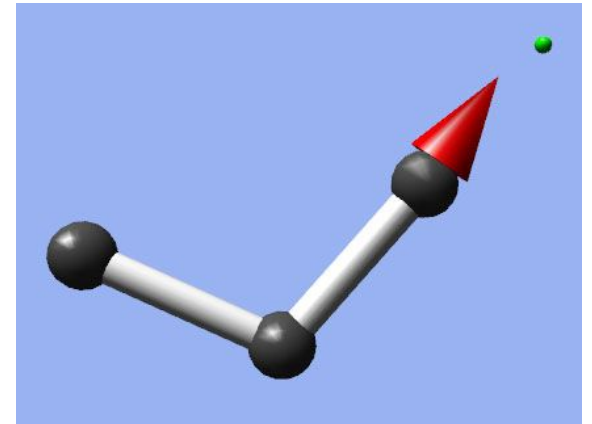
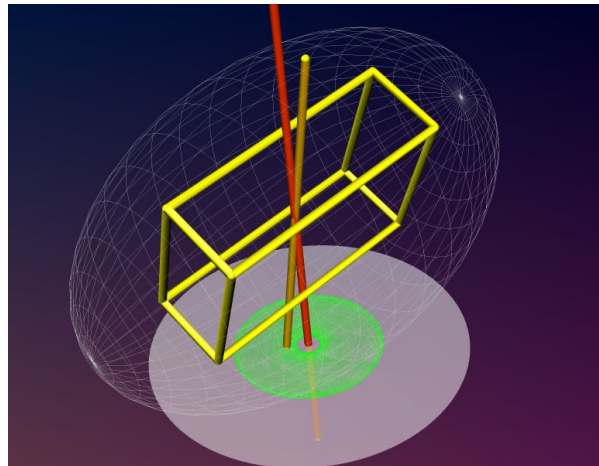
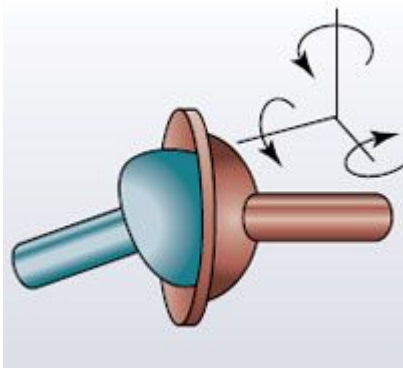


# ЛЕКЦИЯ № 4      **Твердое тело в механике**

**Элементы содержания:** Абсолютно твердое тело. Число степеней свободы. Виды движения твердого тела. Поступательное и вращательное движения. Угловые динамические характеристики: момент силы, момент инерции, момент импульса. Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Закон сохранения момента импульса. Энергетические соотношения при вращательном движении.

Литература: Трофимова Т.И. Курс физики: Учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2000. С. 3-18; 31-34.

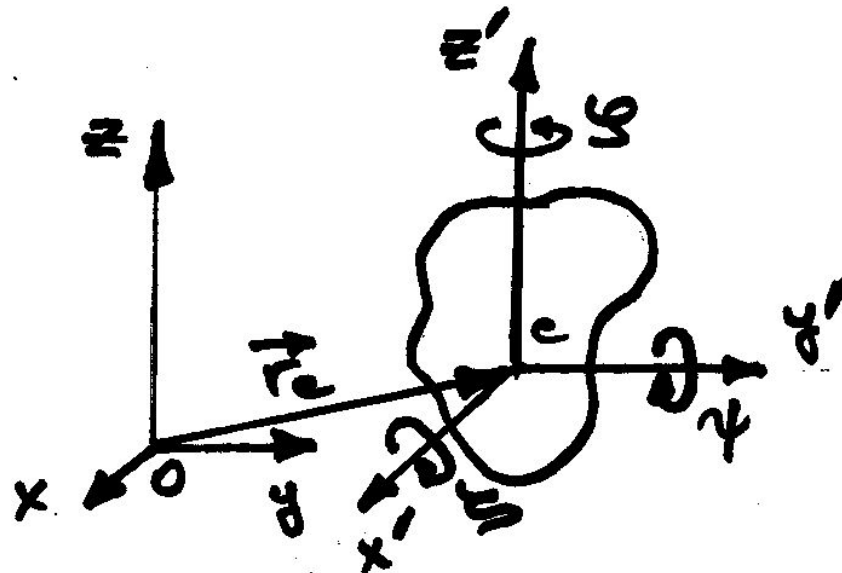


**Физическая модель №2: абсолютно твердое тело** – тело, которое при движении не изменяет своей формы и размеров.

**Степени свободы** - независимые возможные изменения состояния или положения системы, обусловленные изменениями её параметров.

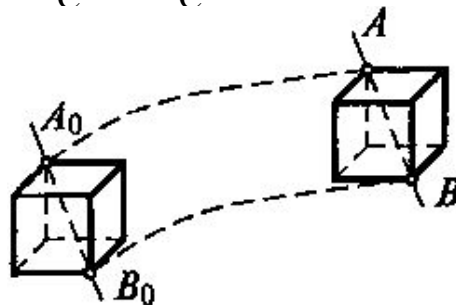
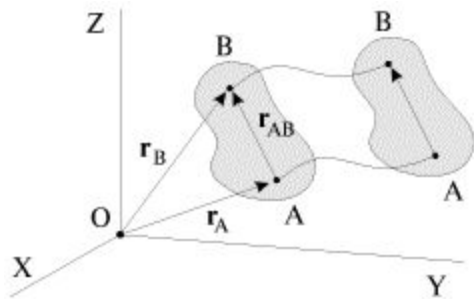
**Число степеней свободы** – минимальное число независимых координат, определяющих положение тела в пространстве.

Абсолютно твердое тело имеет **шесть степеней свободы**. **Три линейные степени свободы**  $(x_C, y_C, z_C)$  определяют положение центра инерции тела. **Три угловые степени свободы**  $(\zeta, \psi, \phi)$  определяют пространственную ориентацию твердого тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей.



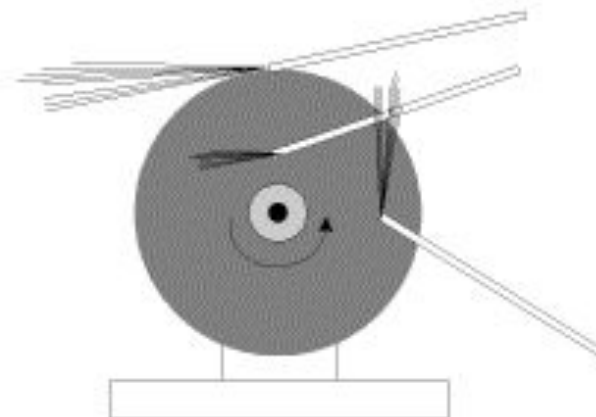
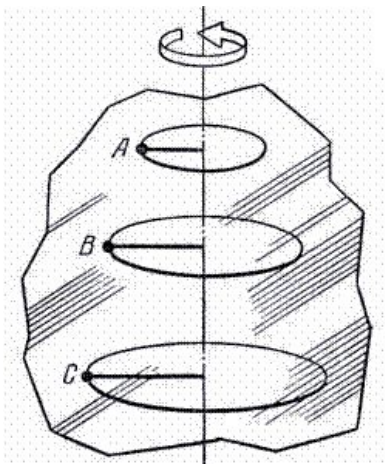
# Классификация видов движения твердого тела

1. **Поступательное движение** – это движение твердого тела, при котором любая прямая, связанная с телом, перемещается параллельно самой себе. Три степени свободы:  $x_C$ ,  $y_C$  и  $z_C$ .

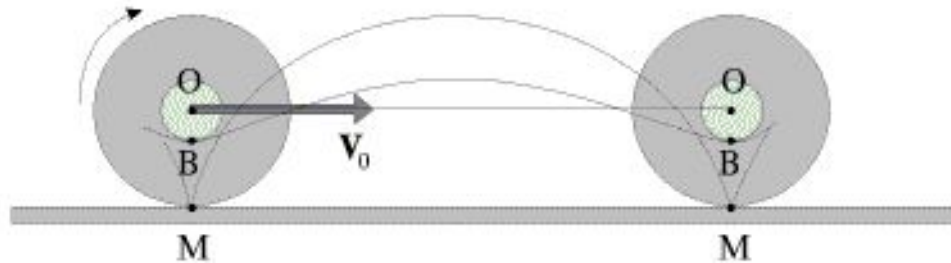


2. **Вращательное движение** – это движение твердого тела, при котором траектории всех точек тела являются окружностями с центрами на одной прямой и все плоскости окружностей перпендикулярны этой прямой.

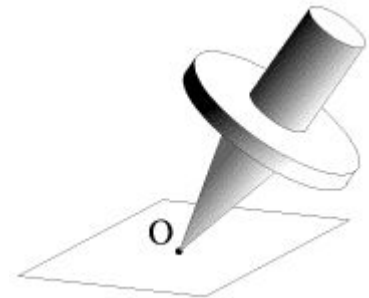
Одна степень свободы:  $\phi$ .



3. **Плоское движение** – это движение твердого тела, при котором все точки тела перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости. Четыре степени свободы:  $x_C$ ,  $y_C$ ,  $z_C$  и  $\phi$ . Классический пример: качение цилиндра по плоскости без проскальзывания.



4. **Вращение вокруг неподвижной точки** - это движение твердого тела, при котором остается неподвижной одна точка, жестко связанная с телом. Три степени свободы:  $\zeta$ ,  $\psi$  и  $\phi$ .



5. **Свободное движение** – наиболее общий вид движения твердого тела с шестью степенями свободы:  $x_C$ ,  $y_C$ ,  $z_C$  и  $\zeta$ ,  $\psi$ ,  $\phi$ .



# Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Угловая координата  $\phi$  – угол поворота тела из некоторого определенного (начального) положения.

Угловая скорость - быстрота вращения тела

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \quad . \quad (4.1)$$

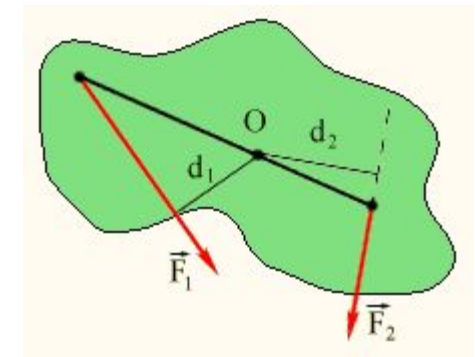
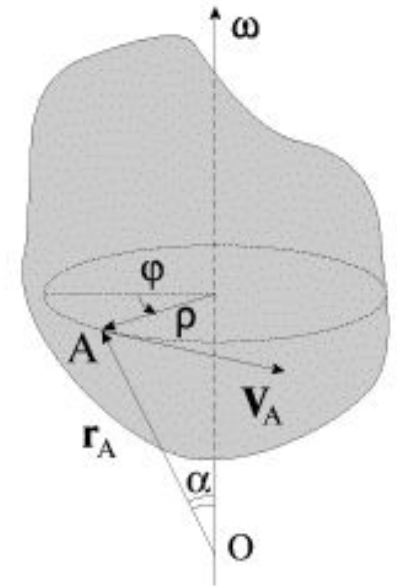
Для того, чтобы изменить угловую скорость тела к нему необходимо приложить вращающий момент.

**Вращающий момент** (или момент силы относительно оси) – величина, характеризующая вращательный эффект силы при ее действии на твердое тело:

$$M = Fd \quad , \quad (4.2)$$

где  $d$  – плечо силы – кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы.

**Вращающий момент** – скалярная алгебраическая величина; она положительна, если под действием момента тело вращается против часовой стрелки, и отрицательна, если под действием момента тело вращается по часовой стрелке. На рисунке момент силы  $\vec{F}_1$  положителен ( $M_1 > 0$ ); момент силы  $\vec{F}_2$  отрицателен ( $M_2 < 0$ ).



# Момент инерции

**Момент инерции** – величина характеризующая инертность тела при его вращательном движении и зависящая от массы, формы и размеров тела, а также от положения оси вращения;  $[ I ] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$ .

**Собственный момент инерции**,  $I_C$  - момент инерции, относительно оси, проходящей через его центр инерции.

## Примеры собственных моментов инерции тел различной формы

Shape	Axis of Rotation	Rotational Inertia	Shape	Axis of Rotation	Rotational Inertia
Thin hollow cylindrical shell (or hoop)	Central axis of cylinder	$mR^2$	Solid sphere	Through center	$\frac{2}{5}mR^2$
Solid cylinder (or disk)	Central axis of cylinder	$\frac{1}{2}mR^2$	Thin hollow spherical shell	Through center	$\frac{2}{3}mR^2$
Hollow cylindrical shell or disk	Central axis of cylinder	$\frac{1}{2}m(a^2 + b^2)$	Thin rod (or rectangular plate)	Perpendicular to rod through end (or along edge of plate)	$\frac{1}{3}mL^2$
Rectangular plate	Perpendicular to plate through center	$\frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	Thin rod (or rectangular plate)	Perpendicular to rod through center (or parallel to edge of plate through center)	$\frac{1}{12}mL^2$



# Примеры собственных моментов инерции тел различной формы

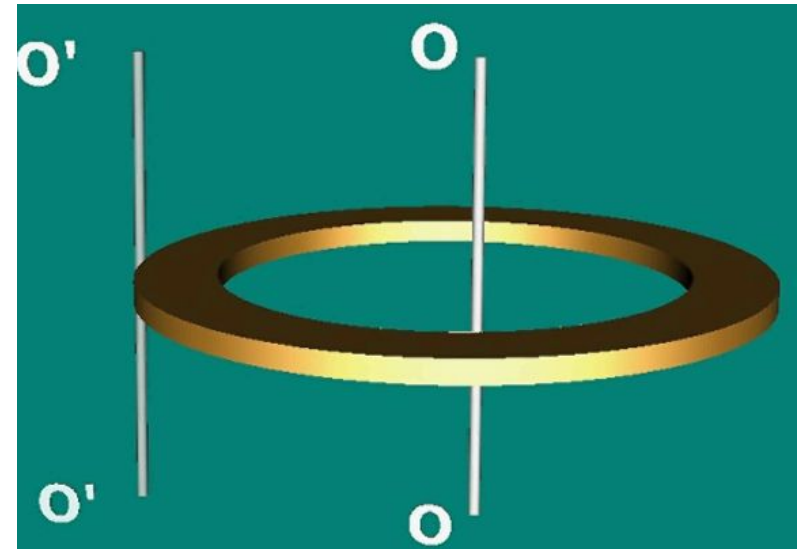
Shape	Axis of Rotation	Rotational Inertia	Shape	Axis of Rotation	Rotational Inertia
Thin hollow cylindrical shell (or hoop)	Central axis of cylinder	$mR^2$	Solid sphere	Through center	$\frac{2}{5}mR^2$
Solid cylinder (or disk)	Central axis of cylinder	$\frac{1}{2}mR^2$	Thin hollow spherical shell	Through center	$\frac{2}{3}mR^2$
Hollow cylindrical shell or disk	Central axis of cylinder	$\frac{1}{2}m(a^2 + b^2)$	Thin rod (or rectangular plate)	Perpendicular to rod through end (or along edge of plate)	$\frac{1}{3}mL^2$
Rectangular plate	Perpendicular to plate through center	$\frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	Thin rod (or rectangular plate)	Perpendicular to rod through center (or parallel to edge of plate through center)	$\frac{1}{12}mL^2$

# Теорема Штейнера

**Теорема Штейнера:** моменты инерции тела относительно параллельных осей связаны соотношением:

$$I = I_C + mx^2, \quad (4.3)$$

где  $m$  и  $I_C$  – масса и собственный момент инерции тела,  $x$  – расстояние между осями.



## Пример использования теоремы Штейнера

Стержень относительно оси проходящей через его центр инерции перпендикулярно оси стержня		$I_C = \frac{1}{12} mL^2$
Стержень относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно оси стержня		$I = \frac{1}{3} mL^2$



# Динамика твердого тела

Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси:

$$L = I\omega \quad , \quad (4.4)$$

где  $I$  и  $\omega$  – момент инерции и угловая скорость тела.

Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

**Общая формулировка:** Скорость изменения момента импульса твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси равна результирующему вращающему моменту внешних сил, приложенных к телу:

$$dL/dt = M_{\Sigma} \quad . \quad (4.5)$$

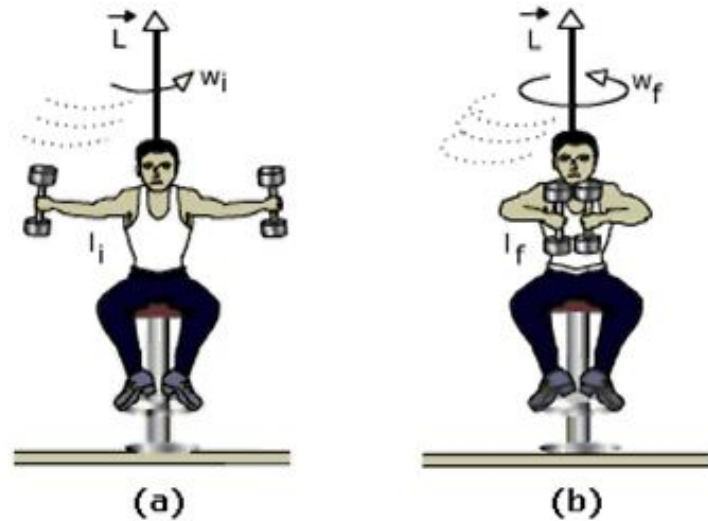
**Частная формулировка:** Если при вращении тела вокруг неподвижной оси его момент инерции не изменяется, то угловое ускорение тела прямо пропорционально результирующему вращающему моменту внешних сил, приложенных к телу, и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно этой же оси:

$$\alpha = M_{\Sigma}/I \quad . \quad (4.6)$$

Следствие из уравнения (4.5):

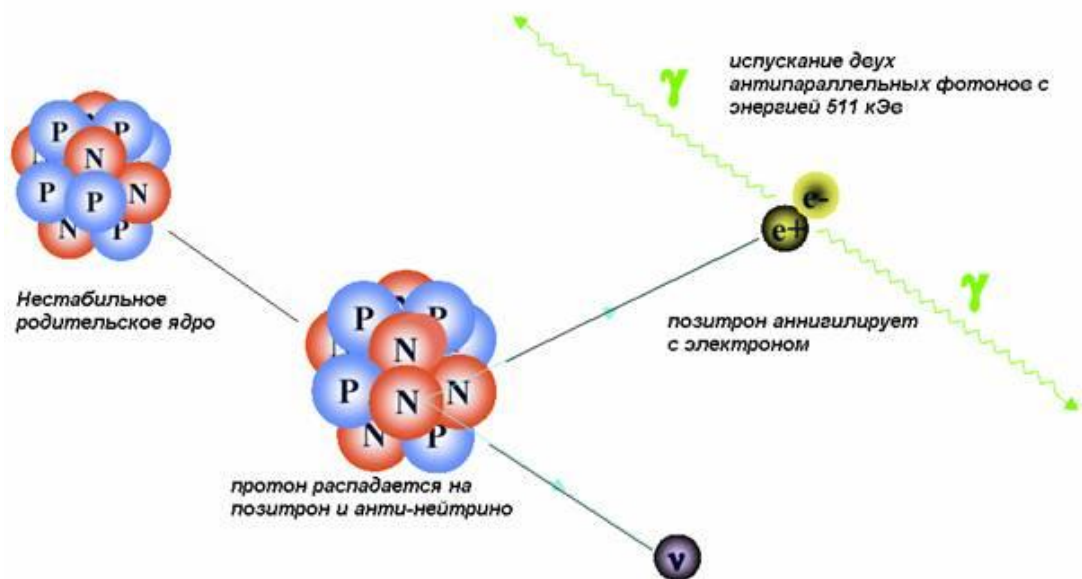
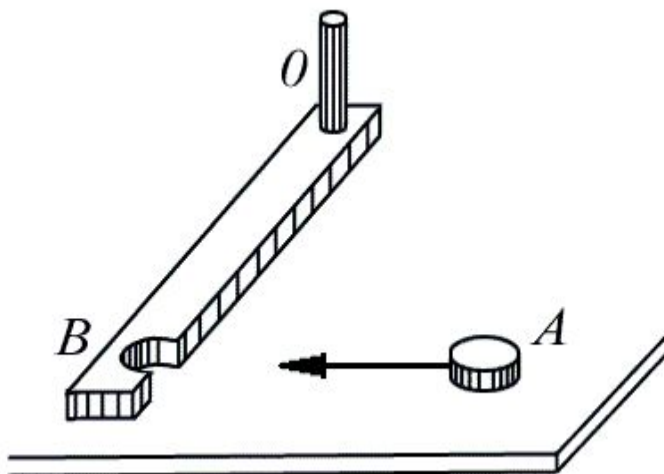
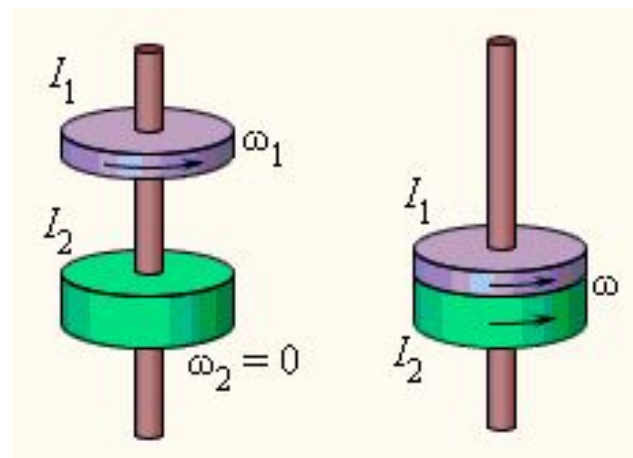
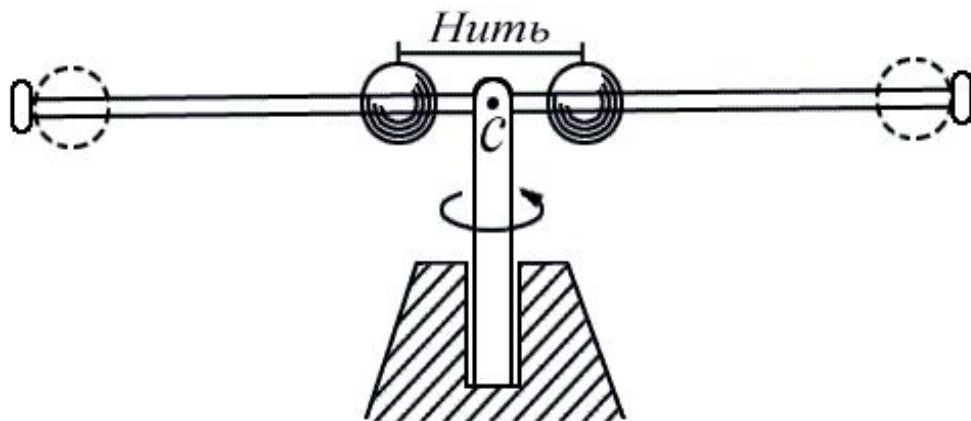
$$\text{если } M_{\Sigma} = 0 \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = 0 \Rightarrow L = I\omega = \text{const} , \quad (4.7)$$

т. е. если на тело не действуют внешние силы, то произведение момента инерции тела на его угловую скорость не изменяется с течением времени.



Уравнение (4.7) - частный случай **закона сохранения момента импульса**: момент импульса замкнутой (изолированной) системы не изменяется при любых процессах происходящих внутри этой системы.

# Сохранение момента импульса



## Энергетические соотношения

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

$$K_{\text{rot}} = \frac{I\omega^2}{2} . \quad (4.8)$$

Кинетическая энергия катящегося тела

$$K_{\text{roll}} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2} . \quad (4.9)$$

Работа внешней силы при повороте тела

$$A_{\text{rot}} = M\Delta\varphi . \quad (4.10)$$

Мощность внешней силы при повороте тела

$$P_{\text{rot}} = M\omega \quad (4.11)$$

**Общее правило:** Формулы для поступательного движения переходят в соответствующие формулы для вращательного движения при замене линейных величин их угловыми аналогами.