СЛАУ
Методы решения

Методы решения системы

- **Прямые методы**
- Метод Гаусса
- Метод Жордана-Гаусса
- **Метод Крамера**
- Матричный метод
- Метод прогонки

- **Приближенные методы**
- Метод Якоби (метод простой итерации)
- Метод Гаусса-Зейделя
- Метод релаксации
- Многосеточный метод

Метод Гаусса

Гаусс Карл Фридрих (1777 - 1855)

Выдающийся немецкий математик. Его труды глубоко повлияли на развитие математической мысли, которая была неизменной многие столетия. Гаусс занимался основной теоремой алгебры о количестве корней алгебраического уравнения.

Теорема Кронекера - Капелли

Система линейных уравнений тогда и только тогда совместна, когда ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов.

Метод Гаусса

Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к эквивалентной системе ступенчатого (или треугольного) вида (прямой ход), из которого последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные (обратный ход).

Метод Гаусса:

1. Пусть коэффициент $a_{11} \neq 0$ (если он равен нулю, начать с какого-либо другого, отличного от нуля, коэффициента из первого уравнения системы). Преобразовать исходную систему, исключая неизвестное x_1 из всех уравнений, кроме первого.
2. Первое уравнение оставляем без изменений.
3. Уравнения, все коэффициенты левых частей и свободные члены которых равны нулю, выбрасываются.
4. Получим новую систему из s линейных уравнений ($s \leq m$) с n неизвестными. Полученная система уравнений эквивалентна первоначальной.
5. Если, получены уравнения, все коэффициенты левых частей которых равны нулю, а свободные члены не равны нулю, то доказана несовместность исходной системы.
6. Таким образом, среди коэффициентов полученной системы есть отличные от нуля.
7. Избавляемся во всех уравнениях кроме первого и второго от неизвестного x_2.
8. Полученная система содержит t уравнений ($t \leq s$) и n неизвестных.
9. И так далее.
10. Если в процессе получится система, одно из уравнений которой имеет отличный от нуля свободный член, а все коэффициенты левой части равны нулю, то исходная система несовместна.
11. В противном случае получим систему уравнений, эквивалентную исходной системе из k линейных уравнений ($k \leq n$) с n неизвестными.

Исследование систем линейных уравнений:

1. Если $r(A) < r(\overline{A})$, то система несовместна.
2. Если $r(A) = r(\overline{A}) = n$ (где *n* – число неизвестных), то система совместна и определена.
3. Если $r(A) = r(\overline{A}) < n$, то система совместна и неопределенна.

П р а в и л о решения произвольной системы линейных уравнений.

1. Найти ранги основной $r(A)$ и расширенной $r(\bar{A})$ матриц системы. Если $r(A) \neq r(\bar{A})$, то система несовместна.

2. Если $r(A) = r(\bar{A}) = r$, система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r. Взять произвольно r уравнений системы из коэффициентов которых составлен базисный минор, отбросив остальные $m - r$ уравнений.

Неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, называются *главными*; их оставляют слева, а остальные $n - r$ неизвестных называют *свободными* и переносят в правые части уравнений.

3. Найти выражения для главных неизвестных через свободные.

4. Придавая свободным неизвестным произвольные действительные значения, получим все соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом можно найти все частные решения исходной системы уравнений.

Пример

Исследовать систему на совместность

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$r(\overline{A}) = 3; r(A) = 2 \Rightarrow r(\overline{A}) \neq r(A)$$

система несовместна

- П р и м е р. Исследовать на совместность систему и решить ее, если она совместна (решить самостоятельно):

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x + 3y = -2. \end{cases}$$

- П р и м е р. Исследовать на совместность систему и решить ее, если она совместна (решить самостоятельно):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Рассмотрим квадратную систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11; \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = -1; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3; \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Исходную систему можно представить в виде таблицы:

$$
\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\
4 & 6 & -1 & 0 & -1 \\
3 & 2 & 2 & -1 & 3 \\
5 & -1 & 2 & 1 & 2
\end{array}\right)
&
\begin{array}{c}
\\
(-4) \\
(-3) \\
(-5)
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\
0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\
0 & 5 & -7 & -7 & -30 \\
0 & 4 & -13 & -9 & -53
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\
(-1)\ \ (-2) \\
2 \\
5
\end{array}
\end{array}
$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 39 & 29 & 175 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 205 & 410 \end{pmatrix}$$

Полученная матрица соответствует системе (из полученной системы найти неизвестные):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11; \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45; \\ x_3 - 6x_4 = 15; \\ 205x_4 = 410. \end{cases}$$

Решение систем линейных неоднородных уравнений

Алгоритм построения общего решения неоднородной системы

1. Вычислить $r(A)$ и $r(\overline{A})$ и установить совместность системы (1). Пусть $r(A) = r(\overline{A}) = r$.
2. Выделим в матрице А базисный минор:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

(считаем, что он расположен в левом верхнем углу матрицы А)

3. Рассмотрим уравнения системы (1), соответствующие базисному минору. Их будет r.

4. Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$, коэффициенты которых соответствуют базисному минору, назовем базисными.
Неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ назовем свободными.

5. Запишем уравнения системы (1), соответствующие базисному минору, в виде: слагаемые с базисными переменными оставим в левой части, а слагаемые со свободными переменными перенесем вправо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

6. Обозначим свободные переменные

$$x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, \ldots, x_n = c_{n-r}$$

Выразим базисные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ по формулам Крамера через параметры $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}) \\ x_2 = x_2(c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}) \\ \ldots\ldots \\ x_r = x_r(c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}) \end{cases}$$

Решение систем линейных неоднородных уравнений

В результате получим решение системы (1), которое называю <u>общим решением</u> системы.

Если придать свободным переменным конкретные числовые значения, то получим <u>частное решение</u> системы (1).

Пример

Найти общее и указать некоторое частное решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$r(\overline{A}) = 2; r(A) = 2 \Rightarrow r(\overline{A}) = r(A)$$

система совместна

Пример

Базисный минор:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 10 = -11 \neq 0$$

Система из двух уравнений, соответствующих базисному минору:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

x_1, x_2 - базисные переменные

x_3, x_4 - свободные переменные

Пример

Базисные переменные модели выразим через свободные:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4 \end{cases}$$

Обозначим свободные переменные:

$$x_3 = c_1, x_4 = c_2$$

Имеем:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4c_1 - 3c_2 \\ 2x_1 - x_2 = -2c_1 + c_2 \end{cases}$$

Пример

Выразим базисные переменные по формулам Крамера через параметры c_1, c_2

Общее решение системы

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-4c_1-3c_2 & 5 \\ -2c_1+c_2 & -1 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{6}{11}c_1 - \frac{8}{11}c_2 - \frac{1}{11}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-4c_1-3c_2 \\ 2 & -2c_1+c_2 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{6}{11}c_1 + \frac{7}{11}c_2 + \frac{2}{11}$$

Пример

Частное решение системы

$$c_1 = 0, c_2 = 2$$

$$x_1 = -\frac{16}{11} - \frac{1}{11} = -\frac{17}{11}$$

$$x_1 = \frac{14}{11} + \frac{2}{11} = \frac{16}{11}$$