$$\int_0^x \frac{dt}{t+1} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \dots) dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Итак,

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \leq 1.$$

7. $f(x) = (1+x)^m$, m — любое действительное число.

Вычислим производные:

$$f(x) = (1+x)^m, \quad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad f'(0) = m,$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \quad f''(0) = m(m-1), \dots$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-(n-1))(1+x)^{m-n}, \quad f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-(n-1)).$$

Составим ряд

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m\dots(m-(n-1))}{n!}x^n + \dots$$

Найдем область сходимости по признаку Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1)\dots(m-n)x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))x^n}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x(n-m)}{n+1} \right| = |x|,$$

$$|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1.$$

При $m \geq 0$ $-1 < x < 1$;

при $-1 < m < 0$ $-1 < x \leq 1$;

при $m \leq -1$ $-1 < x < 1$.

8. $f(x) = \operatorname{sh}x$, $f(x) = \operatorname{ch}x$.

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty.$$

Пример. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x-5}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-6)$.

Решение

Разложить в ряд Тейлора — это значит:

1. Составить формально этот ряд.
2. Найти его область сходимости.
3. Доказать, что для всех x из области сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

1. Вычислим производные

$$y = \frac{1}{x-5}, y(6) = 1,$$

$$y' = -\frac{1}{(x-5)^2}, y'(6) = -1,$$

$$y'' = \frac{2}{(x-5)^3}, y''(6) = 2!,$$

$$y''' = -\frac{2 \cdot 3}{(x-5)^4}, y'''(6) = -3!,$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-5)^{n+1}}, y^{(n)}(6) = (-1)^n n!.$$

Составим формально ряд

$$\frac{1}{x-5} = 1 + \frac{-1}{1!}(x-6) + \frac{2!}{2!}(x-6)^2 - \frac{3!}{3!}(x-6)^3 + \dots = \sum_n (-1)^n (x-6)^n.$$

Остаточный член будет иметь вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1;$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(c-5)^{n+2} (n+1)!} (x-6)^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} (x-6)^{n+1}}{(c-5)^{n+2}}, \quad c = 6 + \theta(x-6).$$

2. Найдем область сходимости ряда. Используем признак Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-6)^{n+1}}{(x-6)^n} \right| = |x-6| < 1, \quad 5 < x < 7.$$

Пусть $x = 5$, тогда получим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^n = 1 + 1 + \dots$, который расходится.

Пусть $x = 7$, тогда получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, который также расходится.

Область сходимости ряда: $x \in (5; 7)$.

3. Докажем, что для всех x из области сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Для всех $x \in (5; 7)$ имеем

$$c - 5 > 1, \quad |x - 6| < 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-6)^{n+1}}{(c-5)^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{c-5} \left(\frac{x-6}{c-5} \right)^{n+1} = 0.$$

Итак,

$$\frac{1}{x-5} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-6)^n, \quad x \in (5; 7).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область и радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^{n-1}}.$$

Ответ. На промежутке $[-4; 0)$ заданный ряд сходится, радиус сходимости $R = 2$.

2. Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Ответ. Область сходимости степенного ряда $(-1; 1)$, радиус сходимости $R = 1$.

3. Найти область и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

Ответ. Ряд сходится абсолютно в каждой точке числовой прямой $(-\infty; \infty)$.

4. Разложить функцию $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

Ответ. $1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{(2n)!!} x^{2n}$.

5. Разложить функцию $f(x) = \sin^2 x$ в степенной ряд.

Ответ. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!}$.

5. Разложить функцию $f(x) = \sin^2 x$ в степенной ряд.

Ответ.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} \cdot x^{2n}}{(2n)!}.$$

6. Разложить функцию $f(x) = \ln(3-x)$ в ряд Маклорена.

Ответ.
$$\ln 3 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{3^{n+1} \cdot (n+1)}.$$

4. Приложения степенных рядов

4.1. Приближенные вычисления значений функции

Для вычисления приближенного значения функции $f(x)$ в ее разложении в степенной ряд сохраняют первые n членов (n — конечная величина), а остальные члены отбрасывают. Для оценки погрешности найденного приближенного значения нужно оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $|R_n| < |u_{n+1}|$, где u_{n+1} — первый из отброшенных членов ряда.

Пример. Вычислить $\cos 10^\circ$ с точностью до 0,0001.

Решение

Используем разложение функции $\cos x$ в ряд

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Переведем градусы в радианы

$$10^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{18} \approx 0,17453.$$

Подставим в разложение $\cos x$ вместо x число 0,17453, получим

$$\cos 10^\circ = 1 - \frac{(0,17453)^2}{2!} + \frac{(0,17453)^4}{4!} + \dots$$

Третий член ряда меньше заданной точности, то есть

$$\frac{(0,17453)^4}{4!} < 0,0001.$$

Так как ряд знакочередующийся, то

$$|R_2| < |u_3| < 0,0001,$$

то есть погрешность от отбрасывания всех членов ряда, начиная с третьего, меньше 0,0001.

Таким образом,

$$\cos 10^\circ \approx 1 - 0,01523;$$

$$\cos 10^\circ \approx 0,9848.$$

4.2. Приближенные вычисления определенных интегралов

Ряды применяются для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции, либо нахождение первообразной затруднительно.

Пример. Вычислить интеграл $J = \int_0^{0,25} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Решение

Используем разложение функции e^x в ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Подставим в разложение e^x вместо x выражение $-x^2$, получим

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{0,25} e^{-x^2} dx &= \int_0^{0,25} (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots) dx = x \Big|_0^{0,25} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{0,25} + \frac{x^5}{10} \Big|_0^{0,25} - \frac{x^7}{42} \Big|_0^{0,25} + \dots = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} + \dots \end{aligned}$$

Так как $\frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} < 0,001$, то

$$\int_0^{0,25} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0,245.$$

4.3. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов

Если решение дифференциального уравнения не выражается через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться рядом Тейлора.

Рассмотрим на примерах два метода решения дифференциальных уравнений с помощью рядов.

Метод неопределенных коэффициентов

Данный метод наиболее удобен для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения,

$$y' = x^2 + y, \quad y(0) = 1,$$

используя метод неопределенных коэффициентов.

Решение

Решение будем искать в виде ряда:

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots$$

Продифференцируем последнее равенство по x

$$y'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots$$

Подставим $y(x)$, $y'(x)$ в данное по условию уравнение и затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots = x^2 + c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots,$$

$$x^0 : c_1 = c_0,$$

$$x^1 : 2c_2 = c_1,$$

$$x^2 : 3c_3 = c_2 + 1,$$

$$x^3 : 4c_4 = c_3, \dots$$

Определяем коэффициенты:

$$c_0 = y(0) = 1, c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = \frac{1}{2}, c_4 = \frac{1}{8}.$$

Таким образом,

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{8} + \dots$$

Метод последовательного дифференцирования

Метод последовательного дифференцирования применим для решения дифференциальных уравнений любого порядка.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения

$$y' = x^2 y^2 - 1, y(0) = 1,$$

используя метод последовательного дифференцирования.

Решение

Решение будем искать в виде

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Вычислим значения производных $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, ...:

$$y'(x) = x^2 y^2 - 1, y'(0) = -1;$$

$$y''(x) = 2xy^2 + 2x^2 yy', y''(0) = 0;$$

$$\begin{aligned} y''' &= 2y^2 + 4xyy' + 4xyy' + 2x^2 (yy')' = \\ &= 2y^2 + 4xyy' + 4xyy' + 2x^2 y'^2 + 2x^2 yy'', y'''(0) = 2, \dots \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения производных в искомый ряд, получим

$$y(x) = 1 + (-x) + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Используя соответствующий ряд, вычислить $\cos 18^\circ$ с точностью до 10^{-4} .

Ответ. 0,9511.

2. Используя соответствующий ряд, вычислить $\sqrt[4]{630}$ с точностью до 10^{-4} .

Ответ. 5,0100.

3. Взяв четыре члена разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$.

Ответ. 0,2483 с точностью до 10^{-4} .

4. Взяв шесть членов разложения в ряд подынтегральной функции, вычислить $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

Ответ. 0,747 с точностью до 10^{-3} .

5. Найти первые четыре члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$$y' = 2x^2 + 3x + y^2 \quad y(0) = 2.$$

Ответ. $y(x) = 2 + 4x + \frac{19}{2}x^2 + \frac{56}{3}x^3 + \dots$