

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Лекция 14.

Тема: Теорема Гаусса и её применение к расчету электрических полей.

Учебник:

Трофимова Т.И. Курс физики : учеб. пособ. для вузов / Т. И. Трофимова. - М.: Академия, 2007.- с. **152-155.**

**к.ф.-м.н.
Курочкин А.**

Поток вектора напряжённости электрического поля

Исходные посылки:

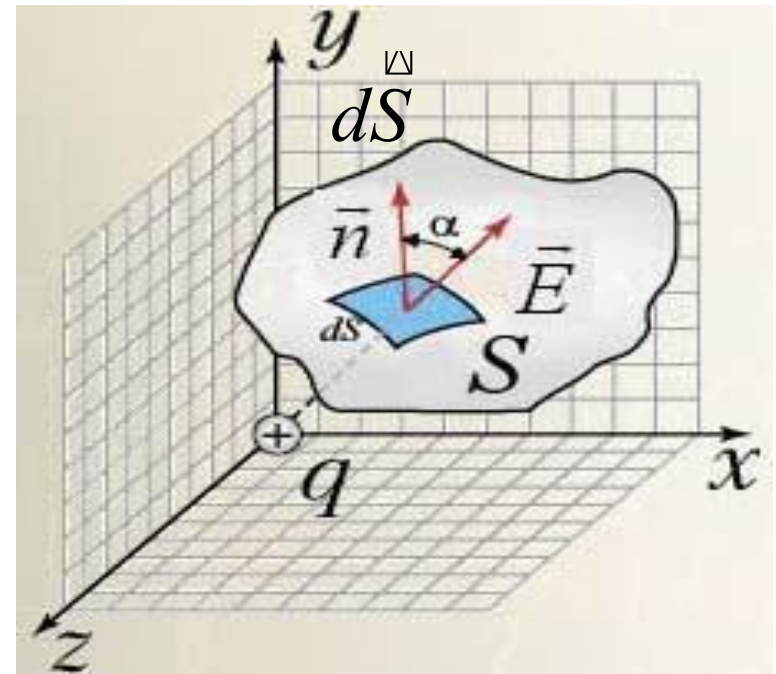
S – поверхность, находящаяся в электрическом поле;

dS – элементарная (бесконечно малая) площадка на этой поверхности (обозначена синим цветом);

\vec{n} – единичный вектор нормали к площадке dS ($|\vec{n}|=1$).

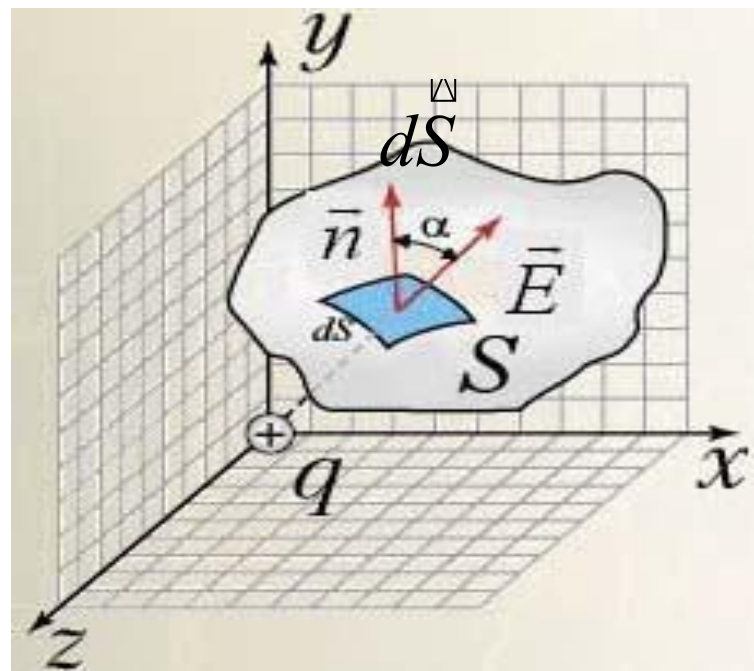
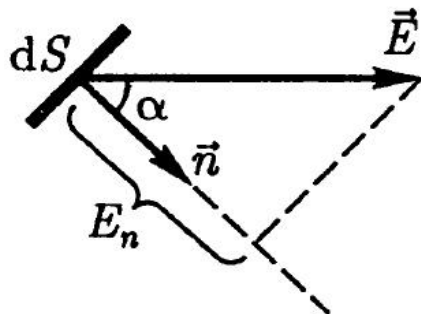
\vec{E} – напряжённость электрического поля в той точке, где находится площадка dS ;

α – угол между векторами \vec{E} и \vec{n} .



По определению

$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ называется **вектором площади поверхности**; по модулю он равен dS , а по направлению совпадает с \vec{n} .



Поток вектора напряженности электрического поля $d\Phi_E$ через элемент поверхности dS – СФВ, равная скалярному произведению вектора напряженности и вектора площади поверхности:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS \cdot \cos \alpha,$$

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \cdot dS \cdot \cos \alpha.$$

$$[\Phi_E] = \frac{H \cdot m^2}{Kл} = B \cdot m.$$

Аддитивность потока вектора напряженности электрического поля.

Предположим, что N зарядов образуют электрическое поле, которое пронизывает площадь поверхности dS . В соответствии с принципом суперпозиции напряженность результирующего поля равна векторной сумме напряженностей полей E_i , создаваемых каждым из N зарядов в отдельности:

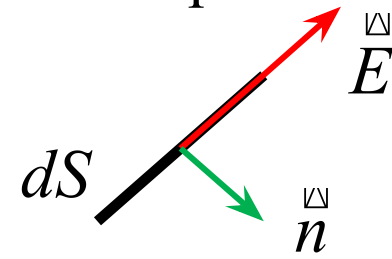
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i.$$

Поэтому, **результирующий** поток вектора напряженности электрического поля равен алгебраической сумме потоков, образованных всеми компонентами:

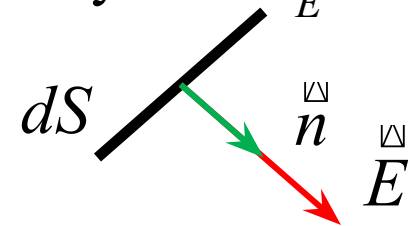
$$\Phi_{\vec{E}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \Phi_{\vec{E}_i}.$$

В каких случаях легко получить аналитическое выражение для потока Φ_E вектора \vec{E} ?

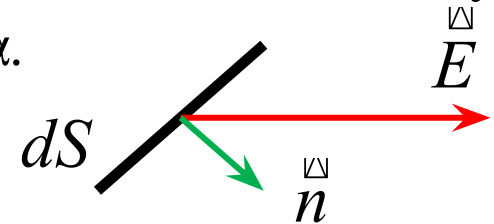
1) Если вектор \vec{E} направлен по касательной к поверхности, то в этом случае $\vec{E} \perp \vec{n}$, $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \Phi_E = 0$;



2) Если вектор \vec{E} во всех точках поверхности имеет одинаковую величину ($E = \text{const}$) и направлен перпендикулярно поверхности ($\vec{E} \parallel \vec{n}$, $\alpha = 0^\circ \Rightarrow \cos \alpha = 1$), в этом случае $\Phi_E = E \cdot S$.



3) Если однородное электрическое поле пронизывает плоскую поверхность S ($\alpha = \text{const}$), тогда $\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos \alpha$.



Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме



Гаусс
Карл Фридрих
(1777 - 1855)

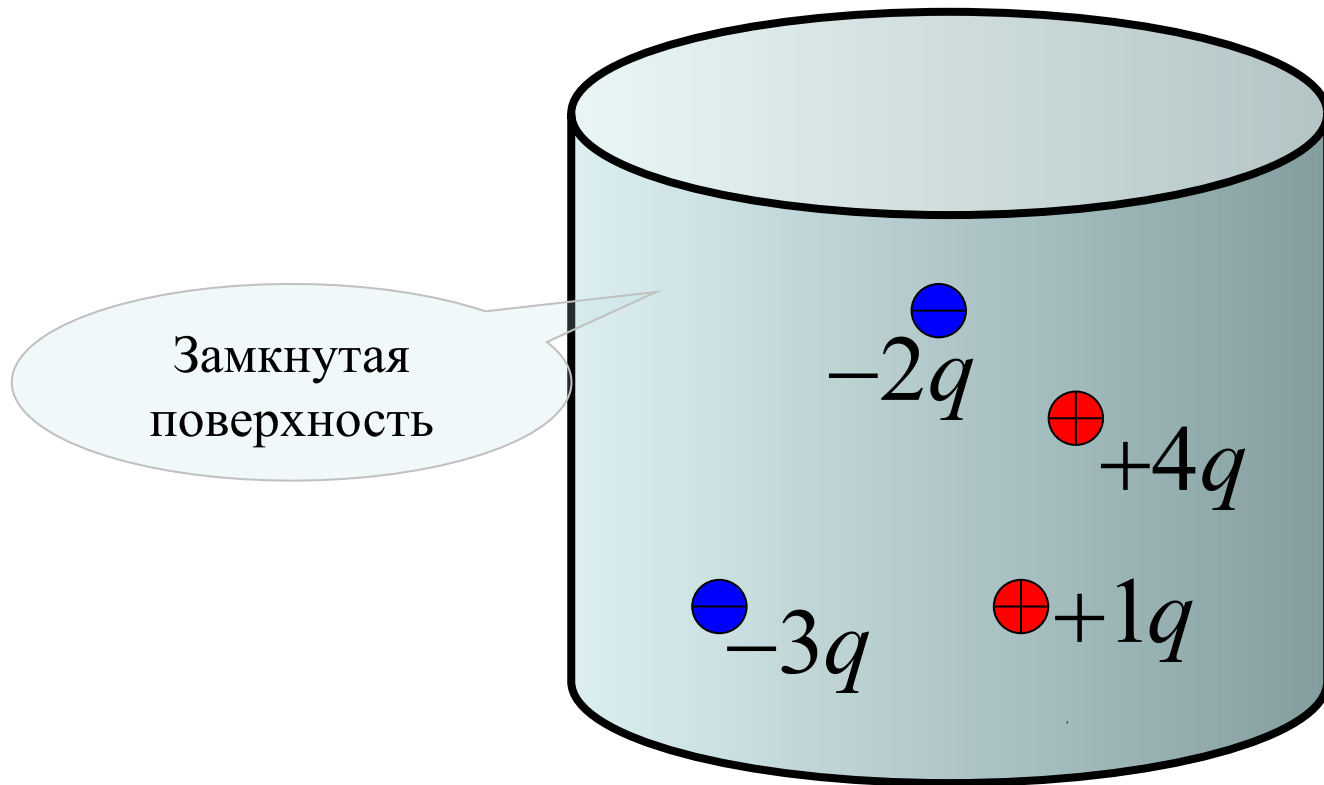
Поток вектора напряжённости электростатического поля в вакууме сквозь **произвольную замкнутую поверхность** равен алгебраической сумме заключённых внутри этой поверхности зарядов, делённой на ϵ_0 электрическую постоянную.

$$\oint_S \vec{E} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_{i\text{охв}}$$

Окружность на символе интеграла означает, что интеграл вычисляется по замкнутой поверхности S .

Теорема Гаусса основывается на законе Кулона и имеет тот же фундаментальный смысл: источниками электрического поля являются электрические заряды. Благодаря этой формуле возможно рассчитать практически любое электростатическое поле, создаваемое любым телом.

Пример нулевого потока



$$\sum_{i=1}^N q_{\text{внутри}} = 0$$

или

$$q_{\text{внутри}} = 0$$

Поток вектора напряжённости через замкнутую поверхность равен **нулю**, если внутри поверхности сумма зарядов равняется нулю, либо электрический заряд изначально **отсутствует** (частный случай)!

Алгоритм расчёта электрического поля с использованием теоремы Гаусса.

Постановка задачи: рассчитаем напряжённость электрического поля, созданного симметричным заряженным телом с заданной плотностью заряда в произвольной точке A .

Алгоритм решения

<i>Формулировка</i>	<i>Пояснение</i>
<i>1. Проанализируем характер симметрии поля:</i>	а) как направлены линии напряжённости? б) на каких поверхностях модуль вектора \vec{E} имеет постоянное значение?
<i>2. Выбрать замкнутую гауссову поверхность так, чтобы:</i>	а) она проходила через точку A ; б) было легко получить аналитическое выражение для потока вектора \vec{E} ; в) было легко рассчитать заряд, охваченный этой поверхностью.

<i>Формулировка</i>	<i>Пояснение</i>
3. Получить выражение для Φ_E	
4. Получить выражение для $\Sigma q_{iохв}$.	
5. Приравнять Φ_E и $\Sigma q_{iохв}$.	
6. Из полученного равенства выразить напряжённость E .	

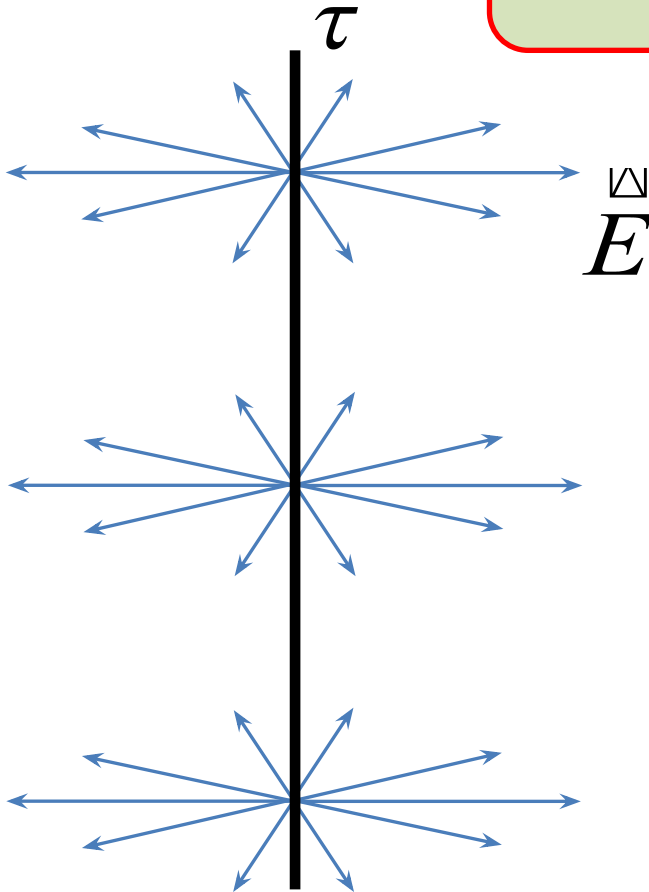
**Расчёт напряжённости электрического поля
бесконечной равномерно заряженной нити (цилиндра)
с линейной плотностью τ .**

τ



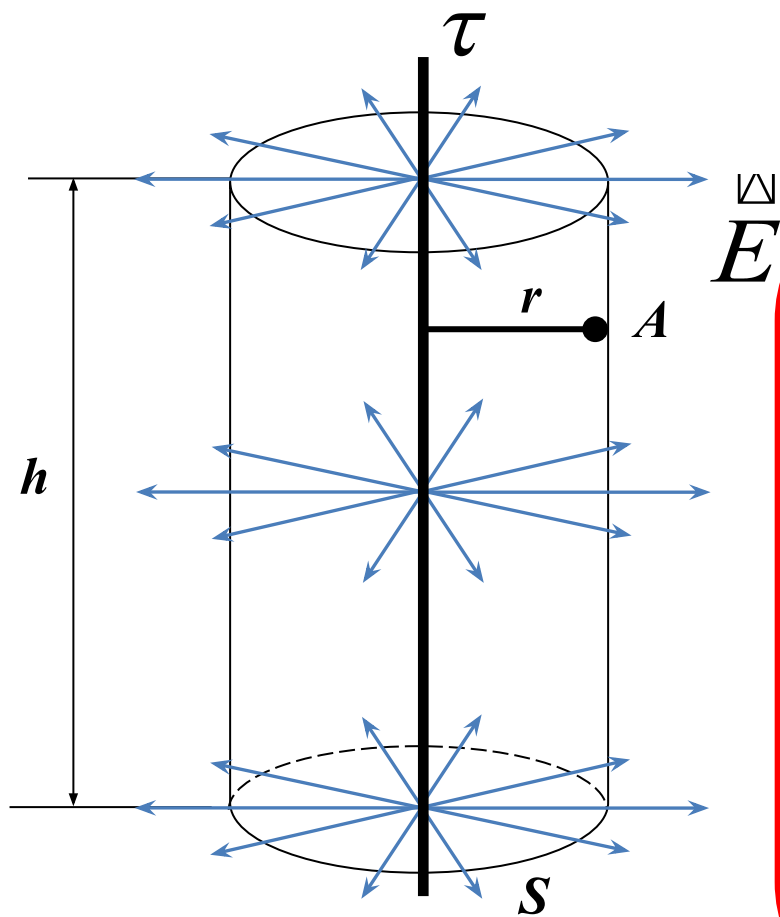
а) Как направлены линии напряжённости?

Линии напряжённости перпендикулярны к нити и симметричны относительно неё.



б) На каких поверхностях модуль вектора E имеет постоянное значение?

в) Какую замкнутую гауссову поверхность выберем?

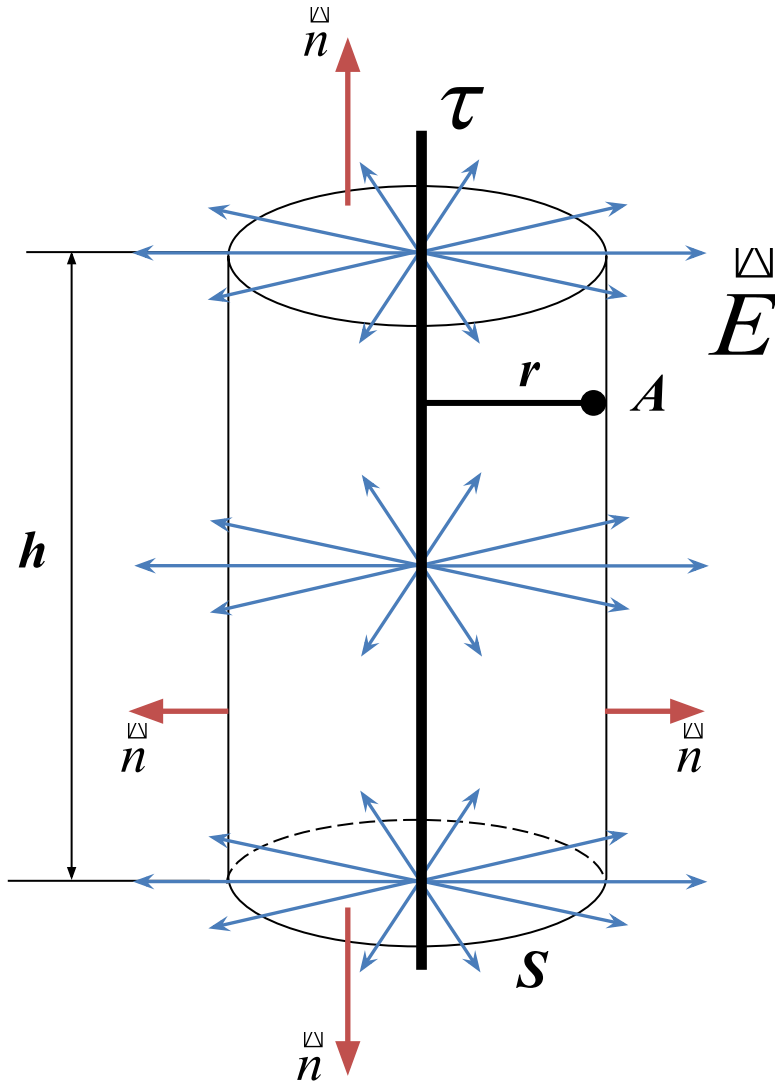


$E = \text{const}$ на цилиндрических поверхностях, ось которых совпадает с нитью.

Выбираем в качестве гауссовой поверхности замкнутый цилиндр радиуса r произвольной высоты h с осью, совпадающей с нитью, т.к. он проходит через точку A .

$$\Phi_E = \Phi_{E_{бок}} + 2\Phi_{E_{тощи}}$$

$$\Phi_E = \int_S E dS = \int_S E dS \cos \alpha$$



- на боковой поверхности цилиндра $E=const$

$$\Phi_E = \int_S E dS \cos \alpha = E \int_S dS \cos \alpha =$$

$E \int_S n$, т.е. $\alpha=0^\circ$, поэтому $\cos \alpha=1$;

$$= E \int_S dS = E \cdot 2\pi r h$$

- на торцевых поверхностях $E \perp n$, $\alpha=90^\circ$, поэтому $\cos \alpha=0$. таким образом, поток E отсутствует.

- линейная плотность заряда $\tau = \frac{q}{h}$

Заряд внутри цилиндра пропорционален h .

- применив теорему Гаусса, получим

$$\Phi_{E_{вс}} = \int_S E dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{1}{\epsilon_0} \tau h$$

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\tau}{2\pi r}$$

Формулы для расчета некоторых электростатических полей в вакууме

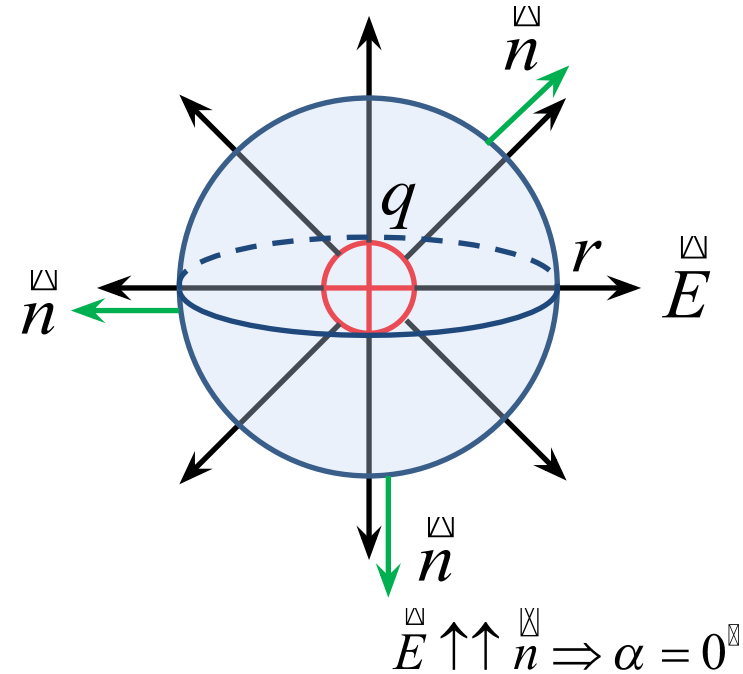
1. Поле точечного заряда

- Поле точечного заряда обладает центральной симметрией;
- Выберем в качестве произвольной замкнутой поверхности сферу радиуса r ;
- Для всех точек этой сферы $E(r) = const$;
- Запишем теорему Гаусса

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} dS = \oint_S E n dS = \oint_S E dS \cos \alpha = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

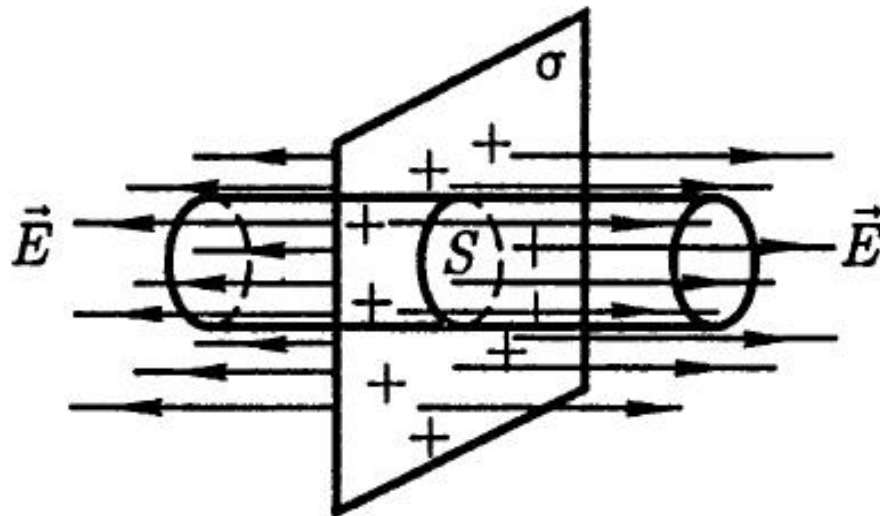


Формулы для расчета некоторых электростатических полей в вакууме

2. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

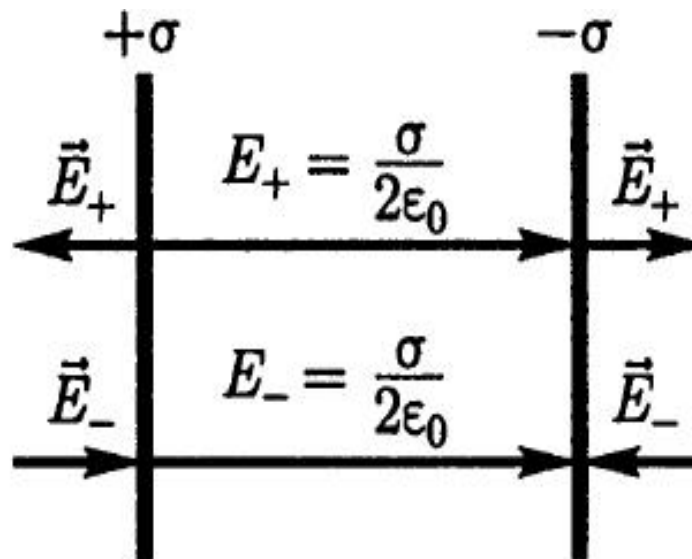
σ – поверхностная плотность заряда



Важно! Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости. Для такой плоскости поверхностная плотность заряда $\sigma = \text{const}$. Линии её эл. ст. поля – прямые, перпендикулярные к ней и направленные от плоскости, если $\sigma > 0$, и к ней, если $\sigma < 0$.

3. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Важно! Поля \vec{E}_+ и \vec{E}_- этих плоскостей за плоскостями противоположно направлены и компенсируют друг друга

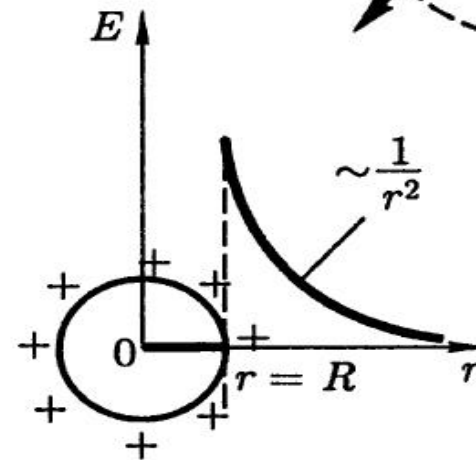
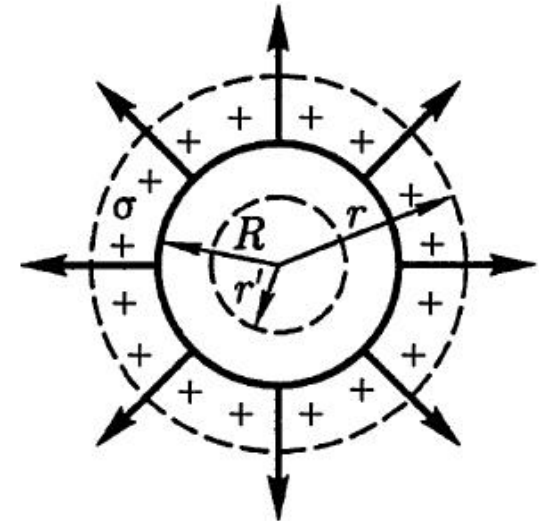
$|\vec{E}_{\text{внеш}}| = E_+ - E_- = 0$; между плоскостями \vec{E}_+ и \vec{E}_- сонаправлены и

$$|\vec{E}_{\text{внутр}}| = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$$

4. Поле равномерно заряженной сферической поверхности

$$1. E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r \geq R) \quad (3);$$
$$2. E = 0 \quad (r < R).$$

График зависимости $E(r)$
приведен на рисунке

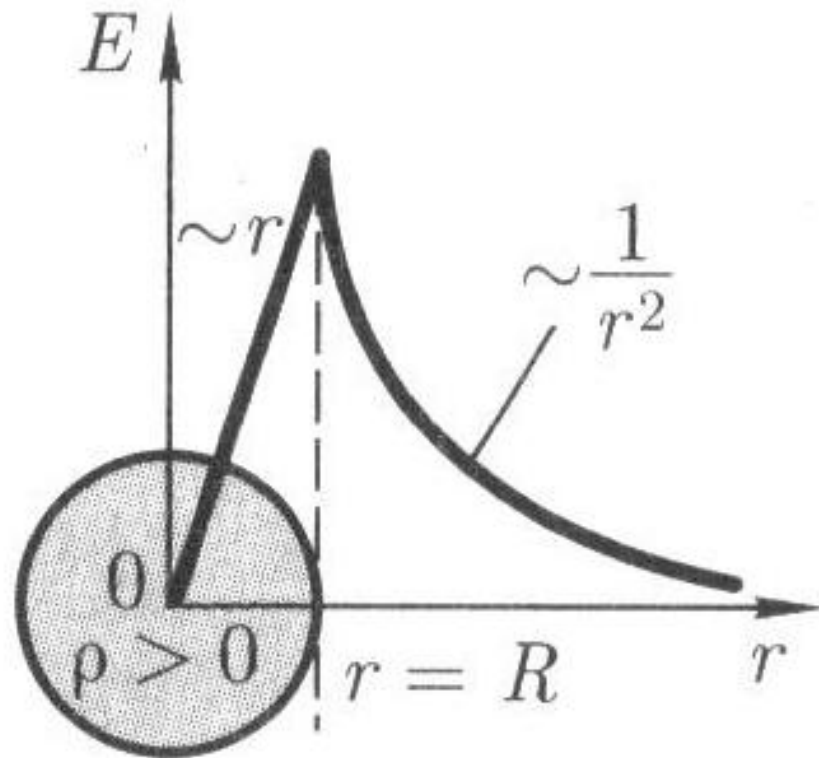


Важно! Если $r < R$, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому внутри равномерно заряженной сферической поверхности электростатическое поле отсутствует ($E=0$).

5. Поле объёмно заряженного шара

$$1. E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r \geq R) \quad (3);$$

$$2. E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{R^3} r \quad (r \leq R) \quad (4)$$



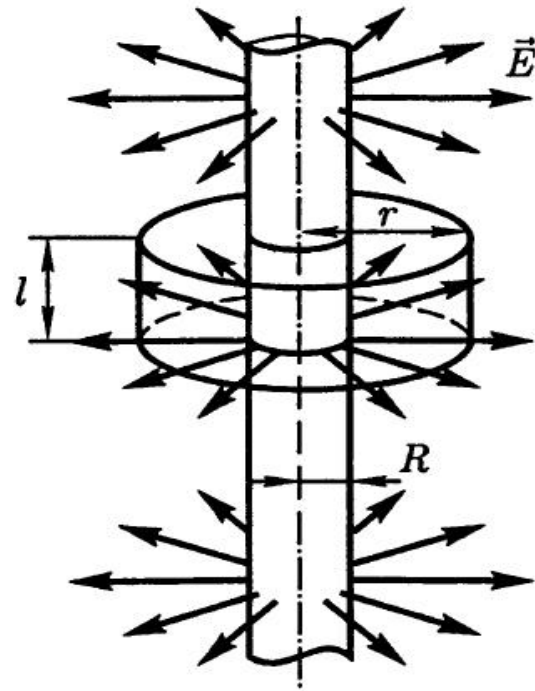
Важно! Напряженность поля вне равномерно заряженного шара описывается формулой (3), а внутри него изменяется линейно с расстоянием r согласно выражению (4).

6. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити)

$$1. E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r} \quad (r > R), \quad (5)$$

$$2. E = 0 \quad (r \leq R)$$

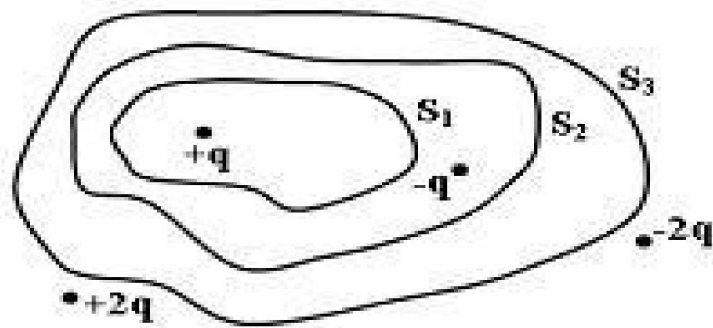
τ – линейная плотность заряда.



Важно! Если $r < R$, то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому в этой области $E=0$. Таким образом, напряженность поля вне равномерно заряженного бесконечного цилиндра определяется выражением (5), внутри же его поле отсутствует.

Пример задачи, решаемой с помощью теоремы Гаусса

Условие задачи. Дана система точечных зарядов в вакууме и замкнутые поверхности S_1 , S_2 и S_3 , причем поверхность S_3 охватывает поверхность S_2 , которая в свою очередь охватывает поверхность S_1 .



Вопрос. Поток напряженности электростатического поля отличен от нуля сквозь...

- поверхность S_1
- поверхность S_3
- поверхность S_2
- поверхность S_4

Решение. Согласно теореме Гаусса поток напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен отношению алгебраической суммы электрических зарядов, охватываемых этой поверхностью, и электрической постоянной ϵ_0 , т.е. $\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$. Из условия видим, что $\sum_{i=1}^N q_i \neq 0$ только для поверхности S_1 , поэтому напряженности электростатического поля отличен от нуля сквозь поверхность S_1 .