

Кафедра «КРЭМС»

Дискретизация сигналов. Теорема отсчётов

Зырянов

Юрий Трифонович

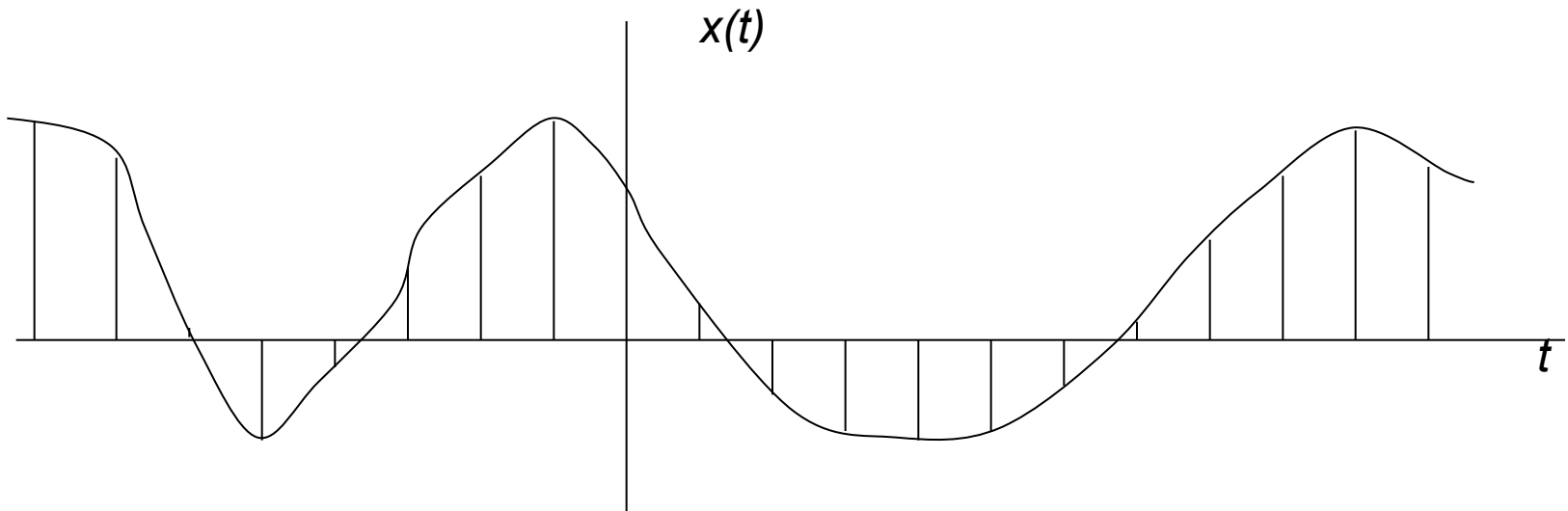
доктор технических наук

профессор

Сигналы с ограниченной полосой

$$x \in L_2(-\infty, +\infty) \longrightarrow \begin{cases} X(f) \rightarrow 0 \text{ при } f \rightarrow \pm\infty \\ x(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \pm\infty \end{cases}$$

Если спектральная плотность финитна $(-F_B, F_B)$



Теорема отсчётов

Э. Уиттекер - 1915



В.А. Котельников - 1933



Х. Найквист - 1928



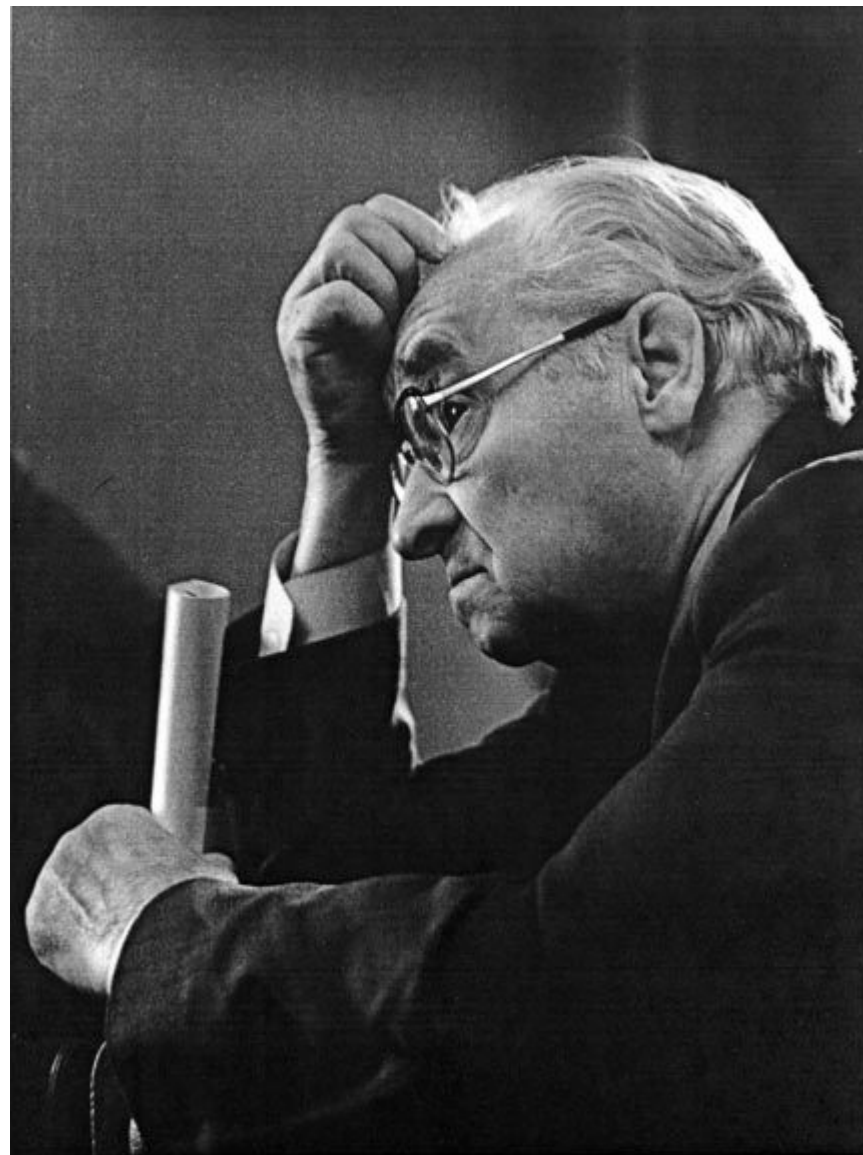
К. Шеннон - 1948



Котельников В.А.

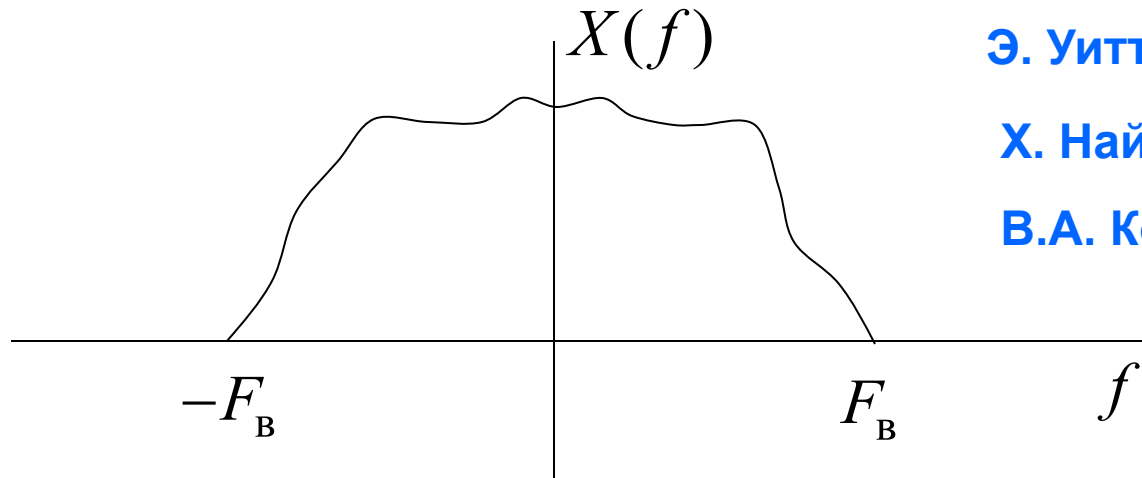
**”О пропускной способности
«эфира» и проволоки в
электросвязи”.**

*В сб. Всесоюзный
энергетический комитет.
Материалы к I Всесоюзному
съезду по вопросам
технической реконструкции
дела связи и развития
слаботочной
промышленности. По
радиосекции. – М.:
Управление связи РККА, 1933.
- С. 1-19.*



1908 — 2005

Теорема отсчётов



Э. Уиттекер - 1915

Х. Найквист - 1928

В.А. Котельников - 1933

К. Шеннон - 1948

Представим комплексным рядом Фурье

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j \frac{2\pi}{2F_B} kf},$$

$$C_k = \frac{1}{2F_B} \int_{-F_B}^{F_B} X(f) e^{-j \frac{2\pi}{2F_B} kf} df, \quad k = \overline{-\infty, \infty}$$

Теорема отсчетов Котельникова

Выразим сигнал

$$x(t) = \int_{-F_{\epsilon}}^{F_{\epsilon}} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot 2F \frac{\sin \left[2\pi F_{\epsilon} \left(t + k \frac{1}{2F_{\epsilon}} \right) \right]}{2\pi F_{\epsilon} \left(t + k \frac{1}{2F_{\epsilon}} \right)}$$

Коэффициенты ряда Фурье

$$C_k = \frac{1}{2F_\theta} \int_{-F_\theta}^{F_\theta} X(f) e^{-j \frac{2\pi}{2F_\theta} kf} df =$$
$$= \frac{x\left(-k \frac{1}{2F_\theta}\right)}{2F_\theta}$$

Обозначим $T_d = \frac{1}{2F_e}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-kT_d) \cdot \frac{\sin \left[\frac{\pi}{T_d} (t + kT_d) \right]}{\frac{\pi}{T_d} (t + kT_d)} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \cdot \frac{\sin \left[\frac{\pi}{T_d} (t - nT_d) \right]}{\frac{\pi}{T_d} (t - nT_d)}$$

Теорема отсчётов Котельникова

Итак

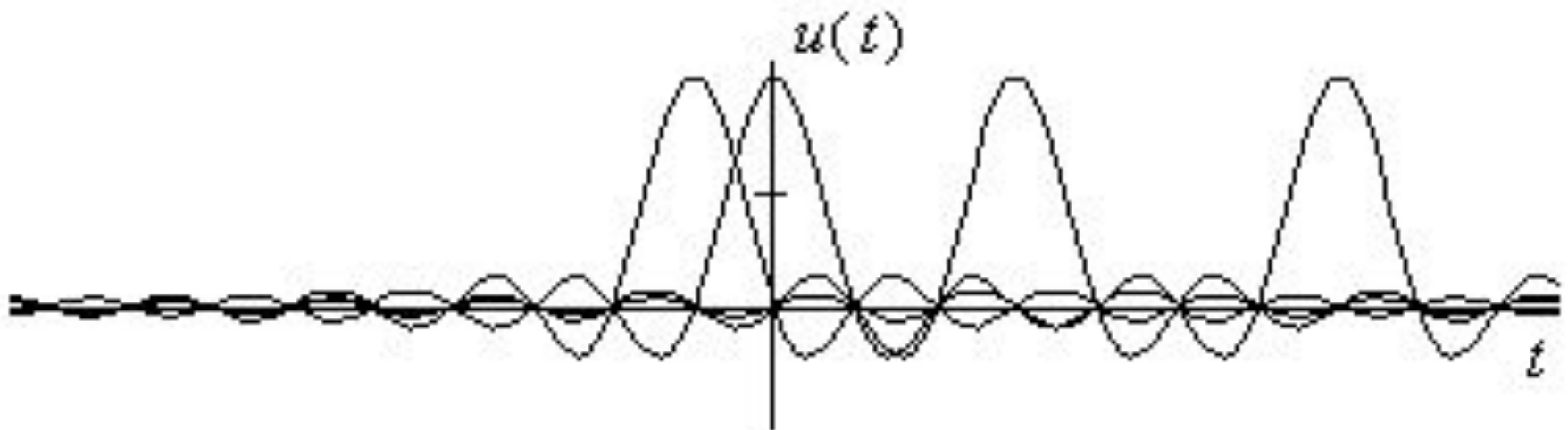
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \cdot \frac{\sin \left[\frac{\pi}{T_d} (t - nT_d) \right]}{\frac{\pi}{T_d} (t - nT_d)} \quad T_d = \frac{1}{2F_e}$$

базисные функции $\left\{ \kappa_n(t), n = \overline{-\infty, \infty} \right\}$

$$\kappa_0(t) = \sin \left(\frac{\pi}{T_d} t \right) / \left(\frac{\pi}{T_d} t \right)$$

$$\kappa_n(t) = \kappa_0(t - nT_d)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \cdot \frac{\sin \left[\frac{\pi}{T_d} (t - nT_d) \right]}{\frac{\pi}{T_d} (t - nT_d)}$$



Базис Котельникова

Сравним

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j \frac{2\pi}{2F_B} kf}$$

The diagram illustrates the relationship between the frequency spectrum $X(f)$ and the time-domain signal $x(t)$. A red bracket under the exponential term $e^{j \frac{2\pi}{2F_B} kf}$ in the frequency domain is connected by a red arrow to a red impulse in the time domain. A blue double-headed arrow connects the summation index k in both equations.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot 2F_B \frac{\sin \left[2\pi F_B \left(t + k \frac{1}{2F_B} \right) \right]}{2\pi F_B \left(t + k \frac{1}{2F_B} \right)}$$

согласно обобщённой формуле Рэля

$$\left(\frac{\sin \left[2\pi F_B \left(t + k \frac{1}{2F_B} \right) \right]}{2\pi F_B \left(t + k \frac{1}{2F_B} \right)}, \frac{\sin \left[2\pi F_B \left(t + m \frac{1}{2F_B} \right) \right]}{2\pi F_B \left(t + m \frac{1}{2F_B} \right)} \right) =$$
$$= \left(\frac{1}{2F_B} e^{j \frac{2\pi}{2F_B} kf}, \frac{1}{2F_B} e^{j \frac{2\pi}{2F_B} mf} \right)$$

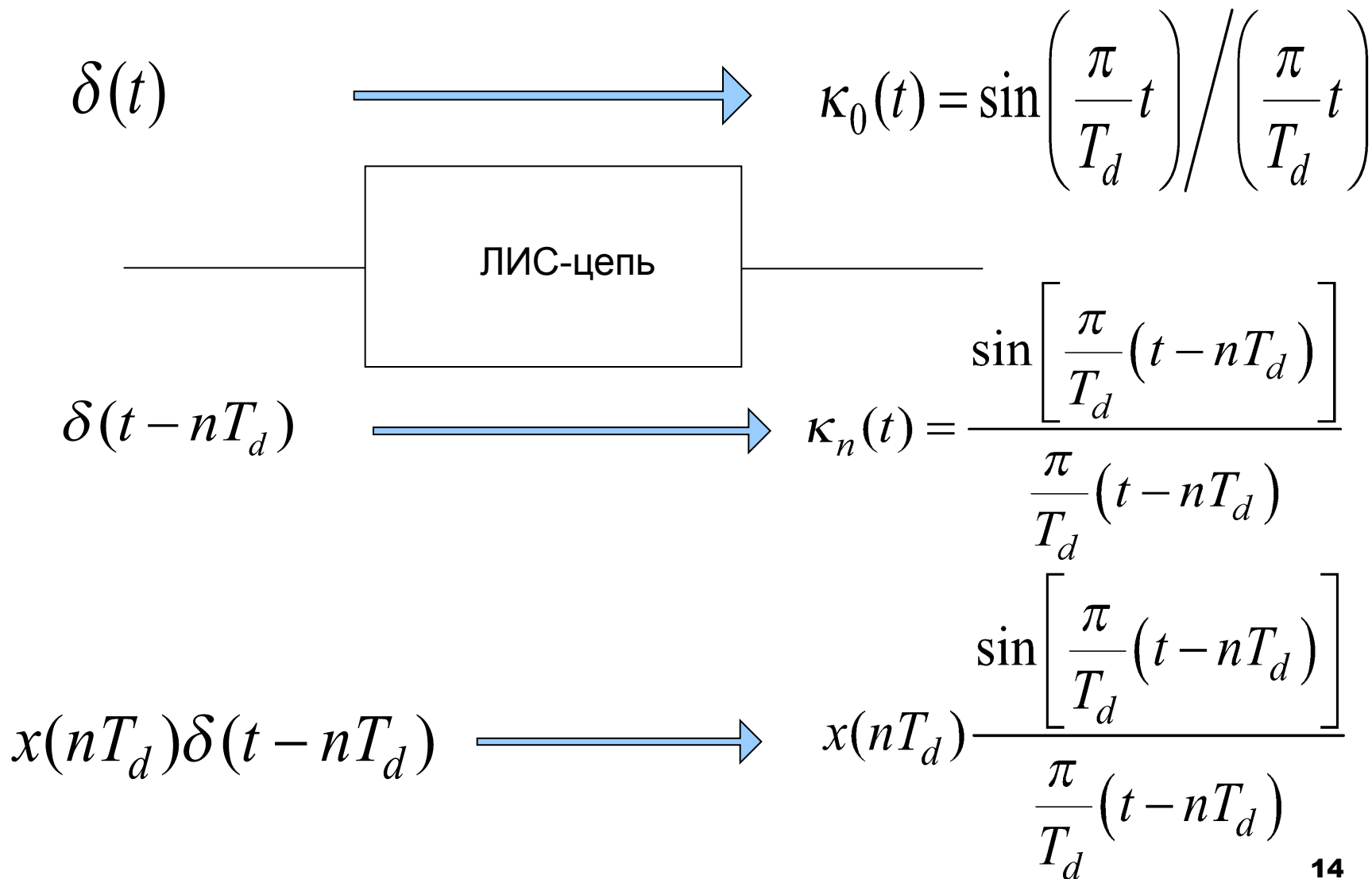
$$= \left(\frac{1}{2F_B} e^{j\frac{2\pi}{2F_B}kf}, \frac{1}{2F_B} e^{j\frac{2\pi}{2F_B}mf} \right) =$$

$$= \frac{1}{4F_B^2} \int_{-F_B}^{F_B} e^{j\frac{2\pi}{2F_B}(k-m)f} df = \frac{1}{2F_B} \delta_{km}$$

$$(\mathcal{K}_k, \mathcal{K}_m) = \frac{1}{4F_B^2} \int_{-F_B}^{F_B} e^{j\frac{2\pi}{2F_B}(k-m)f} df = \frac{1}{2F_B} \delta_{km}$$

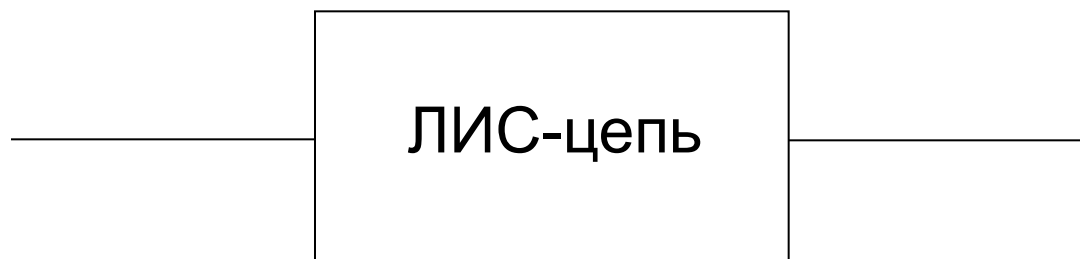
Базис ортогональный ненормированный

Восстановление аналогового сигнала по отсчётам



Осталось просуммировать по n

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \delta(t - nT_d)$$



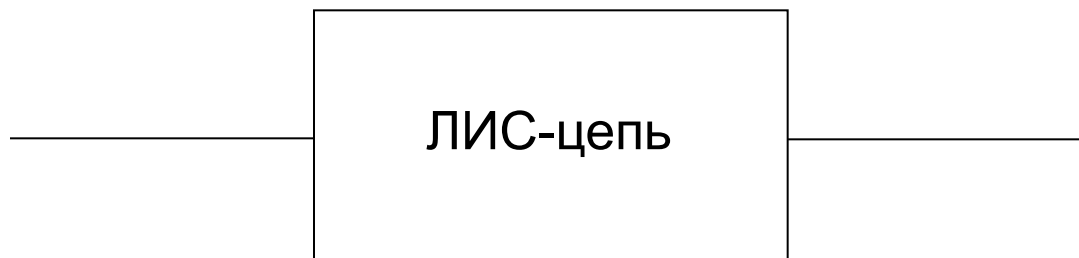
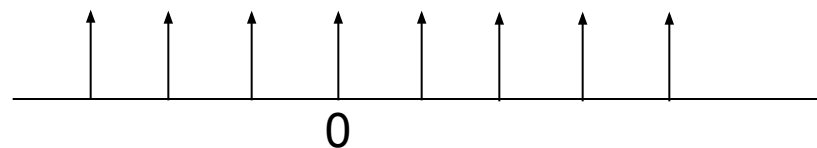
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d) \cdot \frac{\sin \left[\frac{\pi}{T_d} (t - nT_d) \right]}{\frac{\pi}{T_d} (t - nT_d)}$$

Спектральная трактовка

Воздействие (иАИМ-сигнал)

$$\begin{aligned}v(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d)\delta(t - nT_d) = \\ &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d) = x(t)\tilde{\delta}(t)\end{aligned}$$

где $\tilde{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d)$



Согласно теореме умножения

$$v(t) = x(t)\tilde{\delta}(t) \longrightarrow V(f) = X(f) * \tilde{\Delta}(f)$$

$$\tilde{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j\frac{2\pi}{T_d}nt} \quad \text{ряд Фурье с коэффициентами}$$

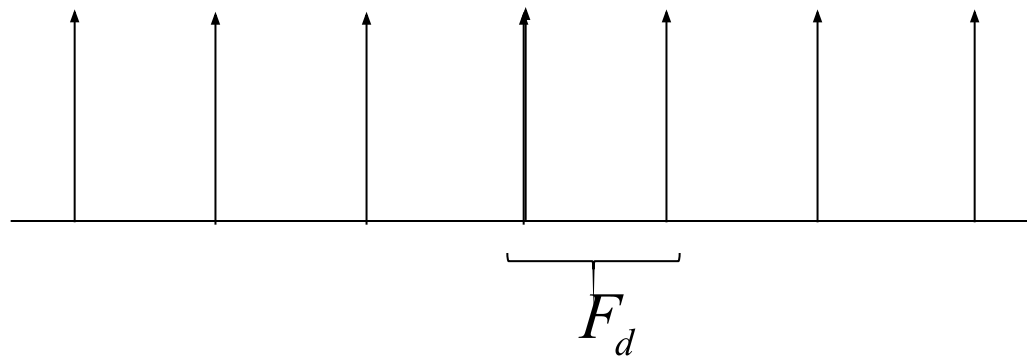
$$S_n = \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi}{T_d}nt} dt = \frac{1}{T_d}$$

Поэтому спектральная плотность

$$\tilde{\Delta}(f) = \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_d}\right)$$

Спектральная плотность

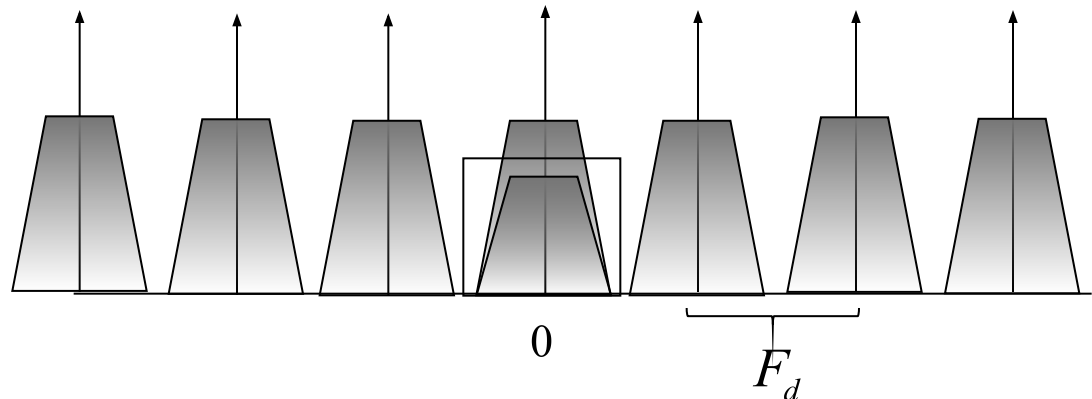
$$\tilde{\Delta}(f)$$

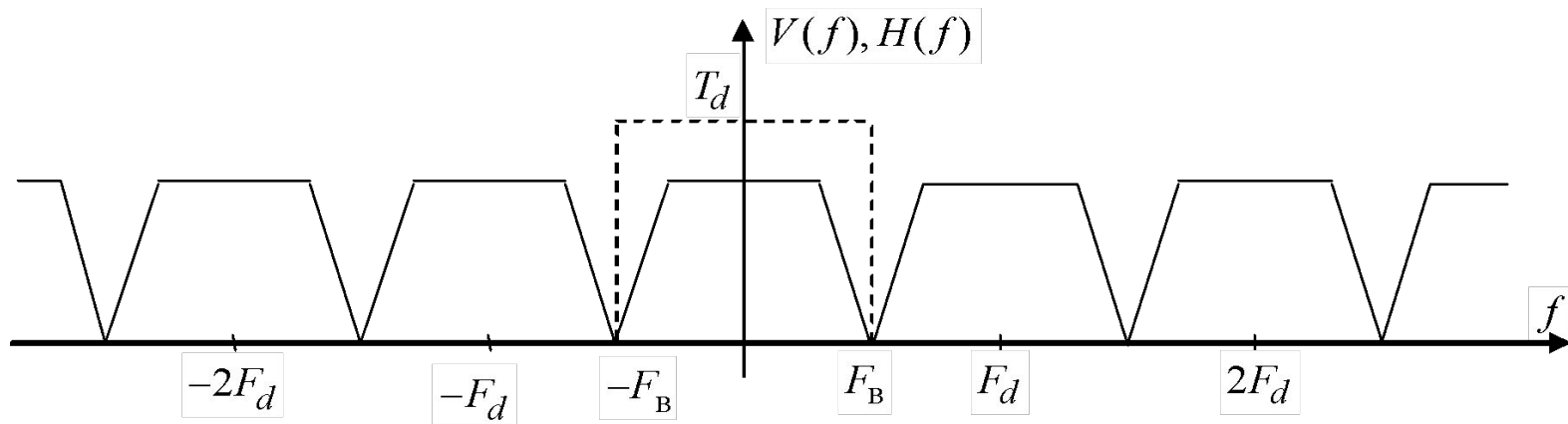


$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) \tilde{\Delta}(f - \phi) d\phi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \phi - \frac{n}{T_d}\right) d\phi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi) \delta \left(f - \phi - \frac{n}{T_d} \right) d\phi \\
&= \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X \left(f - \frac{n}{T_d} \right) = \\
&= \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nF_d)
\end{aligned}$$





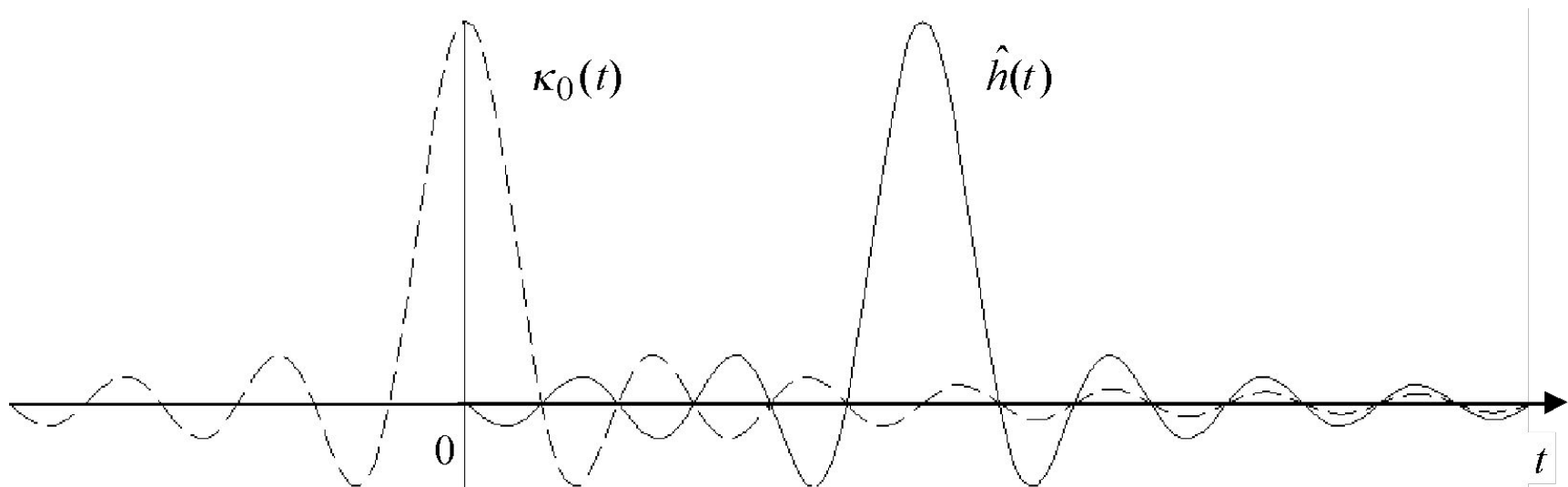
интерполирующий фильтр

$$K(f) = \begin{cases} T_d, & -F_B < f < F_B, \\ \emptyset & \text{противном случае.} \end{cases}$$

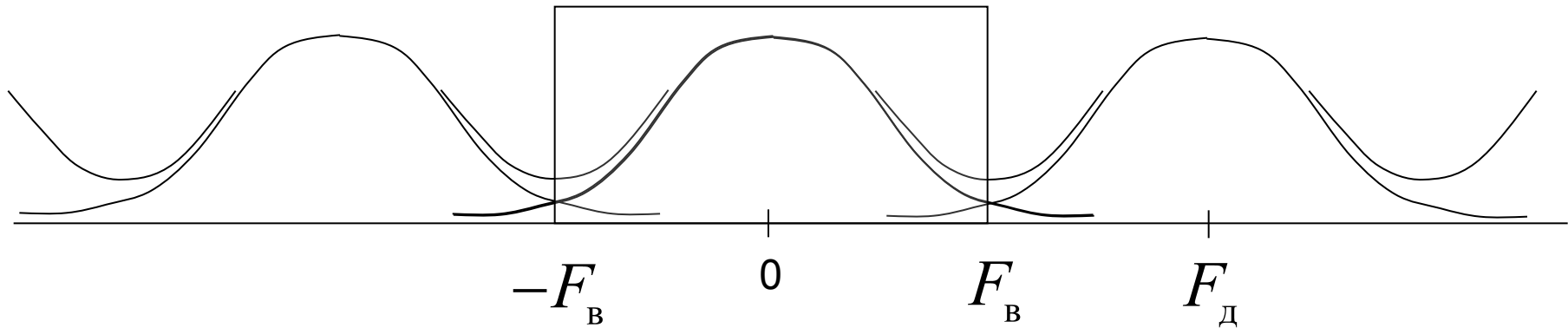
$$h(t) = \sin \left[\frac{\pi}{T_d} t \right] / \left(\frac{\pi}{T_d} t \right)$$

Что мешает точному осуществлению условий теоремы отсчётов на практике?

1. Все сигналы имеют конечную длину \rightarrow нефинитную спектральную плотность
2. Интерполирующий фильтр с прямоугольной КЧХ физически неосуществим (некаузален)
3. Периодическая последовательность дельта-функций неосуществима



Следствие нефинитности спектральной плотности сигнала

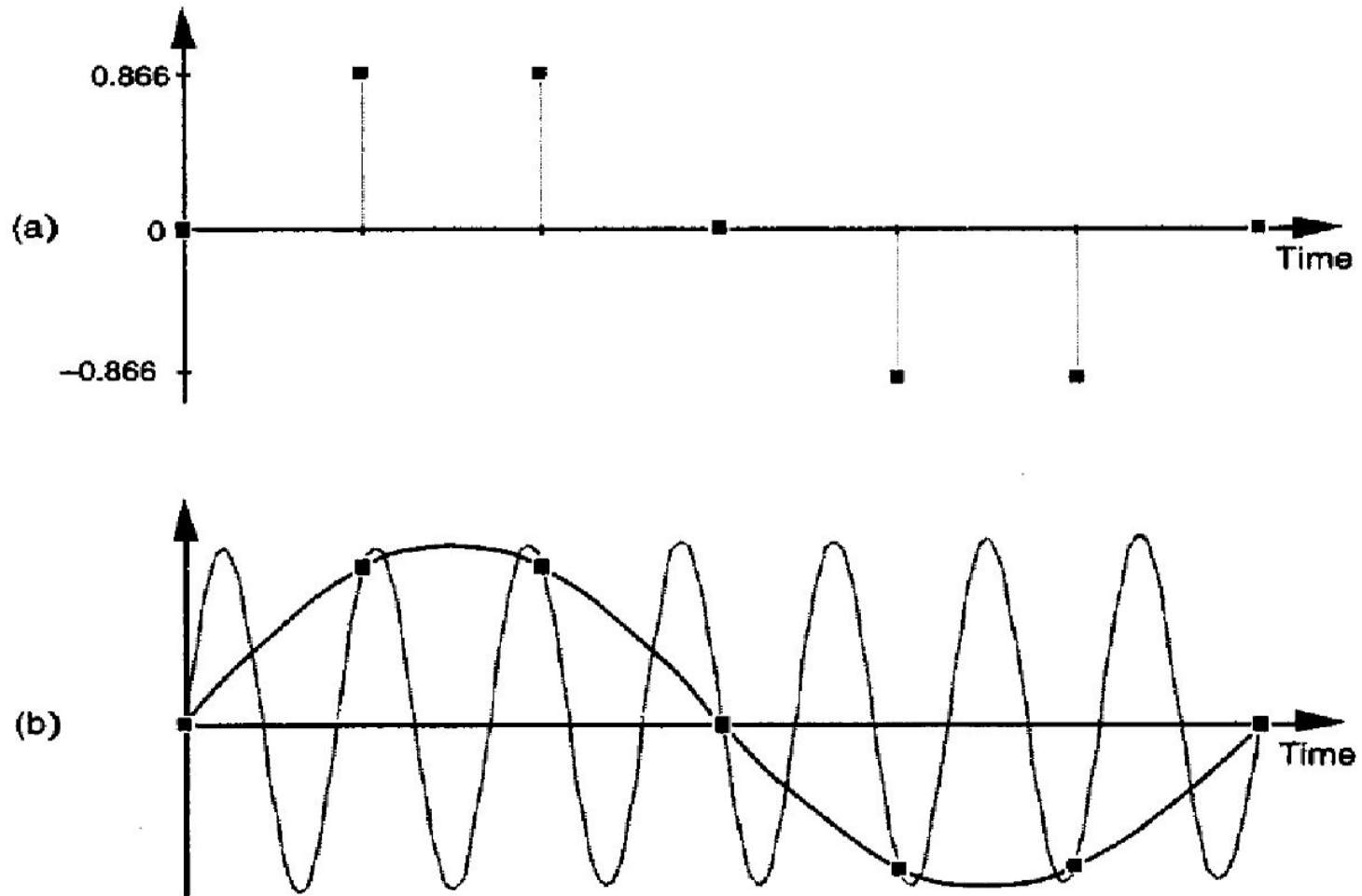


Эффект наложения называется *подменой частот* (*aliasing* ['eiliəsɪŋ])

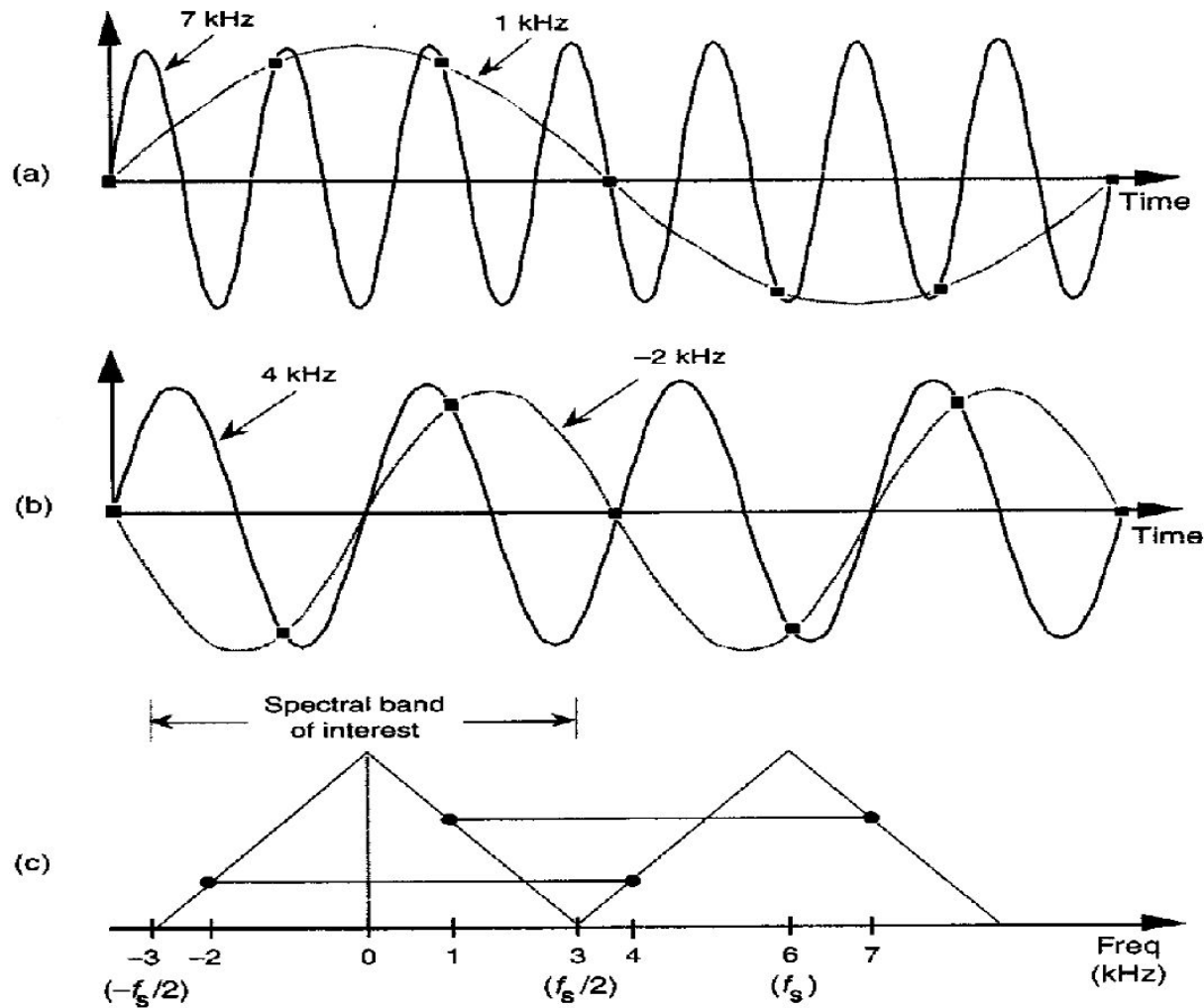
Способы борьбы:

- увеличение частоты дискретизации
- **противоподменная** фильтрация нижних частот до дискретизации, тогда искажения, возникающие при интерполяции, уменьшаются вдвое (при идеальных фильтрах)

Подмена частот как проявление стробоскопического эффекта



Подмена частот как проявление стробоскопического эффекта



Различие дискретизации и интерполяции

$$v(t) = x(t)\tilde{\delta}(t)$$

описывает процесс *интерполяции*
(восстановления аналогового
сигнала по его отсчетам)

Взятие (одиночного) отсчёта аналогового сигнала
(*стробирование*) описывается выражением типа
свёртки

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t_0 - t)dt$$

$$x(t_0) \approx \int_{-\infty}^{\infty} x(t)d(t_0 - t)dt$$

импульс должен быть значительно
короче АКФ сигнала (форма тогда
не имеет значения)

