Кафедра «КРЭМС»

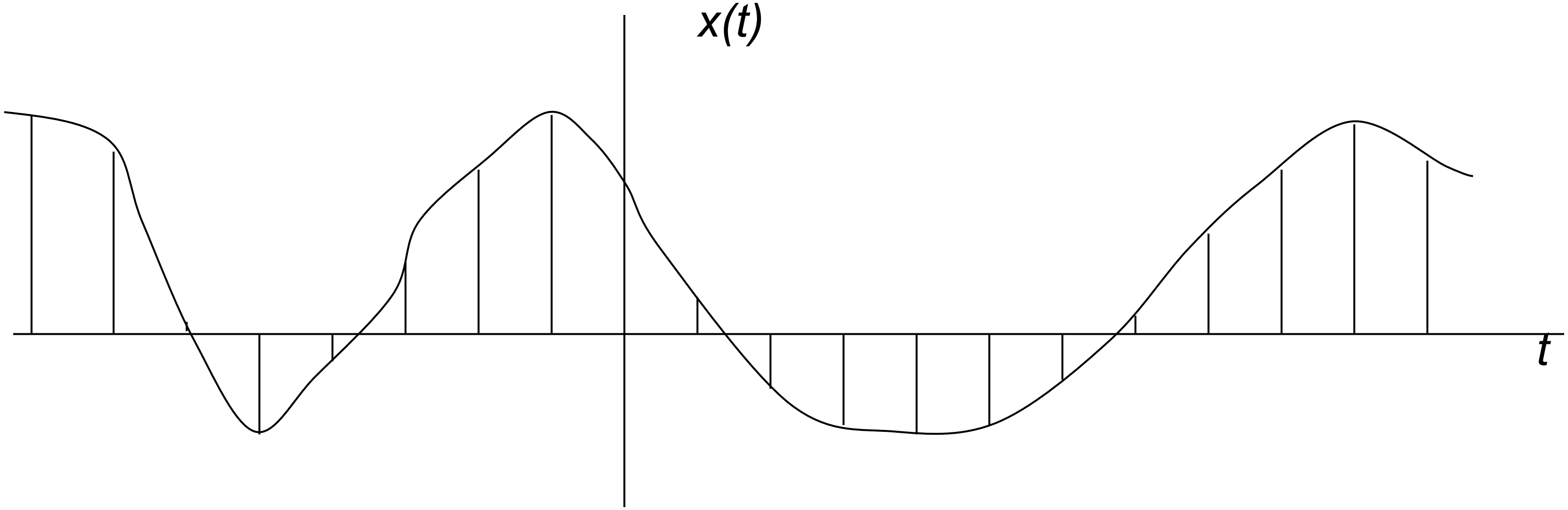
Дискретизация сигналов. Теорема отсчётов

Зырянов
Юрий Трифонович
доктор технических наук
профессор

Сигналы с ограниченной полосой

$$x \in L_2(-\infty, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} X(f) \to 0 \text{ при } f \to \pm\infty \\ x(t) \to 0 \text{ при } t \to \pm\infty \end{cases}$$

Если спектральная плотность финитна $(-F_{\text{в}}, F_{\text{в}})$



Теорема отсчётов

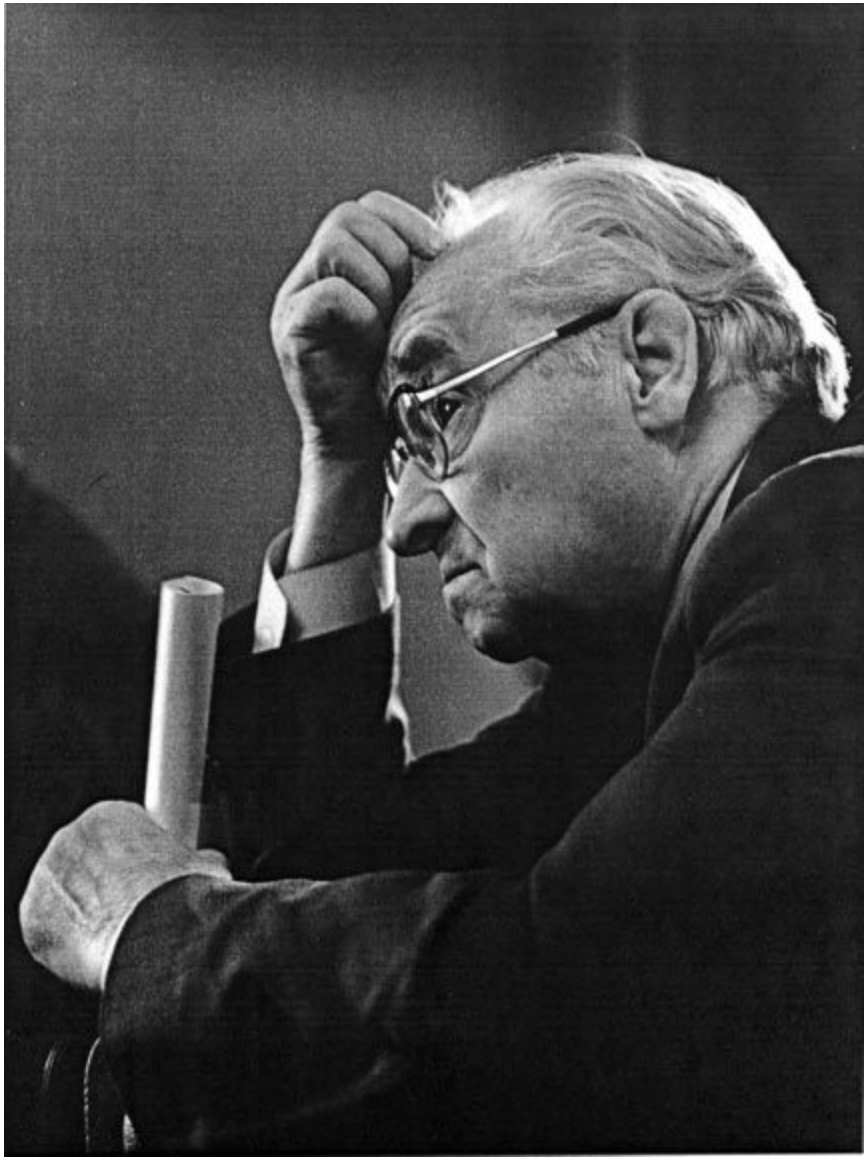
Э. Уиттекер - 1915

В.А. Котельников - 1933

Х. Найквист - 1928

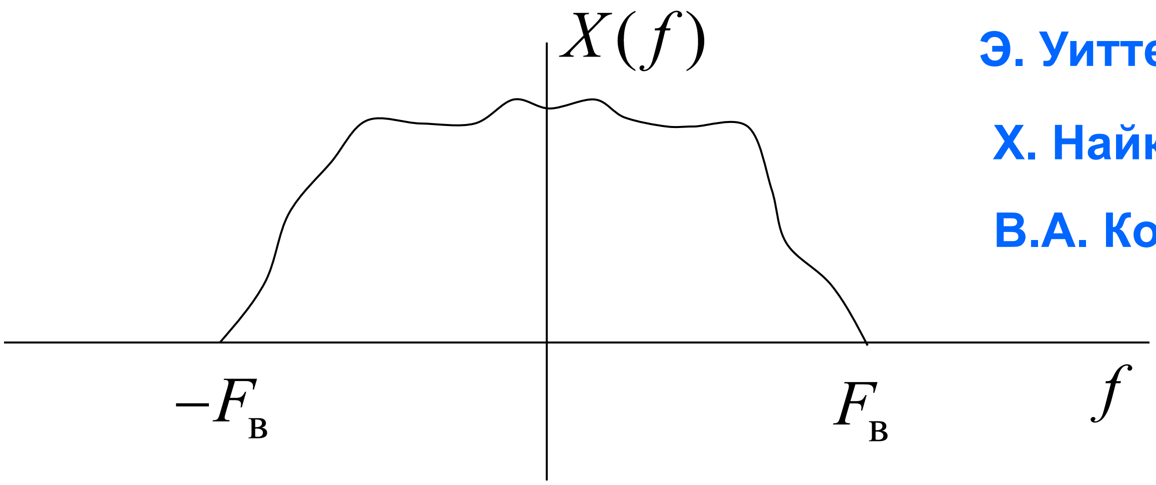
К. Шеннон - 1948

Котельников В.А.
”О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи”.
В сб. *Всесоюзный энергетический комитет. Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. По радиосекции. – М.: Управление связи РККА, 1933. - С. 1-19.*



1908 — 2005

Теорема отсчётов



Э. Уиттекер - 1915

Х. Найквист - 1928

В.А. Котельников - 1933

К. Шеннон - 1948

Представим комплексным рядом Фурье

$$X(f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{2F_{\text{в}}}kf},$$

$$C_k=\frac{1}{2F_в}\int_{-F_в}^{F_в} X(f)e^{-j\frac{2\pi}{2F_{\text{в}}}kf}df, \quad k=\overline{-\infty,\infty}$$

Теорема отсчетов Котельникова

Выразим сигнал

$$x(t) = \int_{-F_в}^{F_в} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot 2F \frac{\sin\left[2\pi F_в \left(t + k\frac{1}{2F_в}\right)\right]}{2\pi F_в \left(t + k\frac{1}{2F_в}\right)}$$

Коэффициенты ряда Фурье

$$C_k = \frac{1}{2F_в} \int_{-F_в}^{F_в} X(f) e^{-j\frac{2\pi}{2F_в}kf} df =$$

$$= \frac{x\left(-k\dfrac{1}{2F_в}\right)}{2F_в}$$

Обозначим $T_d = \dfrac{1}{2F_в}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-kT_d) \cdot \frac{\sin\left[\dfrac{\pi}{T_d}(t + kT_d)\right]}{\dfrac{\pi}{T_d}(t + kT_d)} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \cdot \frac{\sin\left[\dfrac{\pi}{T_d}(t - nT_d)\right]}{\dfrac{\pi}{T_d}(t - nT_d)}$$

Теорема отсчётов Котельникова

Итак

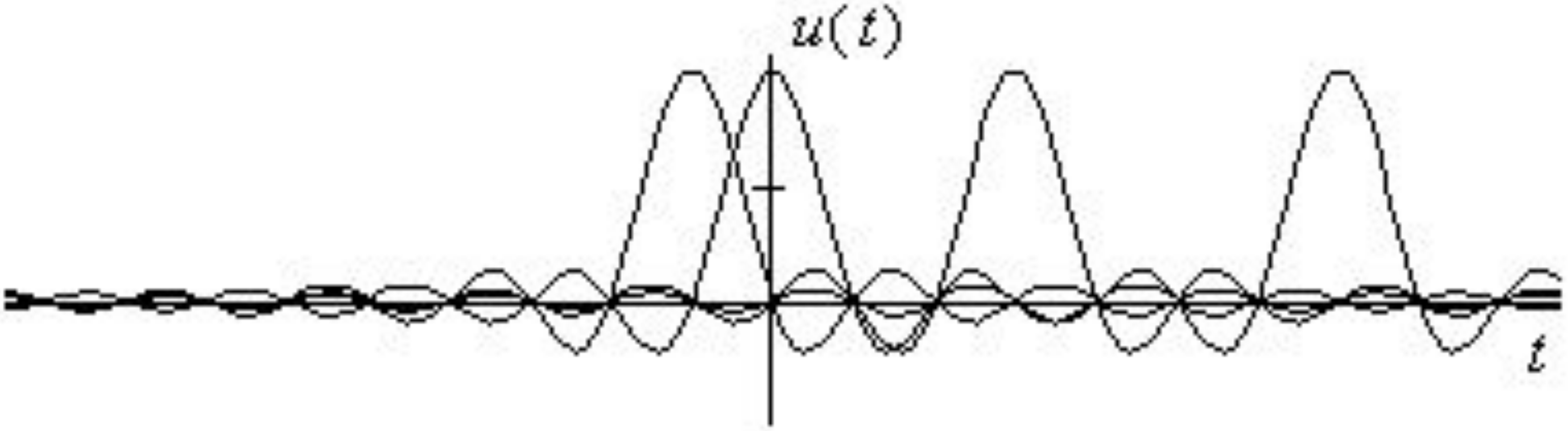
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_d}(t - nT_d)\right]}{\frac{\pi}{T_d}(t - nT_d)} \qquad T_d = \frac{1}{2F_в}$$

базисные функции $\left\{\kappa_n(t),\ n = \overline{-\infty, \infty}\right\}$

$$\kappa_0(t) = \sin\left(\frac{\pi}{T_d}t\right) \Big/ \left(\frac{\pi}{T_d}t\right)$$

$$\kappa_n(t) = \kappa_0(t - nT_d)$$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d)\cdot\frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_d}(t-nT_d)\right]}{\frac{\pi}{T_d}(t-nT_d)}$$



Базис Котельникова

Сравним

$$X(f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \underbrace{e^{j\frac{2\pi}{2F_\text{в}}kf}}$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot 2F_\text{в}\overbrace{\frac{\sin\left[2\pi F_\text{в}\left(t+k\frac{1}{2F_\text{в}}\right)\right]}{2\pi F_\text{в}\left(t+k\frac{1}{2F_\text{в}}\right)}}$$

согласно обобщённой формуле Рэлея

$$\left(\frac{\sin\left[2\pi F_{\text{в}}\left(t+k\dfrac{1}{2F_{\text{в}}}\right)\right]}{2\pi F_{\text{в}}\left(t+k\dfrac{1}{2F_{\text{в}}}\right)},\frac{\sin\left[2\pi F_{\text{в}}\left(t+m\dfrac{1}{2F_{\text{в}}}\right)\right]}{2\pi F_{\text{в}}\left(t+m\dfrac{1}{2F_{\text{в}}}\right)}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2F_{\text{в}}}e^{j\frac{2\pi}{2F_{\text{в}}}kf},\frac{1}{2F_{\text{в}}}e^{j\frac{2\pi}{2F_{\text{в}}}mf}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2F_{\text{в}}} e^{j\frac{2\pi}{2F_{\text{в}}}kf}, \frac{1}{2F_{\text{в}}} e^{j\frac{2\pi}{2F_{\text{в}}}mf} \right) =$$

$$= \frac{1}{4F_{\text{в}}^{\ 2}} \int_{-F_{\text{в}}}^{F_{\text{в}}} e^{j\frac{2\pi}{2F_{\text{в}}}(k-m)f} df = \frac{1}{2F_{\text{в}}} \delta_{km}$$

$$(\kappa_k, \kappa_m) = \frac{1}{4F_{\text{в}}^{\ 2}} \int_{-F_{\text{в}}}^{F_{\text{в}}} e^{j\frac{2\pi}{2F_{\text{в}}}(k-m)f} df = \frac{1}{2F_{\text{в}}} \delta_{km}$$

Базис ортогональный ненормированный

Восстановление аналогового сигнала по отсчётам

$$\delta(t) \longrightarrow \kappa_0(t) = \sin\left(\frac{\pi}{T_d}t\right) \Big/ \left(\frac{\pi}{T_d}t\right)$$

$$\delta(t - nT_d) \longrightarrow \kappa_n(t) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_d}(t - nT_d)\right]}{\frac{\pi}{T_d}(t - nT_d)}$$

$$x(nT_d)\delta(t - nT_d) \longrightarrow x(nT_d)\frac{\sin\left[\frac{\pi}{T_d}(t - nT_d)\right]}{\frac{\pi}{T_d}(t - nT_d)}$$

Осталось просуммировать по *n*

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d)\delta(t - nT_d)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(nT_d\right) \cdot \frac{\sin\left[\dfrac{\pi}{T_d}\left(t - nT_d\right)\right]}{\dfrac{\pi}{T_d}\left(t - nT_d\right)}$$

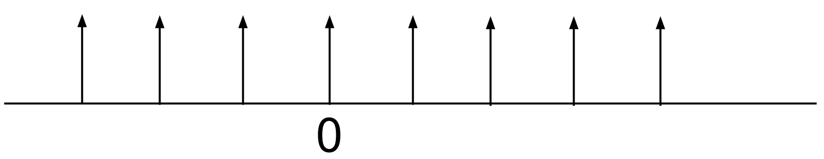
Спектральная трактовка

Воздействие (иАИМ-сигнал)

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d)\delta(t - nT_d) =$$

$$= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d) = x(t)\tilde{\delta}(t)$$

где $\breve{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d)$



Согласно теореме умножения

$$v(t) = x(t)\tilde{\delta}(t) \Longrightarrow V(f) = X(f) * \tilde{\Delta}(f)$$

$$\check{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j\frac{2\pi}{T_d}nt}$$ ряд Фурье с коэффициентами

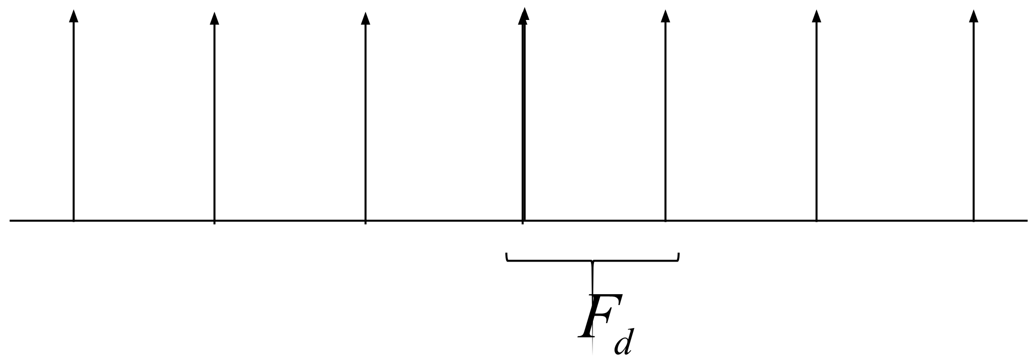
$$S_n = \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_d}nt} dt = \frac{1}{T_d}$$

Поэтому спектральная плотность

$$\acute{\Delta}(f) = \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_d}\right)$$

Спектральная плотность

$$\tilde{\Delta}(f)$$



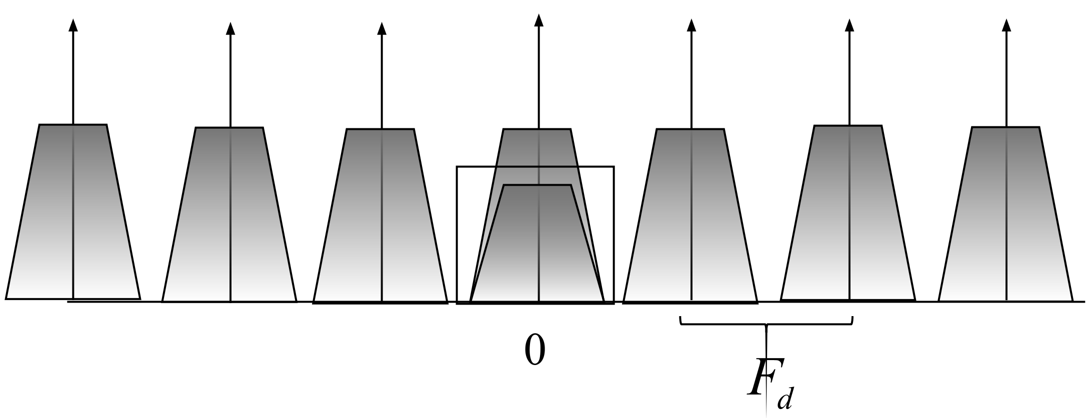
$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi)\tilde{\Delta}(f-\phi)\,d\phi$$

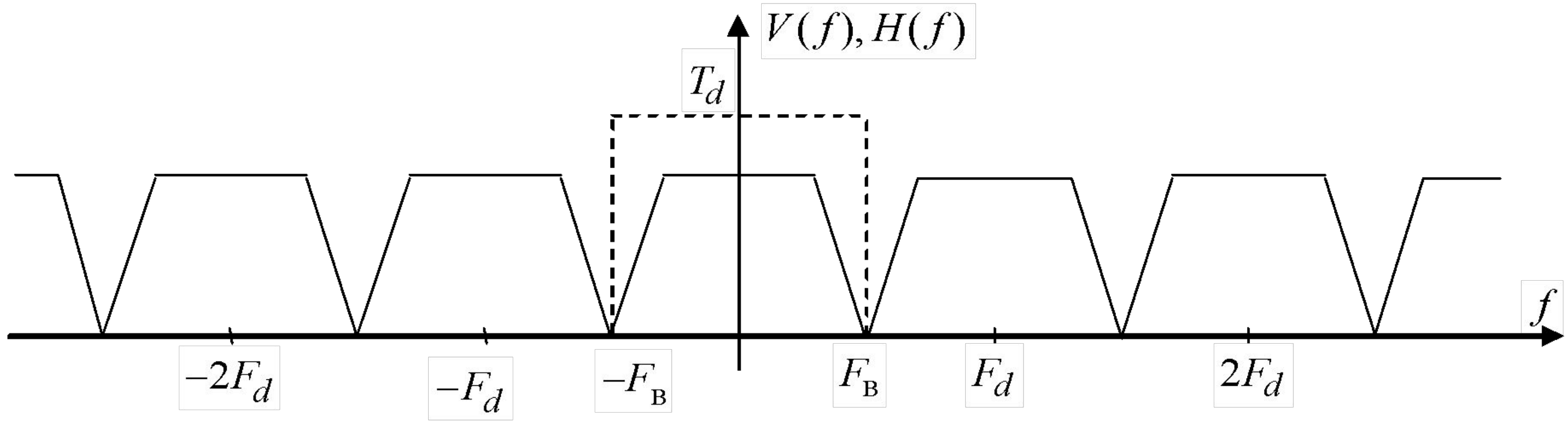
$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi)\frac{1}{T_d}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\phi-\frac{n}{T_d}\right)d\phi =$$

$$=\frac{1}{T_d}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}X(\phi)\delta\left(f-\phi-\frac{n}{T_d}\right)d\phi$$

$$=\frac{1}{T_d}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(f-\frac{n}{T_d})=$$

$$=\frac{1}{T_d}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(f-nF_d)$$





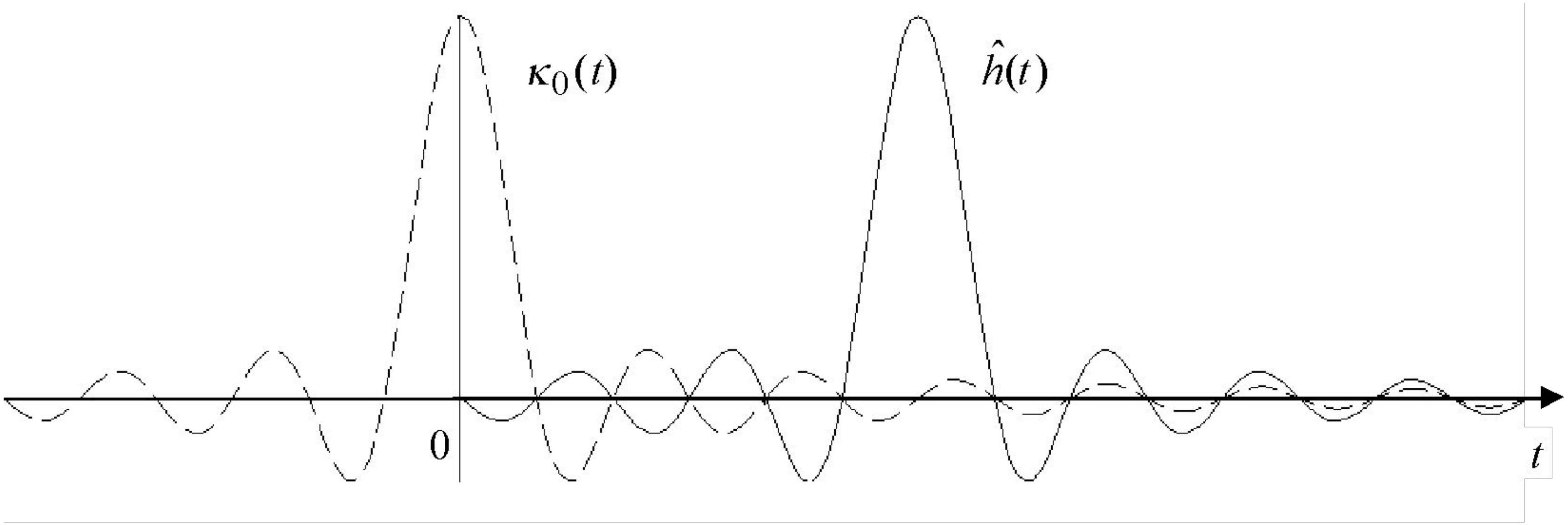
интерполирующий фильтр

$$K(f) = \begin{cases} T_d, & -F_{\text{в}} < f < F_{\text{в}}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

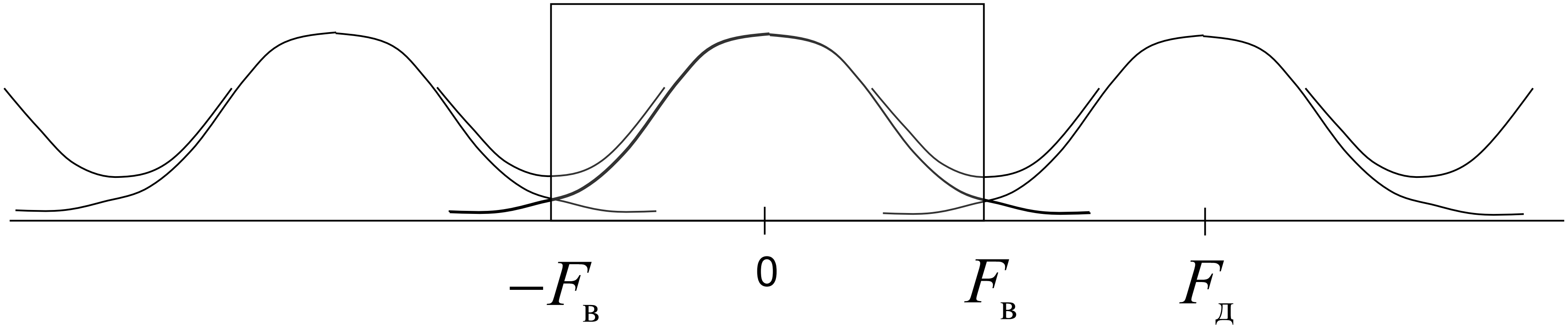
$$h(t) = \sin\left[\frac{\pi}{T_d} t\right] \Big/ \left(\frac{\pi}{T_d} t\right)$$

Что мешает точному осуществлению условий теоремы отсчётов на практике?

1. Все сигналы имеют конечную длину → нефинитную спектральную плотность
2. Интерполирующий фильтр с прямоугольной КЧХ физически неосуществим (некаузален)
3. Периодическая последовательность дельта-функций неосуществима



Следствие нефинитности спектральной плотности сигнала



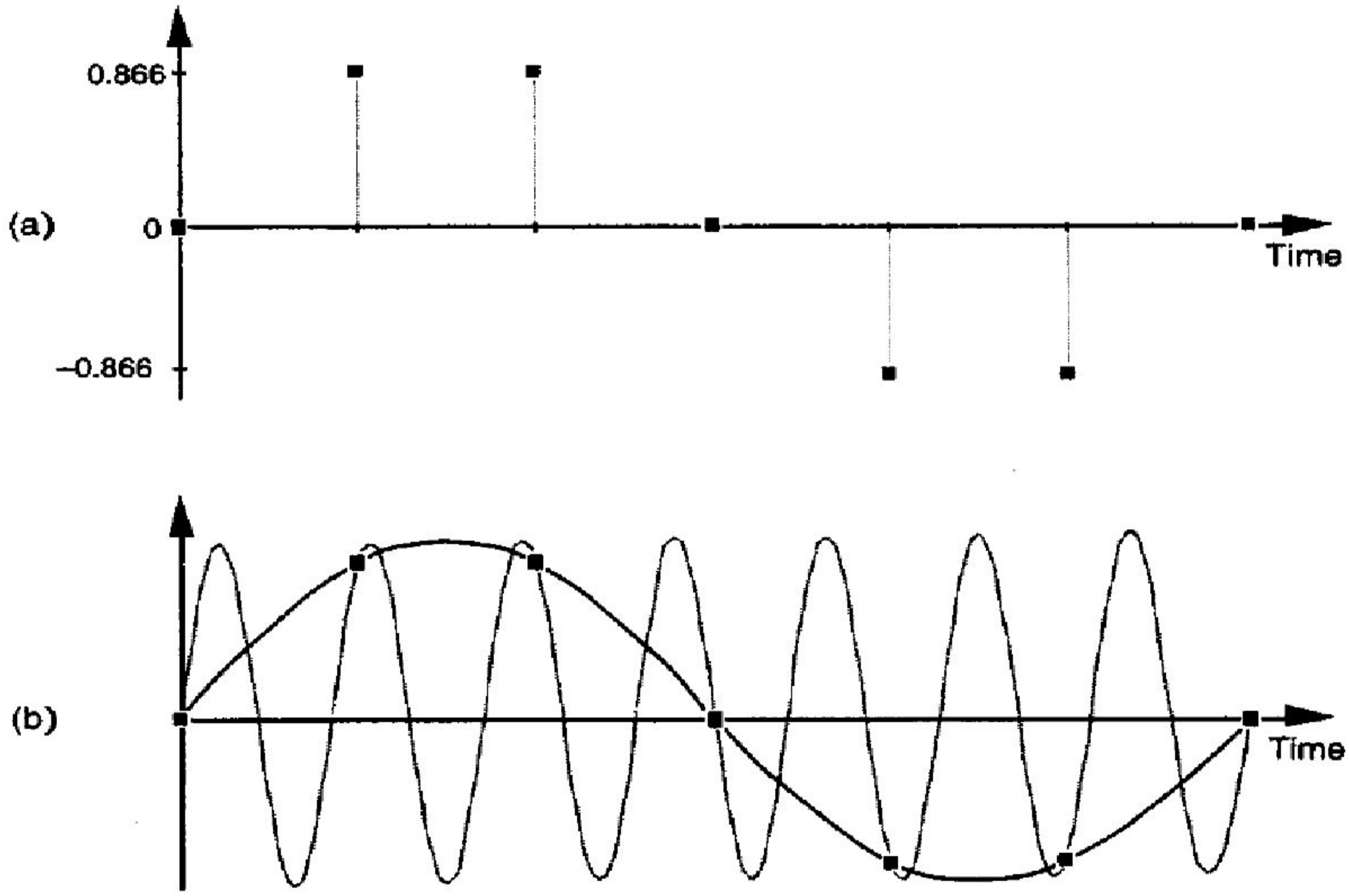
Эффект наложения называется *подменой частот* *(aliasing* ['eiliəsiŋ]*)*

Способы борьбы:

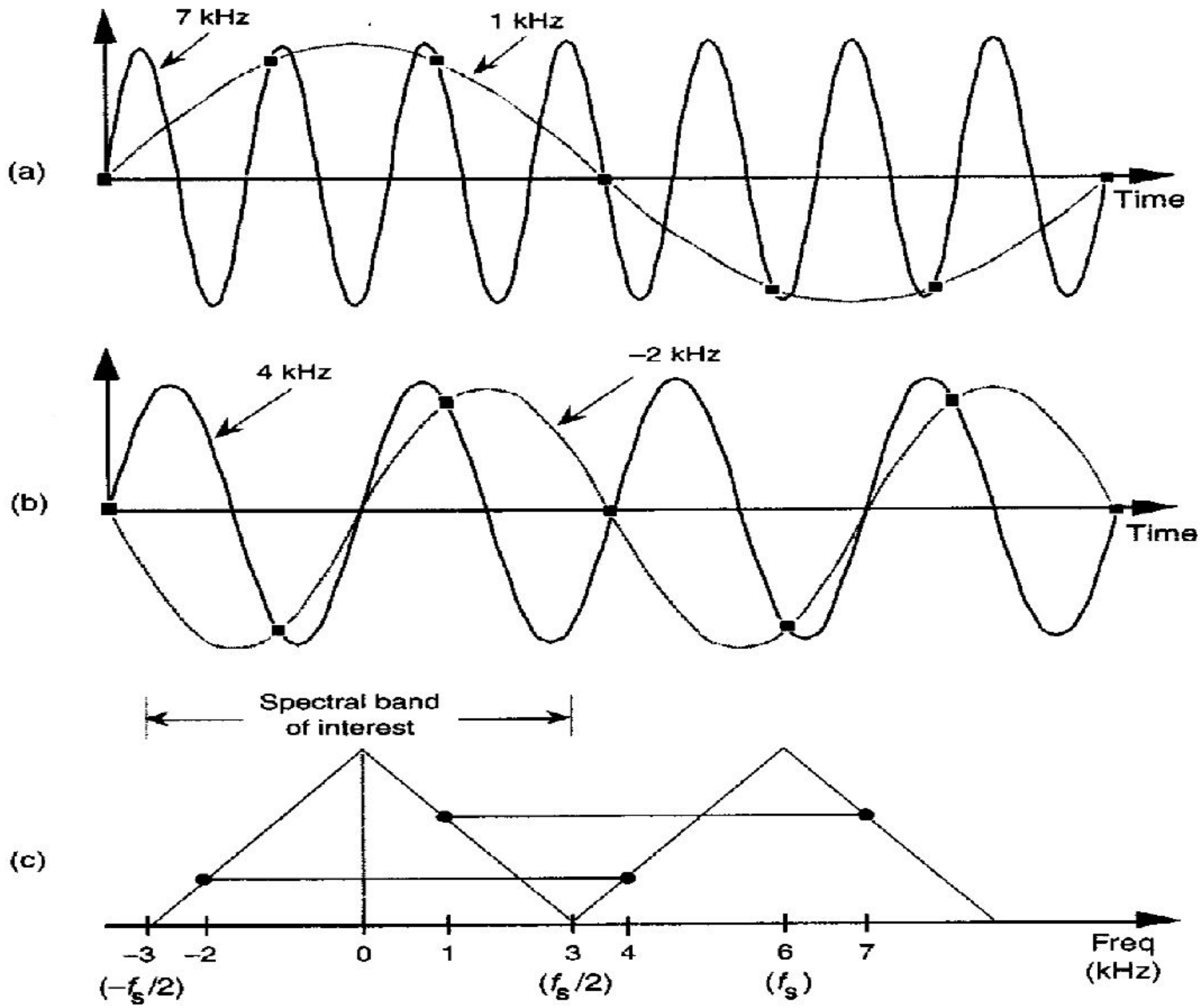
- увеличение частоты дискретизации

- противоподменная фильтрация нижних частот до дискретизации, тогда искажения, возникающие при интерполяции, уменьшаются вдвое (при идеальных фильтрах)

Подмена частот как проявление стробоскопического эффекта



Подмена частот как проявление стробоскопического эффекта



Различие дискретизации и интерполяции

$$v(t) = x(t)\tilde{\delta}(t)$$

описывает процесс *интерполяции* (восстановления аналогового сигнала по его отсчетам)

Взятие (одиночного) отсчёта аналогового сигнала (*стробирование*) описывается выражением типа *свёртки*

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t_0 - t)dt$$

$$x(t_0) \approx \int_{-\infty}^{\infty} x(t)d(t_0 - t)dt$$

импульс должен быть значительно короче АКФ сигнала (форма тогда не имеет значения)