

# ***Особенности математических моделей влияющий на выбор методов***

В автоматизированных проектных процедурах в место еще несуществующего проектируемого объекта оперируют некоторым квазиобъектом-моделью, которая отражает некоторые интересующие исследователя свойства объекта. Модель может быть физическим объектом (макет ,стенд) или спецификацией. Среди моделей-спецификаций различают упомянутые выше

функциональные, поведенческие, информационные, структурные модели (описания). Эти модели называют математическими, если они формализованы средствами аппарата и языка математики.

В свою очередь, математические модели могут быть геометрическими, топологическими, динамическими, логическими и т.п., если они отражают соответствующие свойства объектов.

Математическая функциональная модель в общем случае представляет собой алгоритм вычисления вектора выходных параметров  $Y$  при заданных векторах параметров элементов  $X$  и внешних параметров  $Q$ . Математические модели могут быть символическими и численными. При использовании символических моделей оперируют не значениями величин, а их символическими обозначениями (идентификаторами). Численные модели могут быть аналитическими, т.е. их можно представить в виде явно выраженных зависимостей выходных параметров  $Y$  от параметров внутренних  $X$  и внешних  $Q$ , или алгоритмическими, в которых связь  $Y$ ,  $X$  и  $Q$  задана неявно в виде алгоритма моделирования. Важнейший частный случай алгоритмических моделей - имитационные, они отображают процессы в системе при наличии внешних воздействий на систему. Другими словами, имитационная модель - это алгоритмическая поведенческая модель. Классификацию математических моделей выполняют также по ряду других признаков. Так, в зависимости от принадлежности к тому или иному иерархическому уровню выделяют модели уровней системного, функционально логического, макроуровня (сосредоточенного) и микроуровня (распределенного).

По характеру используемого для описания математического аппарата различают модели лингвистические, теоретико-множественные, абстрактно-алгебраические, нечеткие, автоматные и т.п.

Например, на системном уровне преимущественно применяют модели систем массового обслуживания и сети Петри, на функционально-логическом уровне

-автоматные модели на основе аппарата передаточных функций или конечных автоматов, на макроуровне-системы алгебраических и дифференциальных уравнений, на микроуровне-дифференциальные уравнения в частных производных. Особое место занимают геометрические модели, используемые в системах конструирования.

Кроме того, введены понятия полных моделей и макромоделей, моделей статических и динамических, детерминированных и стохастических, аналоговых

и дискретных, символических и численных.

Полная модель объекта в отличие от макромодели описывает не только процессы на внешних выводах моделируемого объекта, но и внутренние для

объекта процессы.

Статические модели описывают статические состояния, в них не присутствует время в качестве независимой переменной. Динамические модели отражают поведение системы, т.е. в них обязательно используется время.

Стохастические и детерминированные модели различают в зависимости от учета или не учета случайных факторов.

В аналоговых моделях фазовые переменные-непрерывные величины, в дискретных-дискретные, в частном случае дискретные модели являются логическими(булевыми), в них состояние системы и ее элементов описывается

булевыми величинами. В ряде случаев полезно применение смешанных моделей, в которых одна часть подсистем характеризуется аналоговыми моделями, другая-логическими.

## Методы и алгоритмы анализа на макроуровне

Анализ процессов в проектируемых объектах можно проводить во временной и частотной областях. Анализ во временной области (динамический анализ) позволяет получить картину переходных процессов, оценить динамические свойства объекта, он является важной процедурой при исследовании как линейных, так и нелинейных систем. Анализ в частотной области более специфичен, его применяют, как правило, к объектам с линеаризуемым и математическим и моделями при исследовании колебательных стационарных процессов, анализе устойчивости, расчете искажений информации, представляемой спектральными составляющими сигналов, ит.п.

Методы анализа во временной области, используемые в универсальных программах анализа в САПР, — это численные методы интегрирования систем обыкновенных дифференциальных ур  $F(dV/dt, V, t) = 0$ . У): Другими словами, это методы алгебраизации дифференциальных уравнений. Формулы интегрирования СОДУ могут входить в математическую модель независимо от компонентных уравнений, или быть интегрированным и в математические модели компонентов.

От выбора метода решения СОДУ существенно зависят такие характеристики анализа, как точность и вычислительная эффективность. Эти характеристики определяются прежде всего типом и порядком выбранного метода интегрирования СОДУ.

Применяют два типа методов интегрирования — явные (иначе экстраполяционные, или методы, основанные на формулах интегрирования вперед) и неявные (интерполяционные, основанные на формулах интегрирования назад). Различия между ними удобно показать на примере простейших методов первого порядка — методов Эйлера.

Формула явного метода Эйлера собой следующую формулу

$$dV/dt|_n \approx (V_{n+1} - V_n)/h_n.$$

замены производных в точке  $t_n$  :

Здесь индекс равен номеру шага интегрирования;  $h_n = t_{n+1} - t_n$  — размер шага интегрирования (обычно  $h_n$  называют просто шагом интегрирования).

В формуле  *неявного метода Эйлера*  использовано дифференцирование назад:

$$dV/dt|_n = (V_n - V_{n-1})/h_n,$$

где  $h_n = t_n - t_{n-1}$ .

### **Алгоритм численного интегрирования СОДУ**

Одна из удачных реализаций неявного метода второго порядка, которую можно считать модификацией  *метода трапеций* , основана на комбинированном использовании явной и неявной формул Эйлера. Рассмотрим вопрос, почему такое комбинирование снижает погрешность и приводит к повышению порядка метода.

Предварительно отметим, что в методах  $p$ -го порядка локальная погрешность, т. е. погрешность, допущенная на одном  $n$ -м шаге интегрирования, оценивается старшим из отбрасываемых членов

$$d = c|V^{(p+1)}(\tau)| h^{p+1}$$



в разложении решения  $V(t)$  в ряд Тейлора, где  $c$  — постоянный коэффициент, зависящий от метода;  $|V^{(p+1)}(\tau)|$  — норма вектора  $(p+1)$ -х производных  $V(t)$ , которая оценивается с помощью конечно-разностной аппроксимации;  $\tau$  — значение времени  $t$  внутри шага.

Если  $n$ -й шаг интегрирования в комбинированном методе был неявным, т. е. выполненным по неявной формуле, то следующий шаг с тем же значением  $h$  должен быть явным. Используя разложение решения  $V(t)$  в ряд Тейлора в окрестностях точки  $t_{n+1}$ , получаем для  $(n+1)$ -го неявного шага

$$V(t_n) = V(t_{n+1}) - (dV/dt)h_n + (d^2V/dt^2)h_n^2/2! - (d^3V/dt^3)h_n^3/3! + \dots \quad (3.28)$$

и для  $(n+2)$ -го явного шага

$$V(t_{n+2}) = V(t_{n+1}) + (dV/dt)h_x + (d^2V/dt^2)h_x^2/2! + (d^3V/dt^3)h_x^3/3! + \dots, \quad (3.29)$$

где  $h_n$  и  $h_x$  — величины неявного и явного шагов, а значения производных относятся к моменту  $t_{n+1}$ . Подставляя (3.28) в (3.29), при  $h = h_x = h_n$  получаем

$$V(t_{n+2}) = V(t_n) + 2(dV/dt)h + 2(d^3V/dt^3)h^3/3! + \dots,$$

т. е. погрешности, обуславливаемые квадратичными членами в (3.28) и (3.29), взаимно компенсируются и старшим из отбрасываемых членов становится член с  $h^3$ . Следовательно, изложенное комбинирование неявной и явной формул Эйлера дает метод интегрирования второго порядка.

# Методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений

Вычисления при решении СОДУ состоят из нескольких вложенных один в другой циклических процессов. Внешний цикл—это цикл пошагового численного интегрирования, параметром цикла является номер шага. Если модель анализируемого объекта нелинейна, то на каждом шаге выполняется промежуточный цикл—итерационный цикл решения системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ). Параметр цикла—номер итерации. Во внутреннем цикле решается СЛАУ. Для решения СНАУ можно применять прямые итерационные методы, та-кие, как метод простой итерации или метод Зейделя, но в современных программах анализа наибольшее распространение получил метод Ньютона, основанный на линеаризации СНАУ.

Представим СНАУ в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0. \quad (3.30)$$

Разлагая  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  в ряд Тейлора в окрестностях некоторой точки  $\mathbf{X}_k$ , получаем

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_k) + (\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X})(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) + (\mathbf{X} - \mathbf{X}_k)^T (\partial^2\mathbf{F}/\partial\mathbf{X}^2)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k)/2 + \dots = 0.$$

Сохраняя только линейные члены, имеем СЛАУ с неизвестным вектором  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{Y}_k(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) = -\mathbf{F}(\mathbf{X}_k), \quad (3.31)$$

где  $\mathbf{Y}_k = (\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X})|_k$ . Решение системы (3.31) дает очередное приближение к корню системы (3.30), которое удобно обозначить  $\mathbf{X}_{k+1}$ .

Вычислительный процесс стартует с начального приближения  $\mathbf{X}_0$  и в случае сходимости итераций заканчивается, когда погрешность, оцениваемая как

$$|\Delta\mathbf{X}_k| = |\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}|,$$

# Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

В программах анализа в САПР для решения СЛАУ чаще всего применяют метод Гаусса или его разновидности. *Метод Гаусса* – метод последовательного исключения неизвестных из системы уравнений. При исключении  $k$ -й неизвестной  $x_k$  из системы уравнений

$$AX = B \quad (3.32)$$

все коэффициенты  $a_{ij}$  при  $i > k$  и  $j > k$  пересчитывают по формуле

$$a_{ij} := a_{ij} - a_{ik} a_{kj} / a_{kk}. \quad (3.33)$$

Исключение  $n - 1$  неизвестных, где  $n$  – порядок системы (3.32), называют прямым ходом, в процессе которого матрица коэффициентов приобретает треугольный вид. При обратном ходе последовательно вычисляют неизвестные, начиная с  $x_n$ .

# Методы анализа на микроуровне

В САПР решение дифференциальных или интегродифференциальных уравнений с частными производными выполняется численными методами. Эти методы основаны на дискретизации независимых переменных—их представлении конечным множеством значений в выбранных узловых точках

исследуемого пространства . Эти точки рассматриваются как узлы некоторой сетки, поэтому используемые в САПР методы—это сеточные методы.

Среди сеточных методов наибольшее распространение получили два метода: метод конечных разностей(МКР ) и МКЭ . Обычно выполняют дискретизацию пространственных независимых переменных, т.е. Используют пространственную сетку. В этом случае результатом дискретизации является СОДУ

для задачи не  
уравнении ,  
уравнение

$$LV(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z})$$

ти система алгебраических  
й. Пусть необходимо решить

с заданными краевыми условиями

$$MV(\mathbf{z}) = y(\mathbf{z}),$$

где  $L$  и  $M$  — дифференциальные операторы;  $V(\mathbf{z})$  — фазовая переменная;  $\mathbf{z} = (x_1, x_2, x_3, t)$  — вектор независимых переменных;  $f(\mathbf{z})$  и  $y(\mathbf{z})$  — заданные функции независимых переменных.

В *методе конечных разностей* алгебраизация производных по пространственным координатам базируется на аппроксимации производных конечно-разностными выражениями. При использовании метода нужно выбрать шаги сетки по каждой координате и вид шаблона. Под шаблоном понимают множество узловых точек, значения переменных в которых используются для аппроксимации производной в одной конкретной точке.

Примеры шаблонов для одномерных и двумерных задач приведены на рис. 3.11. На этом рисунке кружком большего диаметра обозначены узлы, в которых аппроксимируется производная. Черными точками обозначены узлы, значения фазовой переменной в которых входят в аппроксимирующее выражение. Число, записанное около узла, равно коэффициенту, с которым значение фазовой переменной входит в аппроксимирующее выражение. Так, для одномерных шаблонов в верхней части рисунка показана аппроксимация производной  $\partial V/\partial x$  в точке  $k$ , и указанным шаблонам при их просмотре слева направо соответствуют аппроксимации

$$h(\partial V/\partial x) = V_{k+1} - V_k; \quad 2h(\partial V/\partial x) = V_{k+1} - V_{k-1}; \quad h^2(\partial^2 V/\partial x^2) = V_{k+1} - 2V_k + V_{k-1},$$

где  $h$  — шаг дискретизации по оси  $x$ .

Шаблоны для двумерных задач в нижней части рис. 3.11 соответствуют следующим конечно-разностным операторам:

левый рисунок —

$$h^2 \nabla^2 V = h^2 (\partial^2 V/\partial x_1^2 + \partial^2 V/\partial x_2^2) = V_{k+1,j} + V_{k-1,j} + V_{k,j+1} + V_{k,j-1} - 4V_{k,j};$$

средний рисунок —

$$2h^2 \nabla^2 V = V_{k+1,j+1} + V_{k-1,j+1} + V_{k+1,j-1} + V_{k-1,j-1} - 4V_{k,j};$$

правый рисунок —

$$4h^2 \partial^2 V/(\partial x_1 \partial x_2) = V_{k+1,j+1} - V_{k-1,j+1} - V_{k+1,j-1} + V_{k-1,j-1}.$$

Здесь  $V_{k,j}$  — значение  $V$  в точке  $(x_{1k}, x_{2j})$ ; приняты одинаковые значения шагов  $h$  по обеим координатам.

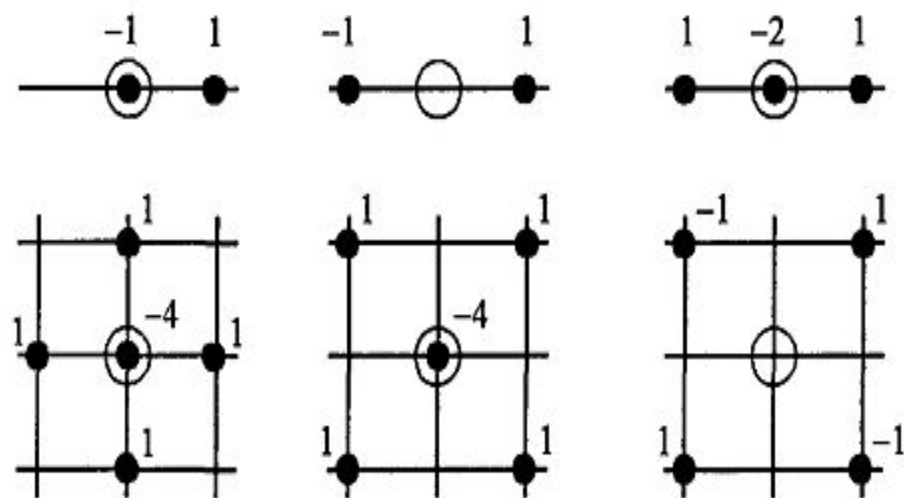


Рис. 3.11. Примеры шаблонов для МКР



*Метод конечных элементов* основан на аппроксимации не производных, а самого решения  $V(\mathbf{z})$ . Но поскольку оно не известно, то аппроксимация выполняется выражениями с неопределенными коэффициентами  $q_i$ ,

$$U(\mathbf{z}) = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}), \quad (3.34)$$

где  $\mathbf{Q}^T = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$  — вектор-строка неопределенных коэффициентов,  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z})$  — вектор-столбец *координатных* (иначе *опорных*) *функций*, заданных так, что удовлетворяются граничные условия.

При этом речь идет об аппроксимациях решения в пределах конечных элементов, а с учетом их малых размеров можно говорить об использовании сравнительно простых аппроксимирующих выражений  $U(\mathbf{z})$  (например,  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z})$  — полиномы низких степеней). В результате подстановки  $U(\mathbf{z})$  в исходное дифференциальное уравнение и выполнения операций дифференцирования получаем систему невязок

$$\Delta(\mathbf{z}, \mathbf{Q}) = LU(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}) = L(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z})) - f(\mathbf{z}), \quad (3.35)$$

из которой требуется найти вектор  $\mathbf{Q}$ .

Эту задачу (определение  $\mathbf{Q}$ ) решают одним из следующих методов:

1) *метод коллокаций*, в котором, используя (3.35), формируют  $n$  уравнений с неизвестным вектором  $\mathbf{Q}$ :

$$L(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}_i)) - f(\mathbf{z}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $n$  — число неопределенных коэффициентов;

2) *метод наименьших квадратов*, основанный на минимизации квадратов невязок (3.35) в  $n$  точках или в среднем по рассматриваемой области;

3) *метод Галеркина*, с помощью которого минимизируются в среднем по области невязки со специально задаваемыми весовыми коэффициентами.

Наибольшее распространение МКЭ получил в САПР машиностроения для анализа прочности объектов. Для этой задачи можно использовать рассмотренный подход, т. е. выполнить алгебраизацию исходного уравнения упругости (уравнения Ламе). Однако более удобным в реализации МКЭ оказался подход, основанный на вариационных принципах механики.