Лекция. Математика

Лектор: Санина Елена Ивановна

Производная второго порядка

Пусть функция f (x) дифференцируема на интервале (a;b). Ее производная $f'(x)$ является функцией от x на этом интервале.

$f'(x)$ – первая производная или производная первого порядка функции f (x).

Если функция $f'(x)$ имеет производную (дифференцируема) на интервале (a;b), то эту производную называют второй производной или производной второго порядка и обозначают

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Найдите производную второго порядка $y = tg^2(8-7x)$

Находим первую производную:

$$y' = \left(tg^2(8-7x)\right)' = 2tg(8-7x)\cdot\left(tg(8-7x)\right)' = 2tg(8-7x)\cdot\frac{1}{\cos^2(8-7x)}\cdot(8-7x)' =$$

$$= \frac{2tg(8-7x)}{\cos^2(8-7x)}\cdot(-7) = -\frac{14tg(8-7x)}{\cos^2(8-7x)}.$$

Находим вторую производную:

$$y'' = \left(-\frac{14tg(8-7x)}{\cos^2(8-7x)}\right)' =$$

$$= \frac{-14\cdot\frac{-7}{\cos^2(8-7x)}\cdot\cos^2(8-7x) + 14tg(8-7x)\cdot 2\cos(8-7x)\cdot(-\sin(8-7x))\cdot(-7)}{\left(\cos^2(8-7x)\right)^2} =$$

$$= \frac{98+196\sin(8-7x)\cdot\sin(8-7x)}{\cos^4(8-7x)} = \frac{98+196\sin^2(8-7x)}{\cos^4(8-7x)} = \frac{98\left(1+2\sin^2(8-7x)\right)}{\cos^4(8-7x)}$$

Производные высших порядков

- Производная **$f'(x)$** сама является функцией аргумента x, для нее можно найти производную **$(f'(x))'$ - производная второго порядка.**
- Обозначение: **$f''(x)$** или **$f^{(2)}(x)$** или **$f^{II}(x)$** или $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$
- Производная второй производной есть производная третьего порядка и т.д.
- **Производной n-го порядка** называется производная от производной (n-1)-го порядка

Производные высших порядков

Начиная от производной 4 порядка , производные обозначаются римскими цифрами или цифрами в скобках:

$y^{(5)}$ *или* y^{V} - производная пятого порядка.

Вычислить производную n – ого порядка от функции: $y = \ln(x+1)$

$$y' = (\ln(x+1))' = \frac{(x+1)'}{x+1} = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$$

$$y'' = \left((x+1)^{-1}\right)' = -1\cdot(x+1)^{-2};\quad y''' = \left(-(x+1)^{-2}\right)' = 1\cdot 2(x+1)^{-3}$$

$$y^{(4)} = \left(1\cdot 2(x+1)^{-3}\right)' = -1\cdot 2\cdot 3(x+1)^{-4}$$

$$y^{(5)} = \left(-1\cdot 2\cdot 3(x+1)^{-4}\right)' = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(x+1)^{-5}$$

$$\boxed{y^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n}}$$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

- Если функция y от x задана уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \phi(t), \end{cases} \quad t \in T$$

то говорят, что она **задана параметрически** (t – параметр уравнений).

- Производную функции, заданной параметрически, находят по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Производная функции, заданной параметрически.

Пример . Найти производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t^3 + 5t, \\ y = t^2 - t + 2. \end{cases}$$

Решение. Имеем: $x'_t = 3t^2 + 5, \quad y'_t = 2t - 1.$

Следовательно, производная равна:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t - 1}{3t^2 + 5}.$$

Производные от функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Производная первого порядка от этой функции находится по формуле:

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}$$

Найдем производную второго порядка:

$$\boxed{y''_x = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}}$$

Аналогично получаем:

$$y'''_x = (y''_x)'_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} \qquad y^{(4)}_x = (y'''_x)'_x = \frac{(y'''_x)'_t}{x'_t}$$

и т. д.

Производные от функций, заданных параметрически

Вычислить производную 3 – ого порядка от функции:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 1 - t^3 \end{cases} \qquad y'_x = \frac{(1-t^3)'}{(t^2)'} = \frac{-3t^2}{2t} = -1.5t$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-1.5t)'}{(t^2)'} = \frac{-1.5}{2t} = -0.75t^{-1}$$

$$y'''_x = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-0.75t^{-1})'}{(t^2)'} = \frac{0.75t^{-2}}{2t} = \boxed{\frac{3}{4t^3}}$$

Правило Лопиталя

- Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в ноль в этой точке или в ∞, при этом $\varphi'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0. Если отношение производных этих функций имеет предел при $x \to x_0$, то отношение самих функций также имеет предел при $x \to x_0$, равный пределу отношения их производных, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Правило Лопиталя

- *Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует (в указанном смысле).*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ \infty}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Примеры:

1 . $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\dfrac{3}{e}$

2 . $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2$

Правило Лопиталя

Пример 1. Вычислить $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/\cos^2 x-1}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=2$$

Правило Лопиталя

Пример 3. Вычислить

$$\lim_{x\to 0} x\ln x$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

Правило Лопиталя

Пример 4. Вычислить

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$$

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

ЛЕКЦИЯ 7

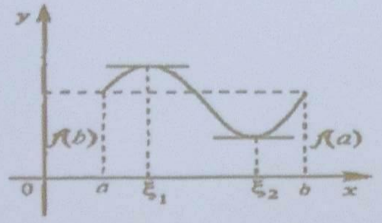
Приложения производной. Основные теоремы

Теорема Ферма. *Если дифференцируемая на промежутке X функция y=f(x) достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке* x_0 *этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е.* $f'(x_0)=0$.

Теорема Ролля. *Пусть функция* $y=f(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *непрерывна на отрезке* $[a, b]$;
2) *дифференцируема на интервале* (a, b);
3) *на концах отрезка принимает равные значения, т.е.* $f(a)=f(b)$.

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi\in(a, b)$, *в которой производная функция равна нулю:* $f'(\xi)=0$.



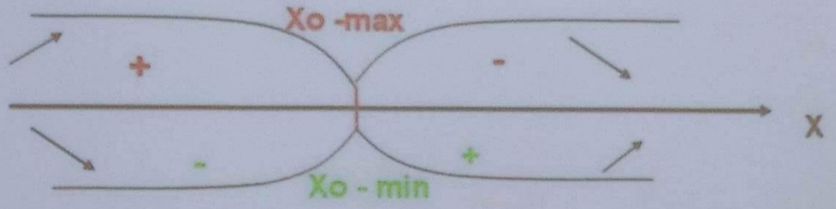
Необходимое и достаточное условия существования экструмума

Для того, чтобы непрерывная в точке Xo функция $y=f(x)$ имела в точке Xo экстремум

- **необходимо**: $y'(x_0)=0$

  $y'(x_0)=\infty$ или не существовала

- **достаточно**: производная $y'(x_0)$ меняла знак при переходе через x_0



Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы.

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Решить уравнение $f'(x)=0$ и найти критические точки.
3. Отметить критические точки на числовой прямой.
4. Определить знаки производной на получившихся промежутках (поставить «+», «-»).
5. Указать промежутки монотонности функции (поставить «↗», «↘»).
6. Сделать выводы о точках экстремума.

Пример:

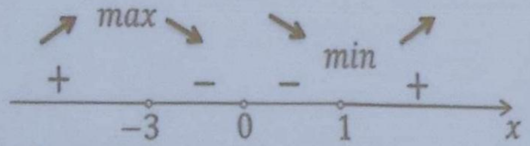
Исследовать функцию $y = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3$ на монотонность и экстремумы.

Решение:

$f'(x) = 10x^4 + 20x^3 - 30x^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 10x^4 + 20x^3 - 30x^2 = 0 \Leftrightarrow 10x^2(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10x^2 = 0$ или $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = -3$ или $x = 1$



при $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ функция возрастает,

при $x \in (-3; 0) \cup (0; 1)$ функция убывает $\Leftrightarrow$ при $x \in (-3; 1)$ функция убывает

$x = -3$ – точка максимума $y_{max} = 2(-3)^5 + 5(-3)^4 - 10(-3)^3 + 3 = 192$

$x = 1$ – точка минимума $y_{min} = 2 \cdot 1^5 + 5 \cdot 1^4 - 10 \cdot 1^3 + 3 = 0$