

Лекция. Математика

Лектор: Санина Елена Ивановна



Производная второго порядка

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$. Ее производная $f'(x)$ является функцией от x на этом интервале.

$f'(x)$ – первая производная или производная первого порядка функции $f(x)$.

Если функция $f'(x)$ имеет производную (дифференцируема) на интервале $(a;b)$, то эту производную называют второй производной или производной второго порядка и обозначают

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Найдите производную второго порядка $y = \operatorname{tg}^2(8 - 7x)$

Находим первую производную:

$$\begin{aligned} y' &= (\operatorname{tg}^2(8 - 7x))' = 2\operatorname{tg}(8 - 7x) \cdot (\operatorname{tg}(8 - 7x))' = 2\operatorname{tg}(8 - 7x) \cdot \frac{1}{\cos^2(8 - 7x)} \cdot (8 - 7x)' = \\ &= \frac{2\operatorname{tg}(8 - 7x)}{\cos^2(8 - 7x)} \cdot (-7) = -\frac{14\operatorname{tg}(8 - 7x)}{\cos^2(8 - 7x)}. \end{aligned}$$

Находим вторую производную:

$$\begin{aligned} y'' &= \left(-\frac{14\operatorname{tg}(8 - 7x)}{\cos^2(8 - 7x)} \right)' = \\ &= \frac{-14 \cdot \frac{-7}{\cos^2(8 - 7x)} \cdot \cos^2(8 - 7x) + 14\operatorname{tg}(8 - 7x) \cdot 2\cos(8 - 7x) \cdot (-\sin(8 - 7x)) \cdot (-7)}{(\cos^2(8 - 7x))^2} = \\ &= \frac{98 + 196\sin(8 - 7x) \cdot \sin(8 - 7x)}{\cos^4(8 - 7x)} = \frac{98 + 196\sin^2(8 - 7x)}{\cos^4(8 - 7x)} = \frac{98(1 + 2\sin^2(8 - 7x))}{\cos^4(8 - 7x)} \end{aligned}$$

■ Производные высших порядков

- Производная $f'(x)$ сама является функцией аргумента x , для нее можно найти производную $(f'(x))'$ - производная второго порядка.
- Обозначение: $f''(x)$ или $f^{(2)}(x)$ или $f^{II}(x)$ или $\frac{d^2 f}{dx^2}$
- Производная второй производной есть производная третьего порядка и т.д.
- Производной n -го порядка называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка

Производные высших порядков

Начиная от производной 4 порядка, производные обозначаются римскими цифрами или цифрами в скобках:

$y^{(5)}$ или y^v - производная пятого порядка.

Вычислить производную n -ого порядка от функции: $y = \ln(x+1)$

$$y' = (\ln(x+1))' = \frac{(x+1)'}{x+1} = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$$

$$y'' = ((x+1)^{-1})' = -1 \cdot (x+1)^{-2}; \quad y''' = (-(x+1)^{-2})' = 1 \cdot 2(x+1)^{-3}$$

$$y^{(4)} = (1 \cdot 2(x+1)^{-3})' = -1 \cdot 2 \cdot 3(x+1)^{-4}$$

$$y^{(5)} = (-1 \cdot 2 \cdot 3(x+1)^{-4})' = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(x+1)^{-5}$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1} (n-1)! (x+1)^{-n}$$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

- Если функция y от x задана уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \phi(t), \end{cases} \quad t \in T$$

то говорят, что она **задана параметрически** (t – параметр уравнений).

- Производную функции, заданной параметрически, находят по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Производная функции, заданной параметрически.

Пример . Найти производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t^3 + 5t, \\ y = t^2 - t + 2. \end{cases}$$

Решение. Имеем: $x'_t = 3t^2 + 5$, $y'_t = 2t - 1$.

Следовательно, производная равна:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t - 1}{3t^2 + 5}.$$

Производные от функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Производная первого порядка от этой функции находится по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Найдем производную второго порядка:

$$y''_x = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

Аналогично получаем:

$$y'''_x = (y''_x)'_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} \quad y^{(4)}_x = (y'''_x)'_x = \frac{(y'''_x)'_t}{x'_t} \quad \text{и т. д.}$$

Производные от функций, заданных параметрически

Вычислить производную 3-ого порядка от функции:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 1 - t^3 \end{cases} \quad y'_x = \frac{(1-t^3)'}{(t^2)'} = \frac{-3t^2}{2t} = -1.5t$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-1.5t)'}{(t^2)'} = \frac{-1.5}{2t} = -0.75t^{-1}$$

$$y'''_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-0.75t^{-1})'}{(t^2)'} = \frac{0.75t^{-2}}{2t} = \frac{3}{4t^3}$$

Правило Лопиталья

- Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в ноль в этой точке или в ∞ , при этом $\varphi'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0 . Если отношение производных этих функций имеет предел при $x \rightarrow x_0$, то отношение самих функций также имеет предел при $x \rightarrow x_0$, равный пределу отношения их производных, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Правило Лопитала

- Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует (в указанном смысле).

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ -\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Примеры:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$



Правило Лопиталья

Пример 1. Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/\cos^2 x - 1}{1 - \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x)\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 2 \end{aligned}$$



Правило Лопиталя

Пример 3. Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$



Правило Лопиталя

Пример 4. Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

ЛЕКЦИЯ 7

Приложения производной.

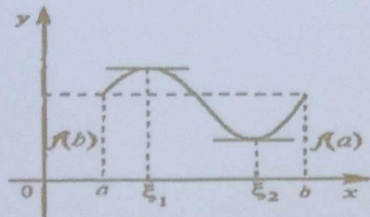
Основные теоремы

Теорема Ферма. Если дифференцируемая на промежутке X функция $y=f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ролля. Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- 2) дифференцируема на интервале (a, b) ;
- 3) на концах отрезка принимает равные значения, т.е. $f(a)=f(b)$.

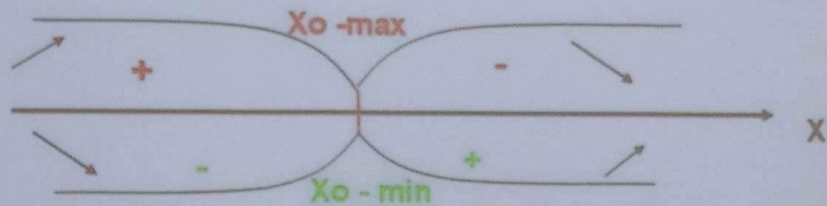
Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, в которой производная функция равна нулю: $f'(\xi) = 0$.



Необходимое и достаточное условия существования экстремума

Для того, чтобы непрерывная в точке x_0 функция $y=f(x)$ имела в точке x_0 экстремум

- **необходимо:** $y'(x_0)=0$
 $y'(x_0)=\infty$ или не существовала
- **достаточно:** производная $y'(x_0)$ меняла знак при переходе через x_0



Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы.

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Решить уравнение $f'(x)=0$ и найти критические точки.
3. Отметить критические точки на числовой прямой.
4. Определить знаки производной на получившихся промежутках (поставить «+», «-»).
5. Указать промежутки монотонности функции (поставить «↗», «↘»).
6. Сделать выводы о точках экстремума.

Пример:

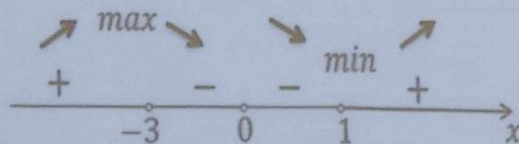
Исследовать функцию $y = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3$ на монотонность и экстремумы.

Решение:

$$f'(x) = 10x^4 + 20x^3 - 30x^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 10x^4 + 20x^3 - 30x^2 = 0 \Leftrightarrow 10x^2(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 = 0 \text{ или } x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ или } x = -3 \text{ или } x = 1$$



при $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ функция возрастает,

при $x \in (-3; 0) \cup (0; 1)$ функция убывает \Leftrightarrow при $x \in (-3; 1)$ функция убывает

$$x = -3 - \text{точка максимума } y_{\max} = 2(-3)^5 + 5(-3)^4 - 10(-3)^3 + 3 = 192$$

$$x = 1 - \text{точка минимума } y_{\min} = 2 \cdot 1^5 + 5 \cdot 1^4 - 10 \cdot 1^3 + 3 = 0$$