ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Лекция 14.

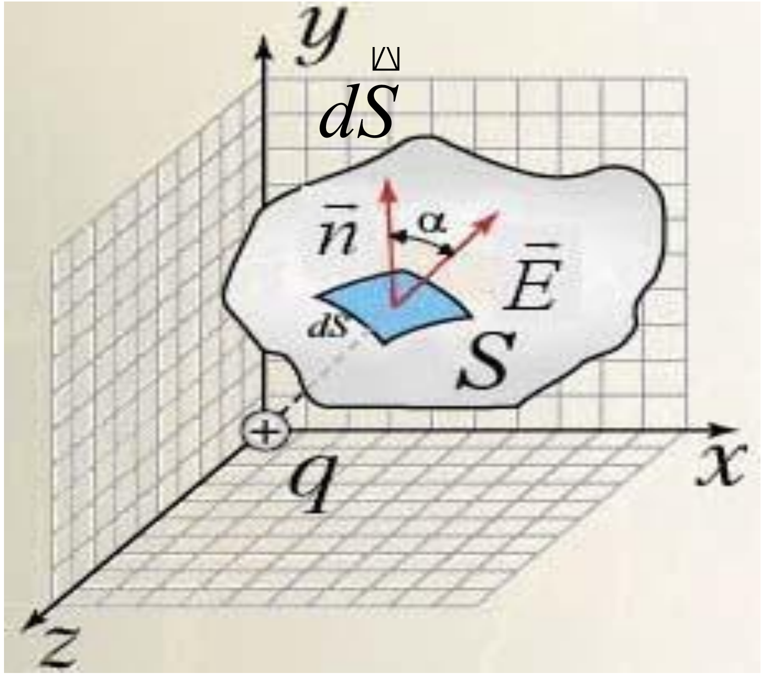
Тема: Теорема Гаусса и её применение к расчету электрических полей.

Учебник:

Трофимова Т.И. Курс физики : учеб. пособ. для вузов / Т. И. Трофимова. - М.: Академия, 2007.- с. 152-155.

к.ф.-м.н.
Курочкин А.

Поток вектора напряжённости электрического поля



Исходные посылки:

S – поверхность, находящаяся в электрическом поле;

dS – элементарная (бесконечно малая) площадка на этой поверхности (**обозначена синим цветом**);

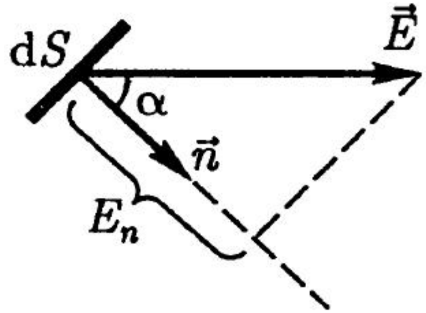
$\vec{n}$ – единичный вектор нормали к площадке dS $\left(|\vec{n}| = 1\right)$.

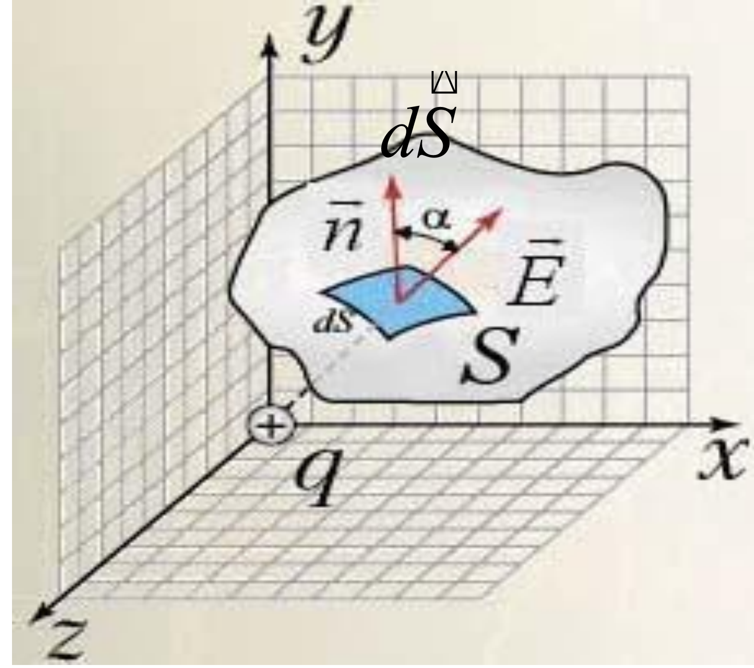
$\vec{E}$ – напряжённость электрического поля в той точке, где находится площадка dS;

α – угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{n}$.

По определению

$d\vec{S} = dS\cdot\vec{n}$ называется **вектором площади поверхности**; по модулю он равен dS, а по направлению совпадает с $\vec{n}$.





Поток вектора напряженности электрического поля $d\Phi_E$ через элемент поверхности dS – СФВ, равная скалярному произведению вектора напряженности и вектора площади поверхности:

$$d\Phi_E = \vec{E}\,d\vec{S} = E\,dS\cos\alpha,$$

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S E\cdot dS\cdot\cos\alpha.$$

$$[\Phi_E] = \frac{Н\cdot м^2}{Кл} = В\cdot м.$$

<u>Аддитивность</u> потока вектора напряженности электрического поля.

Предположим, что N зарядов образуют электрическое поле, которое пронизывает площадь поверхности $d\vec{S}$. В соответствии с <u>принципом суперпозиции</u> напряженность результирующего поля равна векторной сумме напряженностей полей E_i, создаваемых каждым из N зарядов в отдельности:

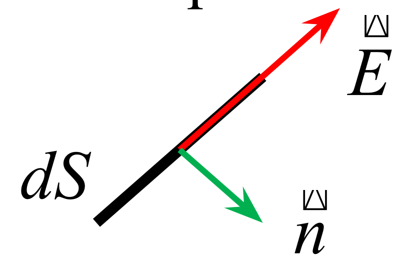
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i.$$

Поэтому, **результирующий *поток вектора напряженности электрического поля*** равен алгебраической сумме потоков, образованных всеми компонентами:

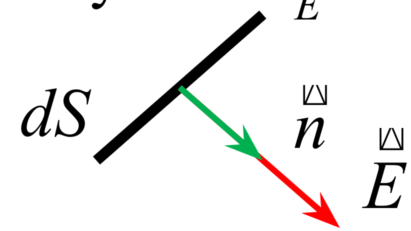
$$d\Phi_{\vec{E}} = \vec{E}d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} d\Phi_{\vec{E}i}.$$

В каких случаях легко получить аналитическое выражение для потока Φ_E вектора $\vec{E}$?

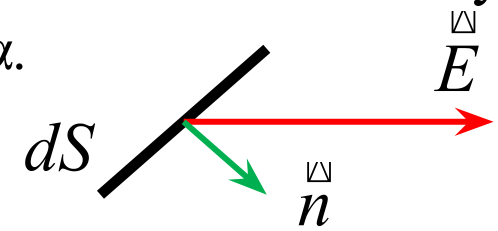
1) Если вектор $\vec{E}$ направлен по касательной к поверхности, то в этом случае $\vec{E} \perp \vec{n}$, $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \Phi_E = 0$;



2) Если вектор $\vec{E}$ во всех точках поверхности имеет одинаковую величину (E=const) и направлен перпендикулярно поверхности $\left(\vec{E} \parallel \vec{n}, \alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 1\right)$, в этом случае $\Phi_E = E\cdot S$.



3) Если однородное электрическое поле пронизывает плоскую поверхность S (α=const), тогда $\Phi_E = E\cdot S\cdot \cos\alpha$.



Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

Гаусс
Карл Фридрих
(1777 - 1855)

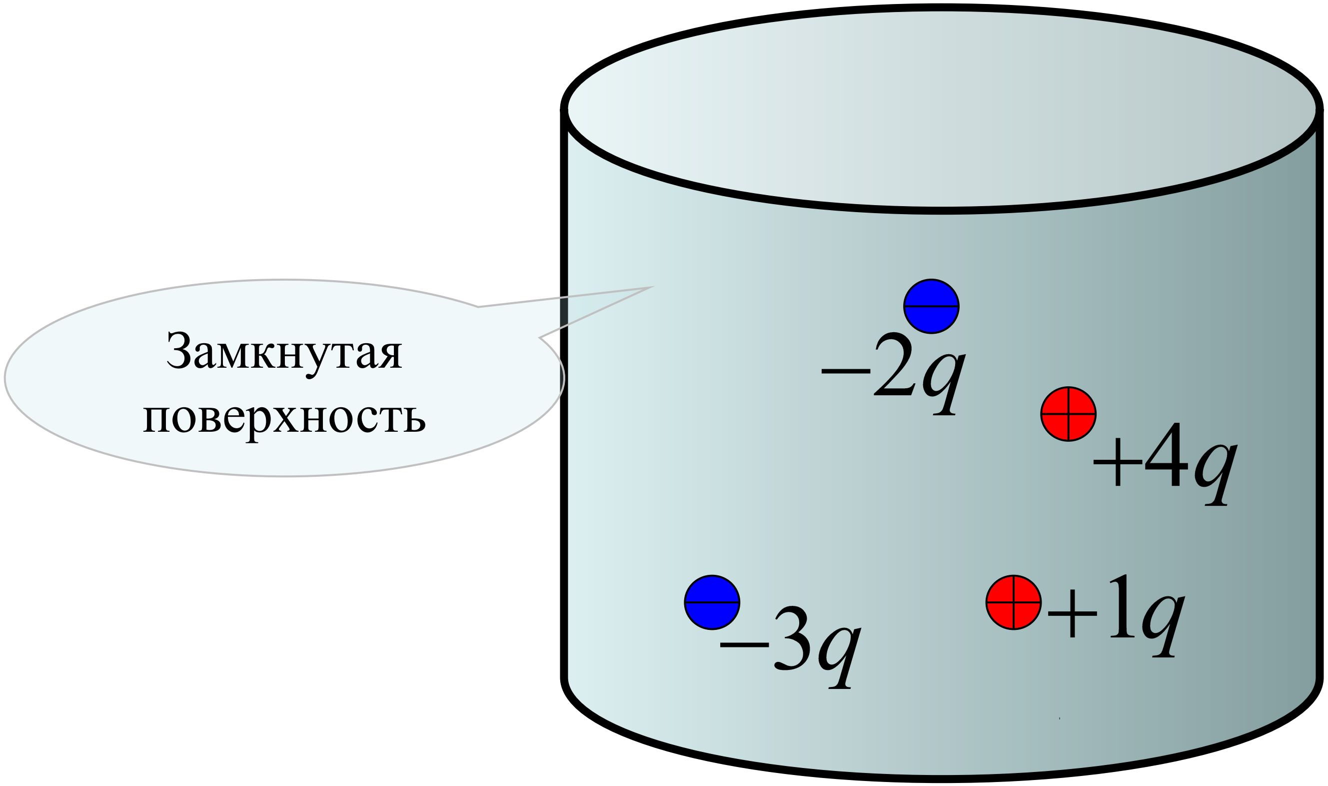
Поток вектора напряжённости электростатического поля <u>в вакууме</u> сквозь **произвольную замкнутую поверхность** равен алгебраической сумме заключённых внутри этой поверхности зарядов, делённой на ε_0 электрическую постоянную.

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_{охв}$$

Окружность на символе интеграла означает, что интеграл вычисляется по замкнутой поверхности *S*.

Теорема Гаусса основывается на законе Кулона и имеет тот же фундаментальный смысл: ***<u>источниками электрического поля является электрические заряды</u>***. Благодаря этой формуле возможно рассчитать практически любое электростатическое поле, создаваемое любым телом.

Пример нулевого потока



$$\sum_{i=1}^{N} q_{внутри} = 0$$

или

$$q_{внутри} = 0$$

Поток вектора напряжённости через замкнутую поверхность равен **нулю**, если внутри поверхности сумма зарядов равняется нулю, либо **электрический заряд** изначально **отсутствует** *(частный случай)*!

Алгоритм расчёта электрического поля с использованием теоремы Гаусса.

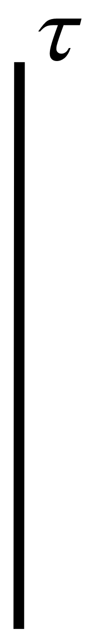
Постановка задачи: рассчитаем напряжённость электрического поля, созданного симметричным заряженным телом с заданной плотностью заряда в произвольной точке A.

Алгоритм решения

Формулировка	***Пояснение***
1. Проанализируем характер симметрии поля:	а) как направлены линии напряжённости? б) на каких поверхностях модуль вектора $\vec{E}$ имеет постоянное значение?
2. Выбрать замкнутую гауссову поверхность так, чтобы:	а) она проходила через точку A; б) было легко получить аналитическое выражение для потока вектора $\vec{E}$; в) было легко рассчитать заряд, охваченный этой поверхностью.

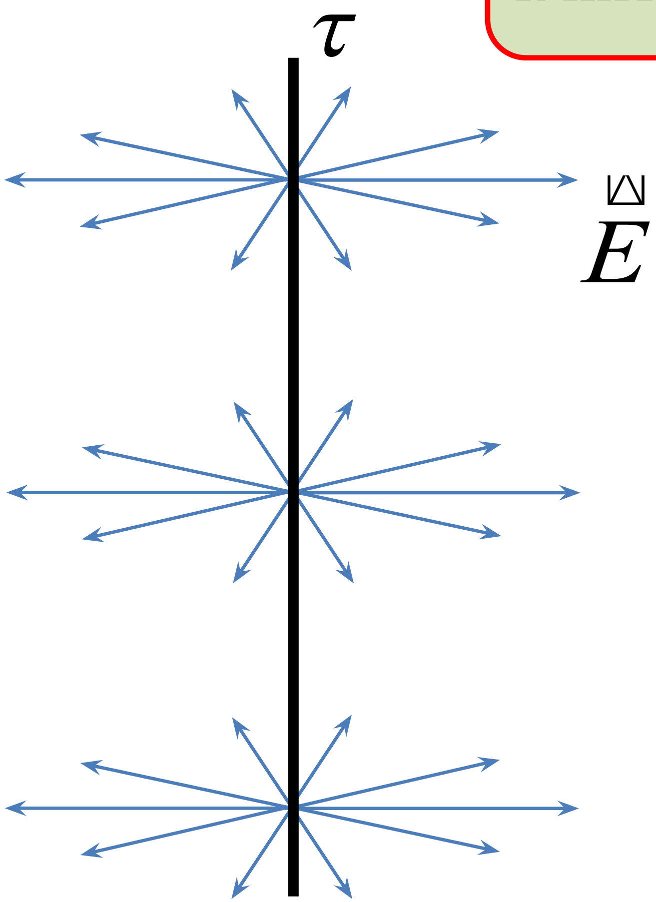
Формулировка	**Пояснение**
3. Получить выражение для Φ_E.	
4. Получить выражение для $\Sigma q_{i охв}$.	
5. Приравнять Φ_E и $\Sigma q_{i охв}$.	
6. Из полученного равенства выразить напряжённость E.	

Расчёт напряжённости электрического поля бесконечной равномерно заряженной нити (цилиндра) с линейной плотностью τ.



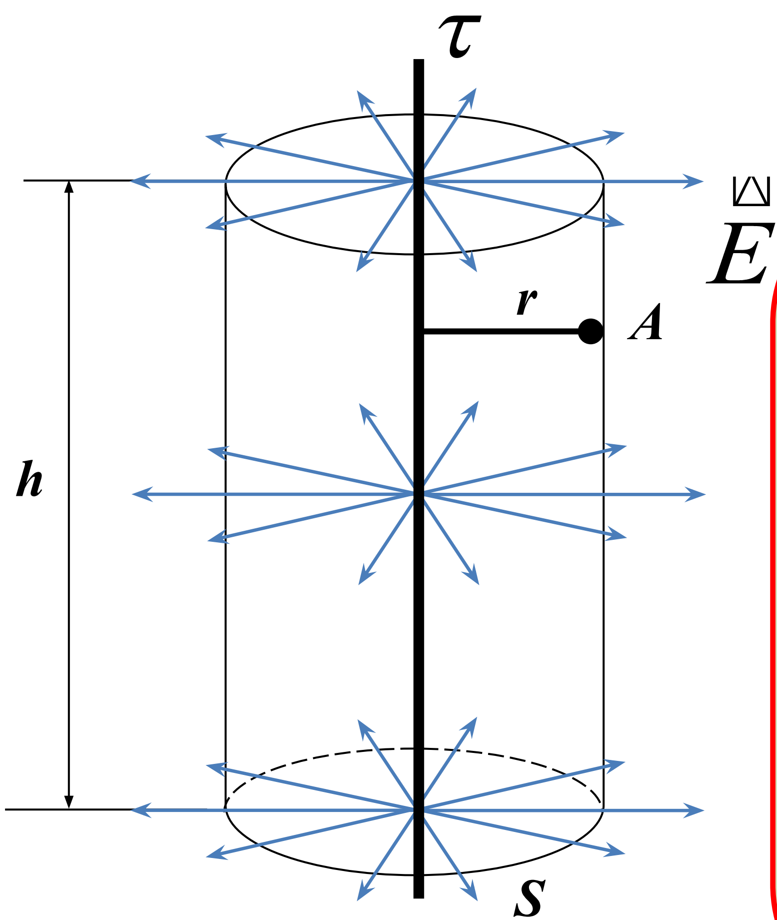
а) Как направлены линии напряжённости?

Линии напряжённости перпендикулярны к нити и симметричны относительно неё.



б) На каких поверхностях модуль вектора имеет постоянное значение?

в) Какую замкнутую гауссову поверхность выберем?

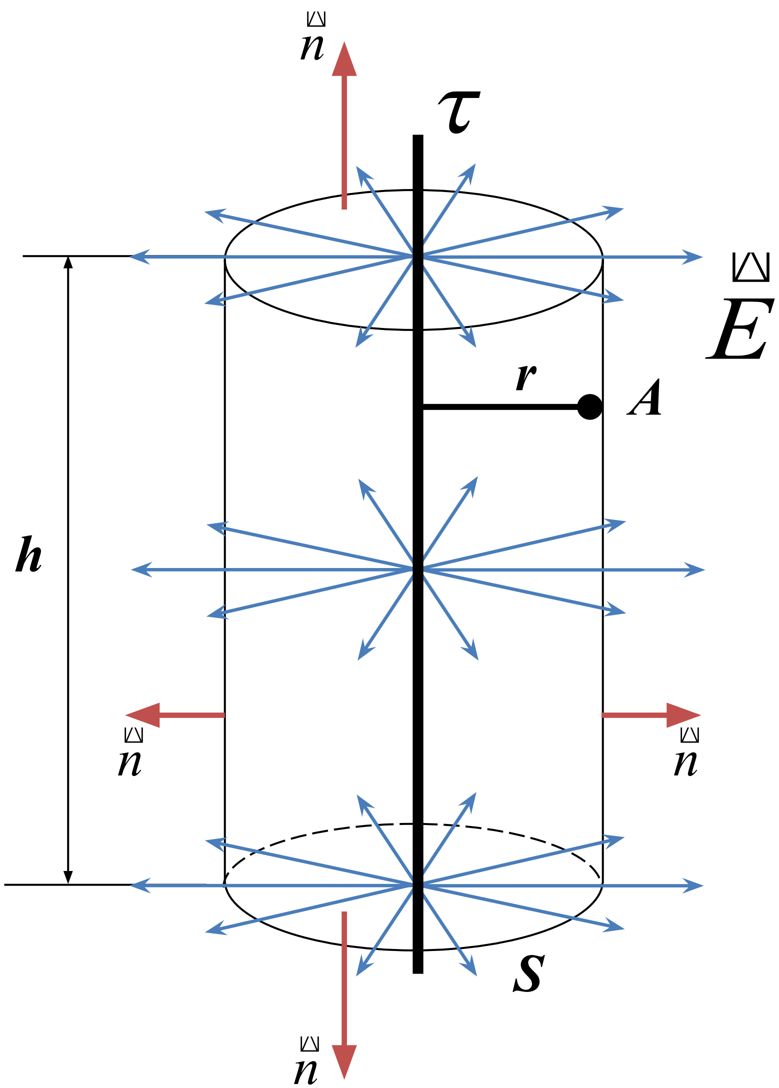


E=const на цилиндрических поверхностях, ось которых совпадает с нитью.

Выбираем в качестве гауссовой поверхности замкнутый цилиндр радиуса *r* произвольной высоты *h* с осью, совпадающей с нитью, т.к. он проходит через точку *A*.

$$\Phi_{E} = \Phi_{E\,бок} + 2\Phi_{E\,торц}$$

$$\Phi_{E} = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S E dS \cos\alpha$$



- на боковой поверхности цилиндра $E=const$

$$\Phi_{E} = \int_S E dS \cos\alpha = E\int_S dS \cos\alpha =$$

$\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{n}$, т.е. $\alpha=0^0$, поэтому $cos\alpha=1$;

$$= E\int_S dS = E\cdot 2\pi r h$$

- на торцевых поверхностях $\vec{E} \perp \vec{n}$, $\alpha=90^0$, поэтому $cos\alpha=0$. таким образом, поток E отсутствует.

- линейная плотность заряда $\tau = \dfrac{q}{h}$

Заряд <u>внутри цилиндра</u> пропорционален h.

- применив теорему Гаусса, получим

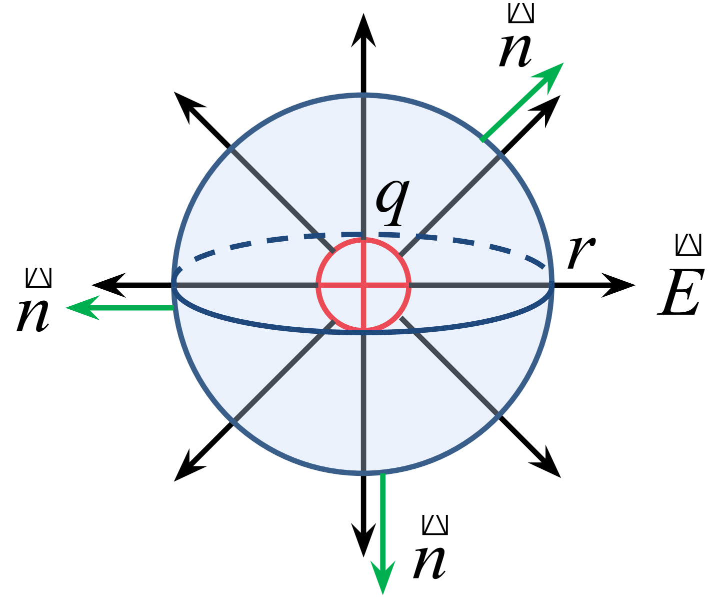
$$\Phi_{Eхв} = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i$$

$$E\cdot 2\pi r h = \frac{1}{\varepsilon_0}\tau h$$

$$\boxed{E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\tau}{2\pi r}}$$

Формулы для расчета некоторых электростатических полей в вакууме

1. Поле точечного заряда



- Поле точечного заряда обладает центральной симметрией;
- Выберем в качестве произвольной замкнутой поверхности сферу радиуса r;
- Для всех точек этой сферы *E(r)=const*;
- Запишем теорему Гаусса

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{n} \Rightarrow \alpha = 0^\circ$$

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \vec{E}\vec{n} dS = \oint_S E dS \cos\alpha = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2$$

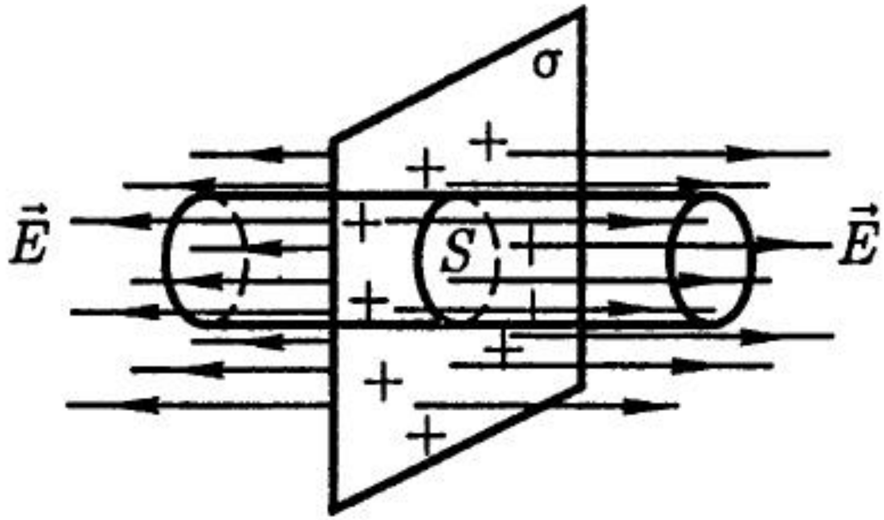
$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}$$

Формулы для расчета некоторых электростатических полей в вакууме

2. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

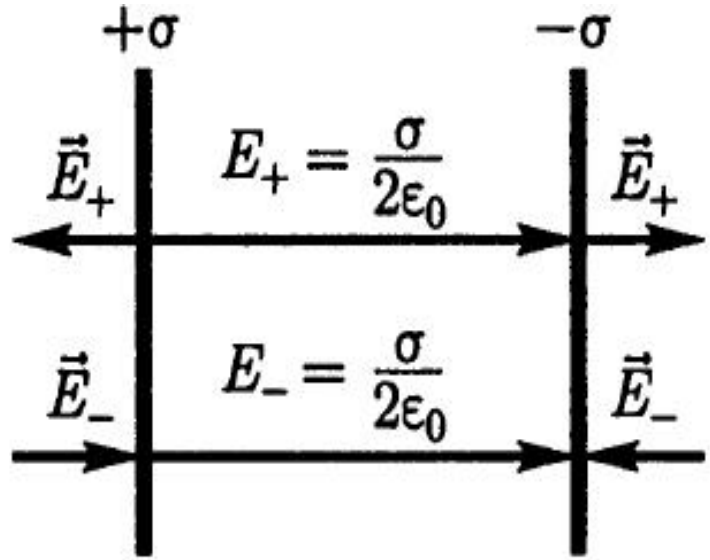
σ – *поверхностная плотность заряда*



Важно! Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости. Для такой плоскости поверхностная плотность заряда σ=const. Линии её эл. ст. поля – прямые, перпендикулярные к ней и направленные от плоскости, если σ>0, и к ней, если σ<0.

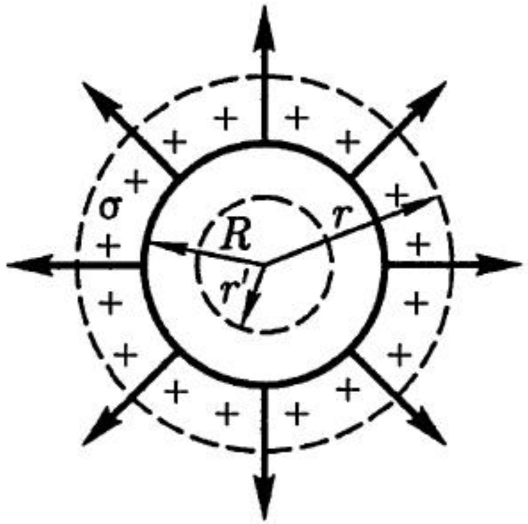
3. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Важно! Поля $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ этих плоскостей за плоскостями противоположно направлены и компенсируют друг друга $\left|\vec{E}_{внеш}\right| = E_+ - E_- = 0$; между плоскостями $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ сонаправлены и $\left|\vec{E}_{внутр}\right| = E_+ - E_- = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$.

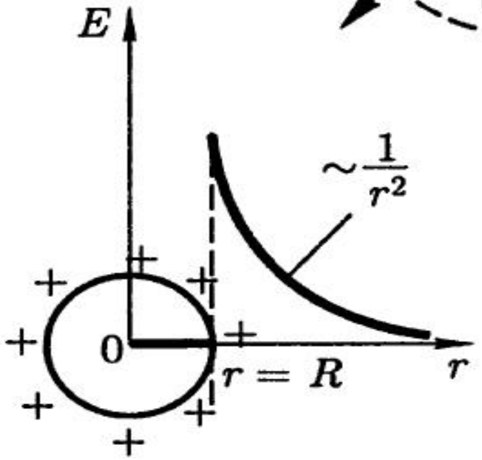
4. Поле равномерно заряженной сферической поверхности



$$1.\ E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\qquad (r\geq R)\qquad (3);$$

$$2.\ E=0\qquad (r<R).$$

График зависимости E(r) приведен на рисунке

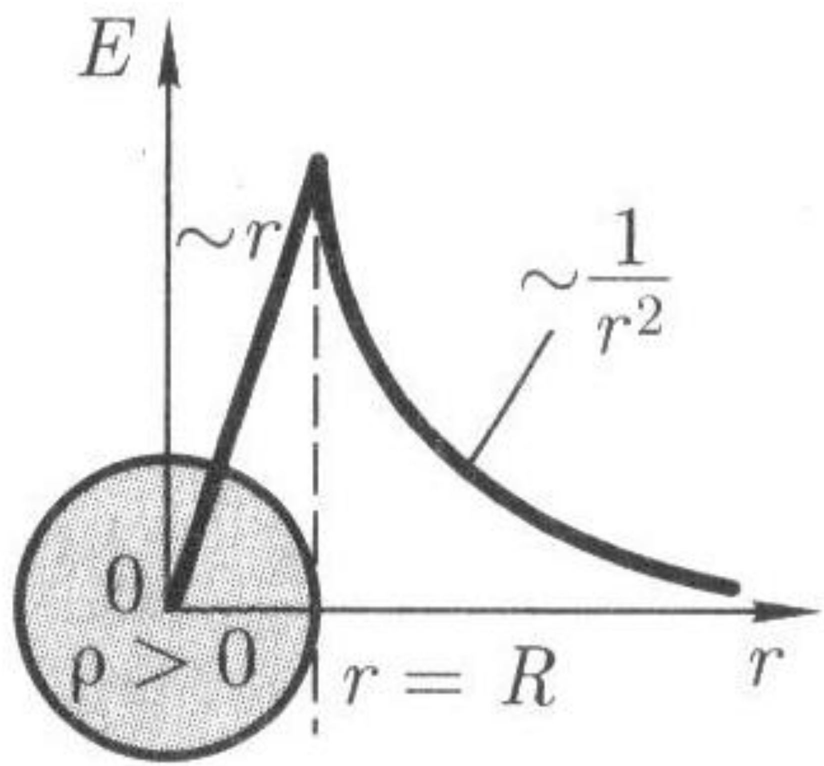


Важно! Если *r*<*R*, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому внутри равномерно заряженной сферической поверхности электростатическое поле отсутствует (*E*=0).

5. Поле объёмно заряженного шара

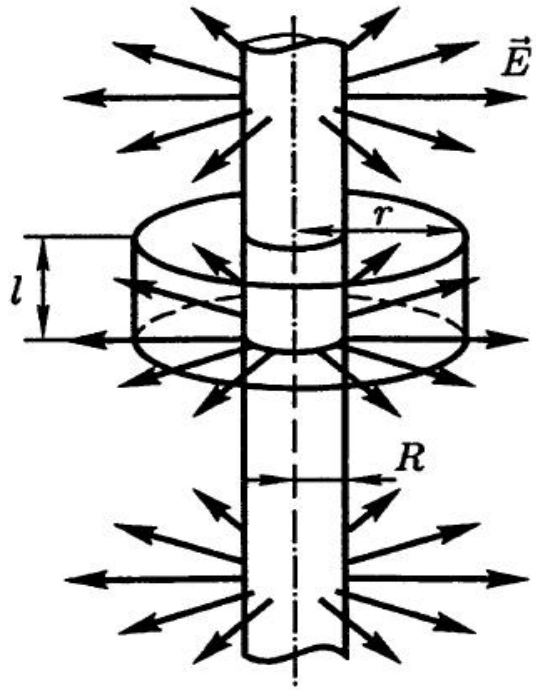
$$1.\ E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad (r \geq R) \quad (3);$$

$$2.\ E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{R^3}r \quad (r \leq R)\ (4)$$



Важно! Напряженность поля вне равномерно заряженного шара описывается формулой (3), а внутри него изменяется линейно с расстоянием *r* согласно выражению (4).

6. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити)



$$1.\ E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r} \quad (r > R), (5)$$

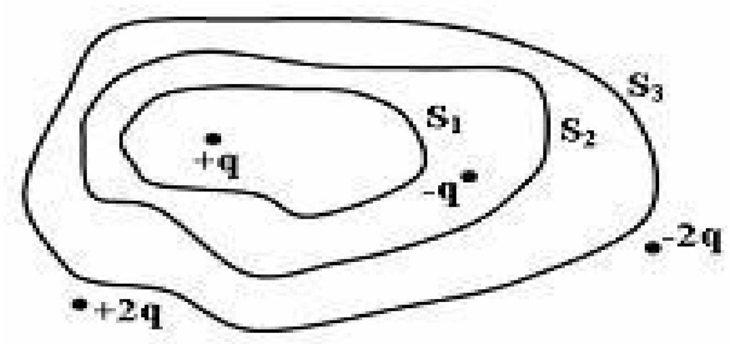
$$2.\ E = 0 \quad (r \le R)$$

τ – *линейная плотность заряда.*

Важно! Если $r<R$, то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому в этой области E=0. Таким образом, напряженность поля вне равномерно заряженного бесконечного цилиндра определяется выражением (5), внутри же его поле отсутствует.

Пример задачи, решаемой с помощью теоремы Гаусса

Условие задачи. Дана система точечных зарядов в вакууме и замкнутые поверхности S_1, S_2 и S_3, причем поверхность S_3 охватывает поверхность S_2, которая в свою очередь охватывает поверхность S_1.



Вопрос. Поток напряженности электростатического поля **отличен от нуля** сквозь…

-поверхность S_1

-поверхность S_3

-поверхность S_2

-поверхность S_4

Решение. Согласно теореме Гаусса поток напряжённости электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен отношению алгебраической суммы электрических зарядов, охватываемых этой поверхностью, и электрической постоянной ε_0, т.е. $\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i$. Из условия видим, что $\sum_{i=1}^{N} q_i \neq 0$ только для поверхности S_1, поэтому напряженности электростатического поля отличен от нуля сквозь **поверхность S_1.**