Лекция №10
Деформированное состояние в точке

- Обобщенный закон Гука

Изменение формы тела связано с перемещениями его точек. Расстояние между положением некоторой точки *A* до и после изменения формы тела (рис. 1) называется ее полным перемещением. Составляющие вектора полного перемещения по осям *x, y* и *z* обозначаются соответственно через *u, v* и *w*.

Рассмотрим два элементарных отрезка AB и BC, образующих прямой угол CAB в плоскости zox (рис.2). Направление отрезка AB совпадает с направлением оси ***x***. Расстояние между точками *A и B* обозначим через ***dx***.

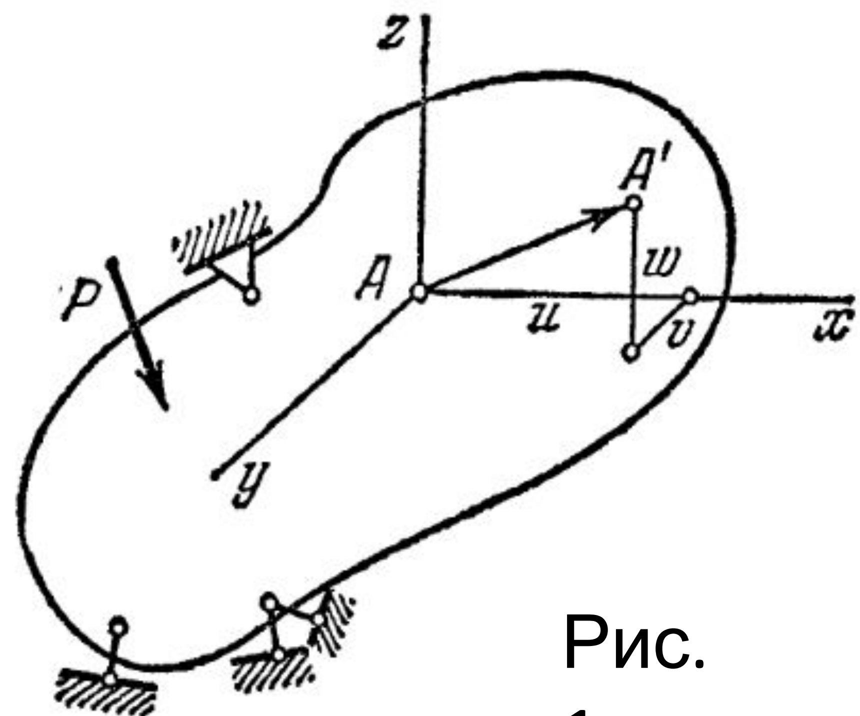

Рис. 1

Направление отрезка АС совпадает с направлением оси ***z.*** Расстояние между точками *А и С* обо

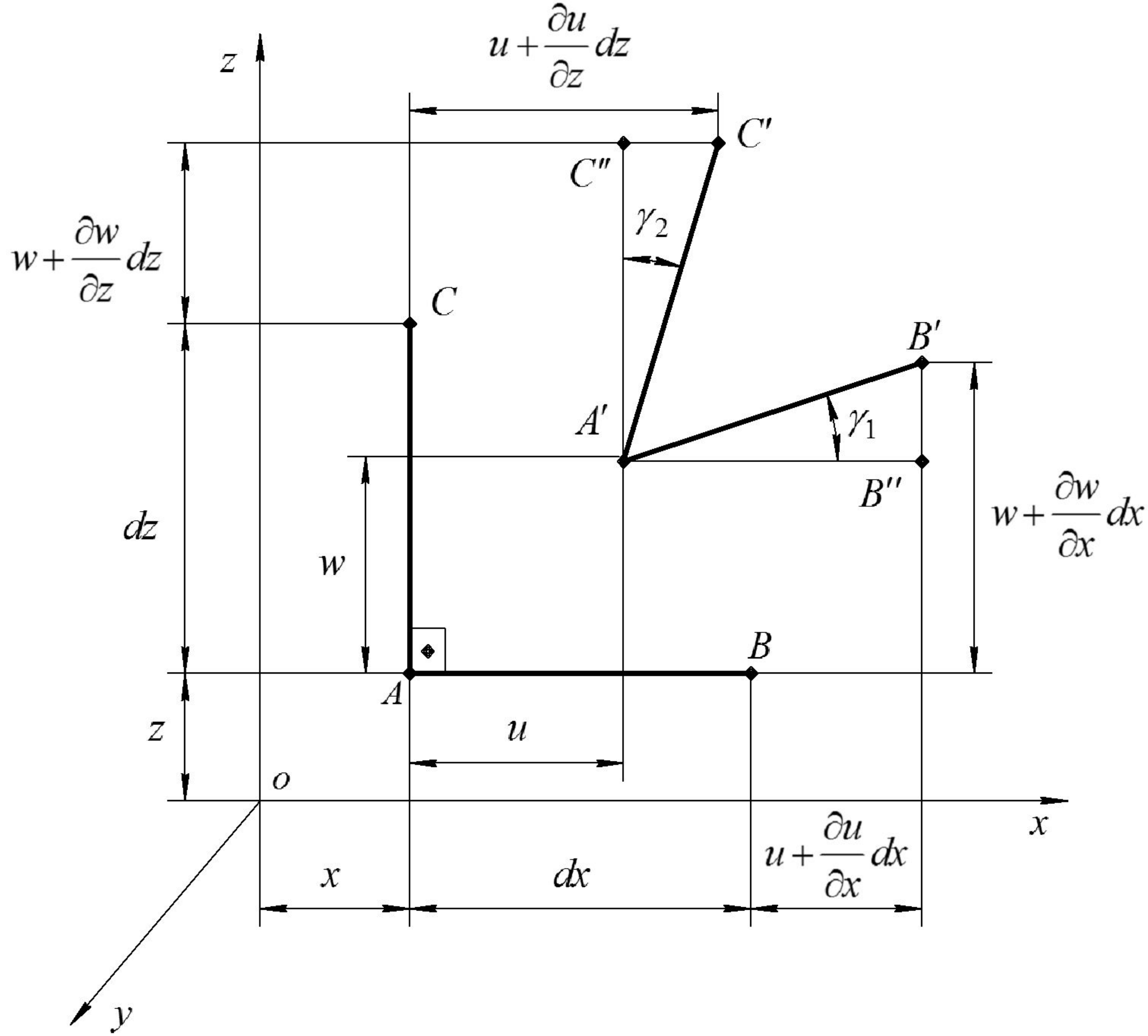

Рис. 2

Составляющие вектора перемещения в точке *B* отличаются от составляющих в точке *A* на величины, соответствующие изменению координаты ***x***. Так, если точка *A* перемещается вдоль оси *z* на *w,* то точка *B* перемещается на величину $w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$. Если точка *A* перемещается вдоль оси *x* на *u,* то точка *B* на величину $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$. Составляющие вектора перемещения в точке *C* отличаются от составляющих в точке *A* на величины, соответствующие изменению координаты ***z***. Так, если точка *A* перемещается вдоль оси *x* на *u,* то точка *C* перемещается на величину $u + \frac{\partial u}{\partial z} dz$. Если точка *A* перемещается вдоль оси *z* на *w,* то точка *C* перемещается на величину $w + \frac{\partial w}{\partial z} dz$.

Определим деформацию ε_x в точке А по направлению оси x

$$\varepsilon_x = \frac{A'B'_x - AB}{AB},$$

где $A'B'_x$ - проекция отрезка $A'B'$ на ось x.

Из рисунка 2 очевидно

$$A'B'_x = \left(x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - \left(x + u \right) = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Тогда

$$\varepsilon_x = \frac{A'B'_x - AB}{AB} = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Определим деформацию ε_z в точке А по направлению оси z

$$\varepsilon_z = \frac{A'C'_z - AC}{AC},$$

где $A'C'_z$ - проекция отрезка $A'C'$ на ось z.

$$A'C'_z = \left(z + dz + w + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) - (z + w) = dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

Тогда

$$\varepsilon_z = \frac{A'C'_z - AC}{AC} = \frac{dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz - dz}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Рассуждая аналогично, можно получить

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Угловая деформация (угол сдвига) в плоскости zox

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \angle CAB - \angle C'A'B' = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$tg\gamma_1 = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}dx}{dx\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$1 + \frac{\partial u}{\partial x} \approx 1$$

Учитывая что угол γ_1 маленький (деформации малы)

$$tg\gamma_1 \approx \gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$tg\gamma_2 = \frac{C'C''}{A'C''} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}dz}{dz + \frac{\partial w}{\partial z}dz} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}dz}{dz\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$1 + \frac{\partial w}{\partial z} \approx 1$$

Учитывая что угол γ_2 маленький (деформации малы)

$$tg\gamma_2 \approx \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial z}$$

В итоге, угловая деформация (угол сдвига) в плоскости zox

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Аналогично могут быть написаны выражения для углов сдвига в двух других координатных плоскостях.

В итоге имеем следующую связь между перемещениями и деформациями в точке:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Совокупность деформаций, возникающих по различным осям и в различных плоскостях, проходящих через данную точку, носит название ***деформированного состояния в точке***.

Величины $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{zx}, \gamma_{yz}, \gamma_{xy}$ - называются *компонентами деформированного состояния.*

Возникает естественный вопрос, достаточно ли этих шести компонент, чтобы *определить* деформированное состояние, т. е. можно ли по этим шести компонентам найти удлинение по любой оси и углы сдвига в любых плоскостях, проходящих через данную точку.

Рассмотрим некоторую ось v, проходящую через заданную точку (рис. 3). Направляющие косинусы прямой v будут l, *m, n.*

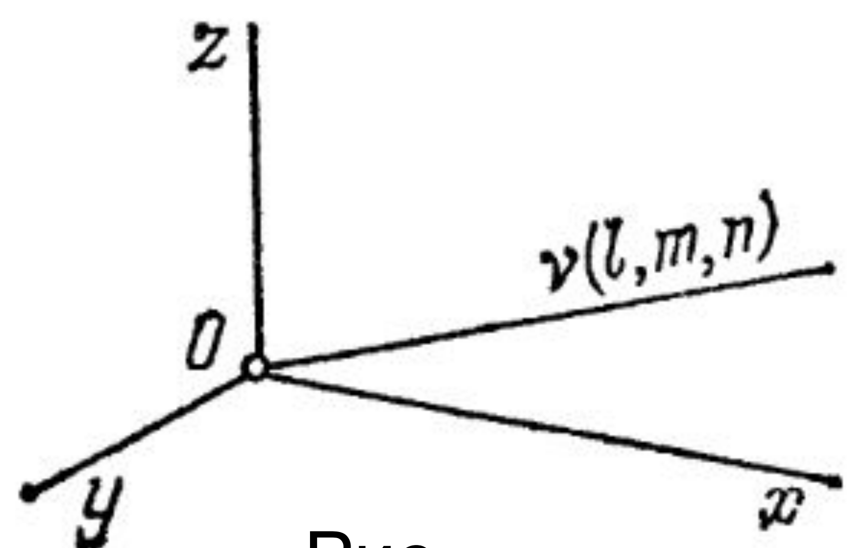

Рис. 3

Выделим на этой прямой малый отрезок *OA=dL* и построим на нем, как на диагонали, параллелепипед со сторонами *dx, dy, dz* (рис. 4).

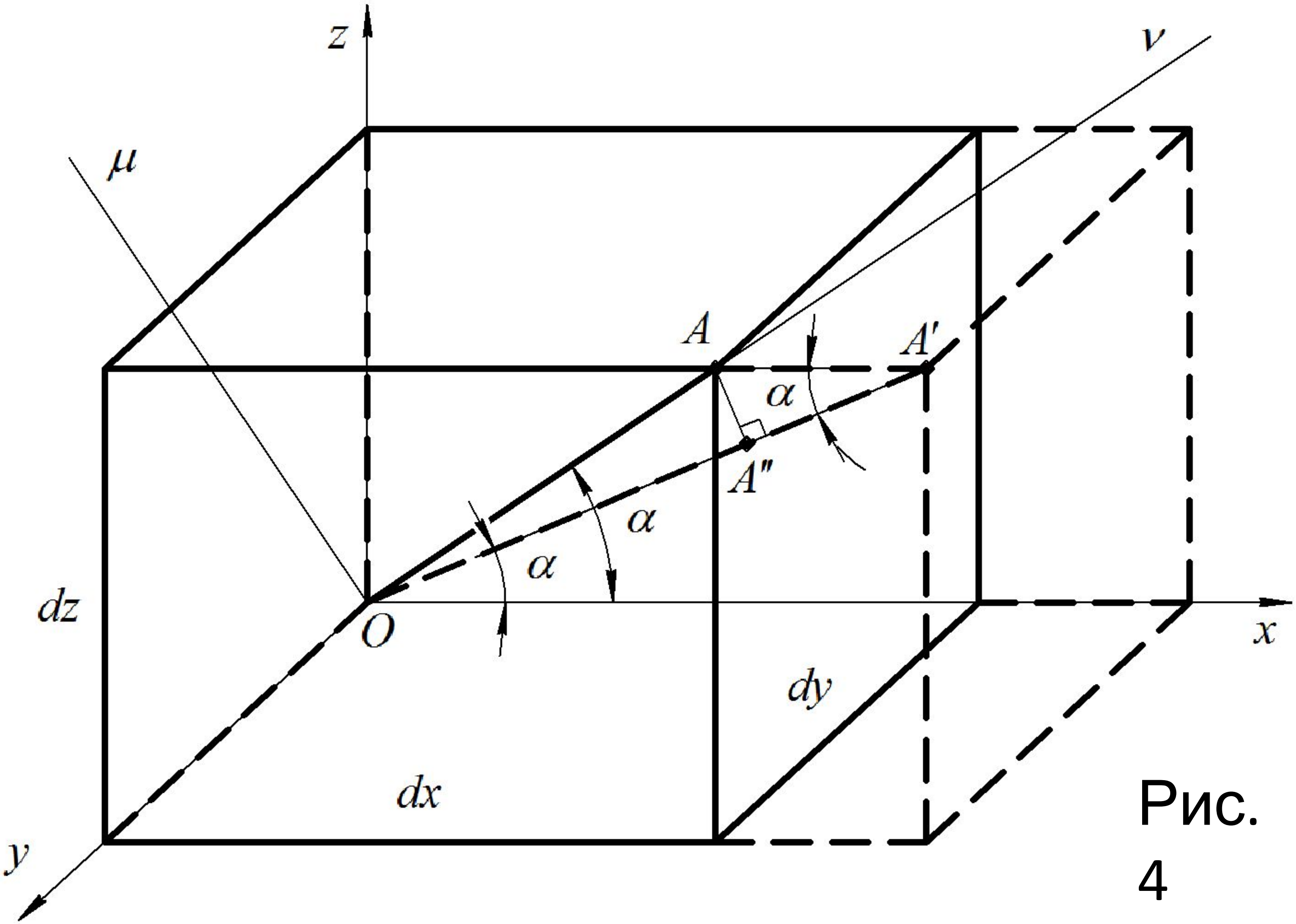

Рис. 4

Если параллелепипед получает удлинение ε_x, точка A смещается вдоль оси x на $\varepsilon_x dx$ (отрезок AA′ на рис.4), а диагональ OA получает абсолютное удлинение

$\Delta dL = \varepsilon_x dx \cdot l$ (отрезок A′A″ на рис.4)

Относительное удлинение диагонали получим, разделив это произведение на *dL=dx/l*

$$\frac{\Delta dL}{dL} = \frac{\varepsilon_x dx \cdot l}{dx/l} = \varepsilon_x l^2$$

В итоге обнаруживаем, что деформация ε_x вносит в копилку деформации ε_v слагаемое $\varepsilon_x l^2$. Аналогичные слагаемые $\varepsilon_y m^2$ и $\varepsilon_z n^2$ дают деформации ε_y, ε_z.

Теперь положим, что нижняя грань параллелепипеда $dxdy$ остается на месте, а верхняя вследствие сдвига в плоскости xz получает вдоль оси x перемещение $\gamma_{zx} dz$ (отрезок AA′ на рис.5).

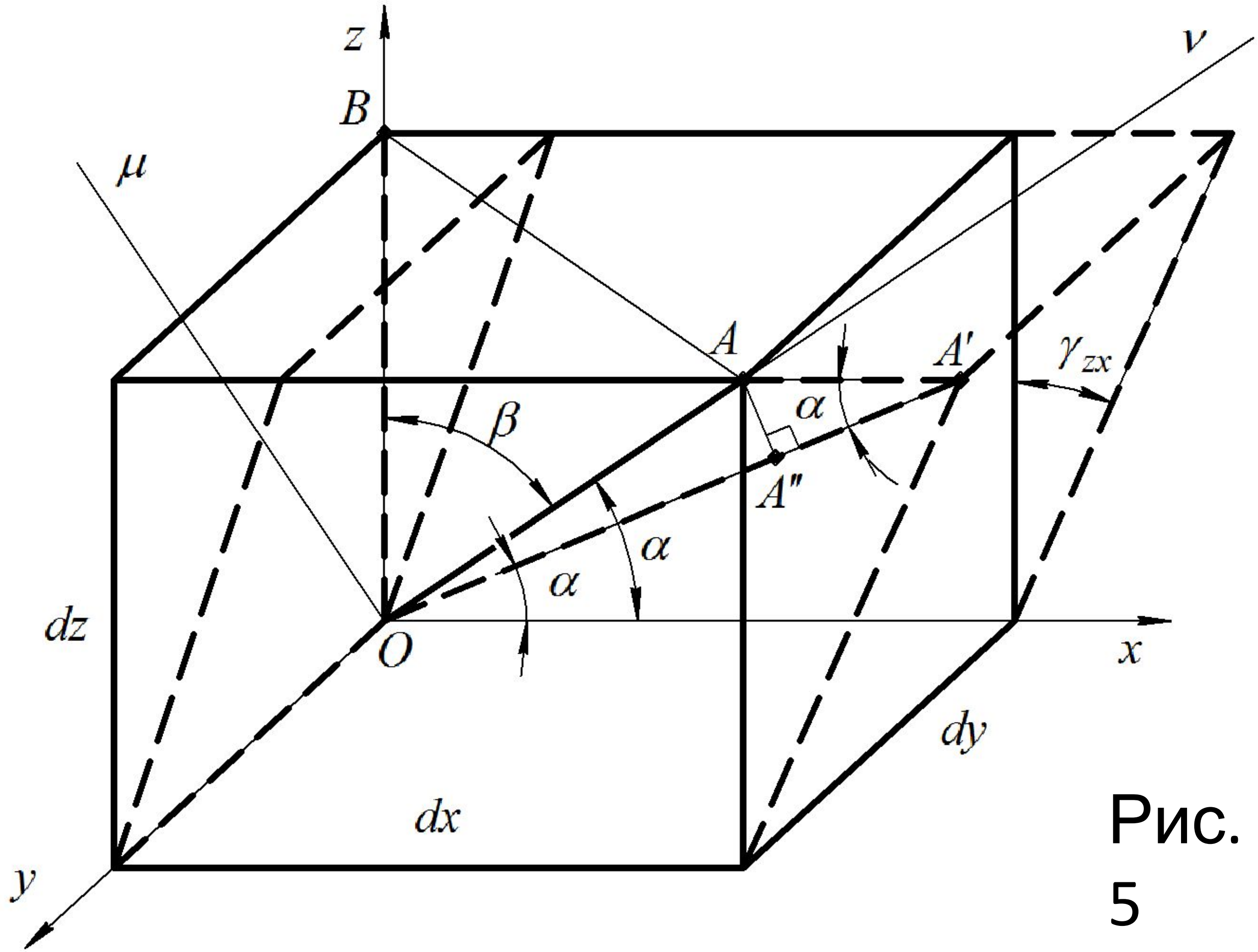

Рис. 5

Диагональ *OA* получает абсолютное удлинение

$\Delta dL = \gamma_{zx} dz \cdot l$ (отрезок A′A″ на рис.5)

Относительное удлинение диагонали получим, разделив это произведение на *dL=dz/n*

$$\frac{\Delta dL}{dL} = \frac{\gamma_{zx} dz \cdot l}{dz/n} = \gamma_{zx} l \cdot n$$

Остальные слагаемые можно написать по аналогии. Суммируя их, получим

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl + \gamma_{xy} lm \quad (1)$$

Несколько сложнее определить угол сдвига в плоскости, определяемой двумя взаимно перпендикулярными прямыми ν и μ (рис.). Для этого надо найти перемещение точки *A* по направлению μ и разделить его на *dL.* Это дает угол поворота отрезка *dL* в плоскости νμ. Затем все то же самое проделывается для отрезка, расположенного по оси ν. Сумма найденных углов дает искомый угол сдвига в плоскости νμ. Но этих выкладок мы уже делать не будем. Главное ясно.
Деформированное состояние в точке определяется шестью компонентами.

Вернемся к выражению (1) и сравним его с найденным ранее для напряжения σ_{ν} выражением

$$\sigma_{\nu} = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl + 2\tau_{xy} lm \quad (2)$$

Выражения имеют общую структуру, и все, что было получено ранее из выражения (2), мы получаем и из (1). Достаточно только во всех формулах заменить $\sigma_{\boldsymbol{x}}$, $\sigma_{\boldsymbol{y}}$, $\sigma_{\boldsymbol{z}}$ на ε_x, ε_y, ε_z, а $\tau_{\boldsymbol{yz}}$, $\tau_{\boldsymbol{zx}}$, $\tau_{\boldsymbol{xy}}$ на γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy}.

Таким образом, анализ деформированного состояния показывает, что оно обладает свойствами, совершенно аналогичными свойствам напряженного состояния.

Среди множества осей, которые могут быть проведены через исследуемую точку, существуют **три взаимно перпендикулярные оси**, в системе которых **угловые деформации отсутствуют**. Эти оси называются ***главными осями деформированного состояния,*** а линейные деформации в этой системе — ***главными деформациями.***

Главные деформации определяются из кубического уравнения

$$\varepsilon^3 - \varepsilon^2 I_1 + \varepsilon I_2 - I_3 = 0 \quad (3)$$

Коэффициентами уравнения (3) являются ***инварианты*** **деформированного состояния**:

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$I_2 = \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

Подобно кругам Мора в напряжениях, можно построить круги Мора в деформациях.
Анализ деформированного состояния основан на чисто геометрических соотношениях, и поэтому все сказанное остается справедливым для любого однородного тела, независимо от механических свойств материала.
Наряду с **линейной** и **угловой деформациями** в сопротивлении материалов приходится рассматривать иногда ***объемную деформацию***, т. е. относительное изменение объема в точке.

Линейные размеры элементарного параллелепипеда *dx, dy и dz в* результате деформации меняются и становятся равными $dx(1+\varepsilon_x)$, $dy(1+\varepsilon_y)$ и $dz(1+\varepsilon_z)$. Абсолютное приращение объема определяется, очевидно, разностью

$$\Delta V = dxdydz(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - dxdydz$$

Раскрывая скобки и пренебрегая произведениями линейных деформаций как величинами, малыми по сравнению с их первыми степенями, получим

$$\Delta V = dxdydz(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

Относительное изменение объема обозначается буквой **е** и равно сумме линейных деформаций по трем осям

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

С поворотом осей величина **е** в точке, очевидно, не меняется. Это — один из инвариантов деформированного состояния.

Обобщенный закон Гука

Между компонентами напряженного состояния, с одной стороны, и деформированного — с другой, существует определенная зависимость. В пределах малых деформаций эта зависимость является линейной и носит название ***обобщенного закона Гука***. Наиболее простую форму обобщенный закон Гука принимает для изотропного тела. В этом случае коэффициенты пропорциональности между компонентами напряженного и деформированного состояний не зависят от ориентации осей в точке.

Для того чтобы составить аналитическое выражение обобщенного закона Гука, воспользуемся принципом независимости действия сил и рассмотрим раздельно силы, возникающие на гранях элементарного параллелепипеда (рис. 6)

В любой из координатных плоскостей, например *yz*, угловая деформация определяется только соответствующим касательным напряжением $\gamma_{yz} = \tau_{yz}/G$. свойств изотропного материала.

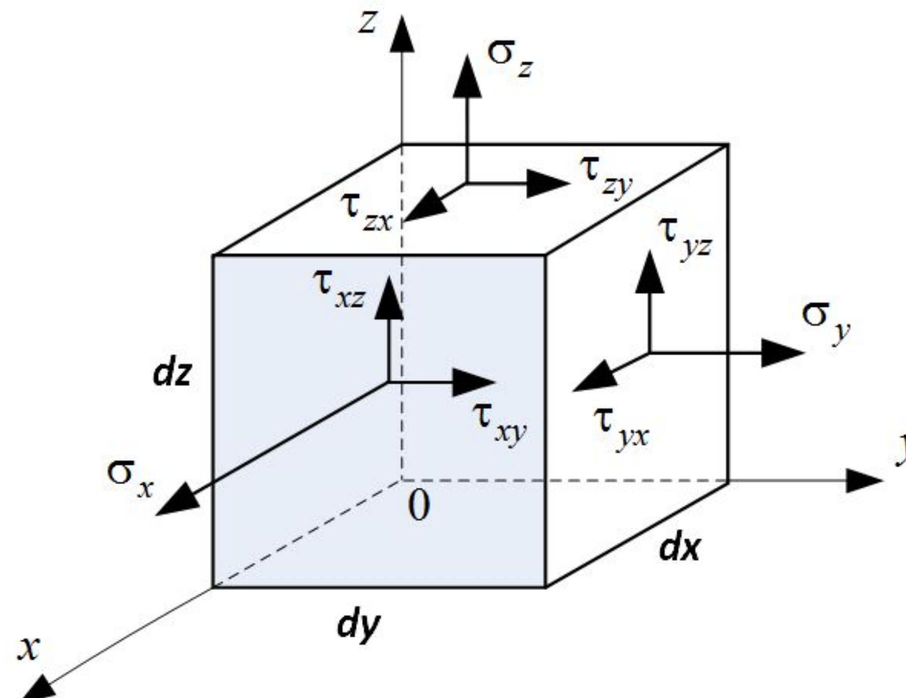

Рис. 6

Две другие пары касательных напряжений, а также нормальные напряжения не будут влиять на величину γ_{yz}, что является следствием свойств изотропного материала. В итоге для трех угловых деформаций получаем

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (4)$$

Из этих выражений видно, что для изотропного тела ***главные оси напряженного и деформированного состояний*** **совпадают**, поскольку одновременно с касательными напряжениями обращаются в нуль и угловые деформации.

Подобно тому как угловые деформации не зависят от нормальных напряжений, линейные деформации не зависят от касательных напряжений. Это следует также и из теоремы взаимности работ. Нормальные напряжения не вызывают сдвига, на котором касательные силы могли бы совершить работу, то касательные напряжения не вызывают линейных смещений, на которых могли бы совершить работу нормальные силы.

Закон Гука при одноосном напряженном состоянии можно записать в виде

$$\varepsilon = \sigma / E$$

Воспользуемся этим соотношением и принципом независимости действия сил для того, чтобы получить закон Гука для трехосного напряженного состояния

Рассмотрим малый элемент, показанный на рис. 7. Пусть на элемент действует только напряжение $\sigma_{\boldsymbol{x}} \neq 0$, $\sigma_{\boldsymbol{y}}=0$, $\sigma_{\boldsymbol{z}} = \mathbf{0}$, тогда деформации в направлении координатных осей будут равны:

$$\varepsilon_x' = \frac{\sigma_x}{E};$$

$$\varepsilon_y' = \varepsilon_z' = -\mu\varepsilon_x' = -\frac{\mu\sigma_x}{E},$$

μ - коэффициент Пуассона.

При $\sigma_{\boldsymbol{y}} \neq 0$, $\sigma_{\boldsymbol{x}}=0$, $\sigma_{\boldsymbol{z}} = \mathbf{0}$

$$\varepsilon_y'' = \frac{\sigma_y}{E};$$

$$\varepsilon_x'' = \varepsilon_z'' = -\mu\varepsilon_y'' = -\frac{\mu\sigma_y}{E}.$$

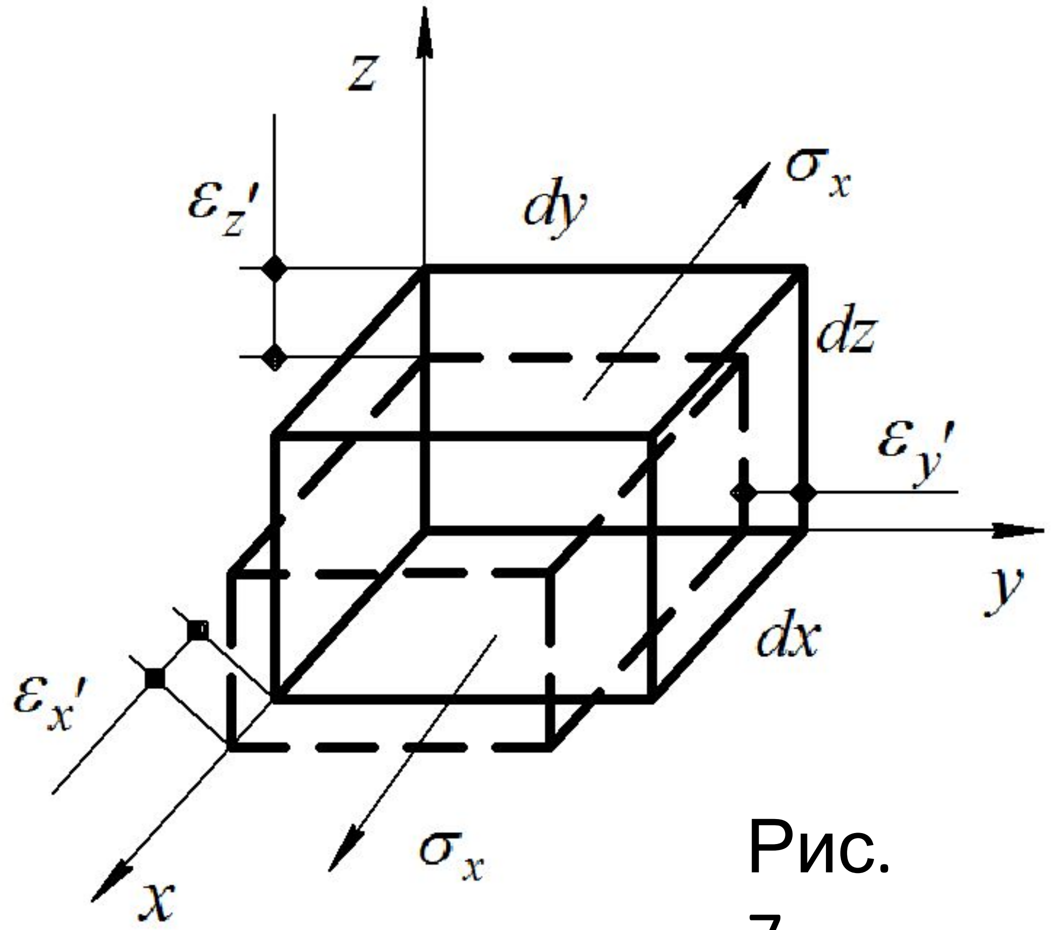

Рис. 7

При $\sigma_z \neq 0$, σ_x=0, $\sigma_y = 0$

$$\varepsilon_z''' = \frac{\sigma_z}{E};$$

$$\varepsilon_x''' = \varepsilon_y''' = -\mu\varepsilon_z''' = -\frac{\mu\sigma_z}{E}.$$

Деформация удлинения в направлении оси *x* при совместном действии всех напряжений будет равна

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x' + \varepsilon_x'' + \varepsilon_x'''.$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu\sigma_y}{E} - \frac{\mu\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

Аналогичным образом определятся деформации в направлении других координатных осей. В итоге получим три уравнения связывающие осевые деформации и нормальные напряжения

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \qquad (5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

Сложив левые и правые части выражений (5), получим выражение объемной деформации

$$e = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) \quad (6)$$

Уравнения (4), (5) и (6), связывающие между собой компоненты тензоров напряжений и деформаций, составляют так называемый ***обобщенный закон Гука*** для изотропного тела. Выражение объемной деформации (6) позволяет установить предельное значение коэффициента Пуассона для любого изотропного материала.

Соотношение (6) справедливо для любого напряженного состояния. Оно применимо, в частности, и для случая $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \boldsymbol{p}$. В этом случае

$$e = 3\frac{1-2\mu}{E}p$$

При положительном ***p*** величина **е** должна быть также положительной, при отрицательном ***p*** изменение объема будет отрицательным. Это возможно только в том случае, если $\mu \leq 0{,}5$. Следовательно, значение **коэффициента Пуассона** для изотропного материала **не может превышать 0,5**.

Полученный вывод, несмотря на то, что он вытекает из частного случая напряженного состояния, является общим.

Потенциальная энергия деформации в общем случае напряженного состояния

Очевидно, **потенциальная энергия**, накопленная в элементарном объеме, **определяется суммой работ** сил, распределенных по поверхности этого объема. Нормальная сила $\sigma_x dydz$ *(рис.7)* на перемещении $\varepsilon_x dx$ совершает работу. Эта работа имеет величину

$$\frac{1}{2}\sigma_x dydz \cdot \varepsilon_x dx$$

где под ε_x понимается относительное удлинение вдоль оси ***x*,** вызванное всеми действующими силами.

Аналогичные выражения работ дают и остальные нормальные составляющие.

Касательная сила $\tau_{zx} dxdy$ на перемещении $\gamma_{zx} dz$ (рис.5) совершит работу

$$\frac{1}{2}\tau_{zx} dydx \cdot \gamma_{zx} dz$$

Выражения остальных слагаемых внутренней энергии получаются простой перестановкой индексов. В итоге имеем

$$dU = \frac{1}{2} dxdydz \left[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{xy}\gamma_{xy} \right]$$

Если энергию отнести к единице объема *dV=dxdydz*, получим

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \left[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{xy}\gamma_{xy} \right]$$

Подставляя в последнее выражение формулы (4) и (5) получим:

$$U_o = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_x^2 + \sigma_z^2 - 2\mu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right),$$

или в главных напряжениях

$$U_o = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)\right] \quad (7)$$

Для того чтобы найти потенциальную энергию во ***всем*** объеме деформированного тела, выражение (7) следует умножить на элементарный объем и проинтегрировать по объему тела:

$$U = \int_V U_o dV$$

Выведем выражения для так называемой ***энергии изменения формы и энергии изменения объема.*** Деление внутренней потенциальной энергии на две указанные составляющие является условным и производится по следующему принципу.

Каждое из главных напряжений представляем в виде суммы двух величин

$$\sigma_1 = p + \sigma_1'; \quad \sigma_2 = p + \sigma_2'; \quad \sigma_3 = p + \sigma_3' \quad (8)$$

в результате чего напряженное состояние разбивается на **два**. Первое из них представляет собой **всестороннее растяжение**, а второе является **дополнительным** к нему до заданного напряженного состояния (рис. 8). Величина ***p*** подбирается с таким расчетом, чтобы изменение объема в дополнительном напряженном состоянии отсутствовало, т. е.

$$\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0$$

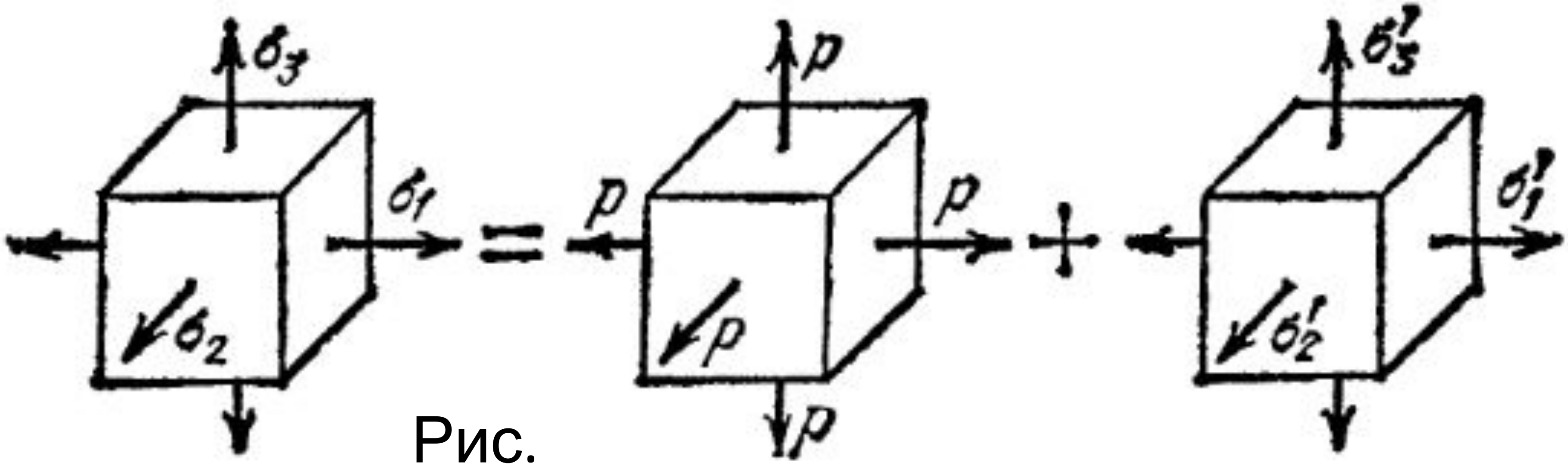

Рис. 8

Складывая выражения (8), получим

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (9)$$

При указанном условии система сил первого напряженного состояния ***(р)*** не производит работы на перемещениях, вызванных силами второго состояния.

Точно так же и силы второго напряженного состояния не производят работы на перемещениях первого. Взаимные работы отсутствуют, и внутренняя энергия разбивается на две части, соответствующие двум напряженным состояниям:

$$U_{об} = U_{ооф} + U$$

где $U_{ооб}$ — энергия изменения объема, а $U_{оф}$ — энергия изменения формы, или ***энергия формоизменения.***

Подставляя в выражение (7) вместо всех главных напряжений величину ***p*** из (9), получим для первого состояния

$$U_{об} = 6\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

Энергию формоизменения найдем, вычитая $U_{oоб}$ из U_o. После несложных преобразований получим

$$U_{ф} = \frac{1+\mu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2)$$

ил

и

$$U_{оф} = \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (10)$$

Для произвольных осей

$$U_{оф} = \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_z - \sigma_y)^2] +$$

$$+ \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right)$$