Домашняя работа

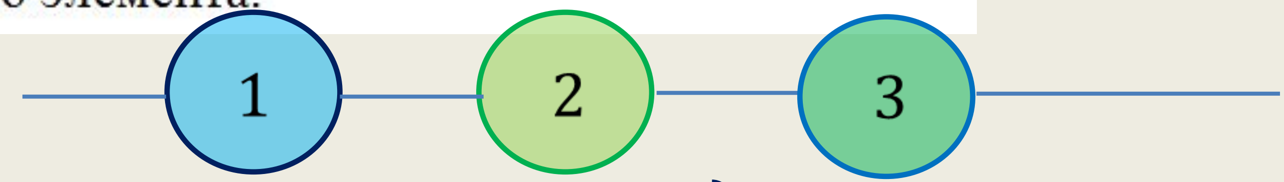
Задача 6. При увеличении напряжения в два раза может произойти разрыв электрической цепи с соответствующими вероятностями $p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,6$ при выходе из строя одного из трех последовательно соединенных элементов. Определить вероятность того, что разрыва цепи не будет. Как изменится вероятность, если не будет первого элемента.

ОТВЕТ 0,168 0,24

Задача 7. Метеослужба прогнозирует летную погоду в первый день (из определенных трех) с вероятностью 0,8, во второй день – с вероятностью 0,7, в третий – с вероятностью 0,6. Какова вероятность, что пассажир улетит в течение этих трех дней, если он решил ждать летной погоды?

ОТВЕТ 0,976

Задача 6. При увеличении напряжения в два раза может произойти разрыв электрической цепи с соответствующими вероятностями $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}4$; $p_3 = 0{,}6$ при выходе из строя одного из трех последовательно соединенных элементов. Определить вероятность того, что разрыва цепи не будет. Как изменится вероятность, если не будет первого элемента.



ДАНО:

события

$Э_1 =$ элемент 1 вышел из строя (сгорел, сломался) $\quad p(Э_1) = 0{,}3$

$Э_2 =$ элемент 2 вышел из строя $\quad p(Э_2) = 0{,}4$

$Э_3 =$ элемент 3 вышел из строя $\quad p(Э_3) = 0{,}6$

независимые

зависимые

$\mathrm{T} =$ разрыва цепи нет $=$ ток в цепи есть $= \overline{Э_1} \cdot \overline{Э_2} \cdot \overline{Э_3}$

НАЙТИ:

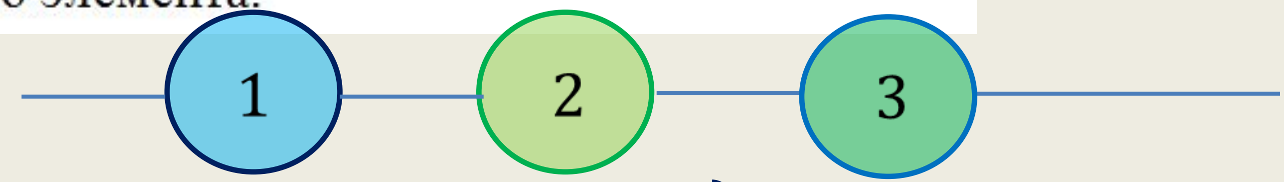
$p(\mathrm{T}) = ?$

РЕШЕНИЕ:

$$p(\mathrm{T}) = p(\overline{Э_1} \cdot \overline{Э_2} \cdot \overline{Э_3}) = p(\overline{Э_1}) \cdot p(\overline{Э_2}) \cdot p(\overline{Э_3}) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}168$$

ОТВЕТ

Задача 6. При увеличении напряжения в два раза может произойти разрыв электрической цепи с соответствующими вероятностями $p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,6$ при выходе из строя одного из трех последовательно соединенных элементов. Определить вероятность того, что разрыва цепи не будет. Как изменится вероятность, если не будет первого элемента.



ДАНО:
события

$Э_1 =$ элемент 1 вышел из строя (сгорел, сломался)

$Э_2 =$ элемент 2 вышел из строя

$Э_3 =$ элемент 3 вышел из строя

независимые

зависимые

$p(Э_1) = 0,3$

$p(Э_2) = 0,4$

$p(Э_3) = 0,6$

$\mathrm{T} =$ разрыва цепи нет $=$ ток в цепи есть $= \quad \overline{Э_2} \cdot \overline{Э_3}$

НАЙТИ:

$p(\mathrm{T}) = ?$

РЕШЕНИЕ:

$p(\mathrm{T}) = p(\overline{Э_2} \cdot \overline{Э_3}) = p(\overline{Э_2}) \cdot p(\overline{Э_3}) = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,168$ 0,24

ОТВЕТ

Задача 7. Метеослужба прогнозирует летную погоду в первый день (из определенных трех) с вероятностью 0,8, во второй день – с вероятностью 0,7, в третий – с вероятностью 0,6. Какова вероятность, что пассажир улетит в течение этих трех дней, если он решил ждать летной погоды?

ДАНО:

события

$\text{П} =$ летная погода в **первый** день

$\text{В} =$ летная погода во **второй** день

$\text{Т} =$ летная погода в **третий** день

несовместные

совместные

независимые

зависимые

$p(\text{П}) = 0{,}8$

$p(\text{В}) = 0{,}7$

$p(\text{Т}) = 0{,}6$

$\text{У} =$ улетит в течение этих трех дней $= \text{П} + \text{В} + \text{Т}$

НАЙТИ:

$p(\text{У}) = p(\text{П} + \text{В} + \text{Т}) = ?$

РЕШЕНИЕ:

$\overline{\text{У}} =$ **не** улетит в течение этих трех дней $= \overline{(\text{П} + \text{В} + \text{Т})} = \overline{\text{П}} \cdot \overline{\text{В}} \cdot \overline{\text{Т}}$

$$p(\overline{\text{У}}) = p(\overline{\text{П}} \cdot \overline{\text{В}} \cdot \overline{\text{Т}}) = p(\overline{\text{П}}) \cdot p(\overline{\text{В}}) \cdot p(\overline{\text{Т}}) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}024$$

$$p(\text{У}) = 1 - p(\overline{\text{У}}) = 1 - 0{,}024 = 0{,}976$$

ОТВЕТ

события

независимые

несовместные

Формула **умножения** вероятностей для ***независимых*** событий

$$p(N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_n) =$$
$$= p(N_1) \cdot p(N_2) \cdot p(N_3) \cdot \dots \cdot p(N_n)$$

Формула сложения вероятностей для ***несовместных*** событий

$$p(A_1 + A_2 + \dots + A_n) =$$
$$= p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n)$$

Вероятность **противоположного** события может быть найдена по формуле:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Лекция № 3

СХЕМА БЕРНУЛЛИ. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА.

Схема повторных испытаний Бернулли

Пусть проводится n независимых опытов.

В результате каждого опыта событие A или происходит, или не происходит $(\bar{A})$

Вероятность того, что событие A произойдет, одинакова в каждом опыте:

$$p(A) = p, \qquad 0 < p < 1$$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - p = q$$

Теорема

Вероятность того, что событие A в схеме Бернулли произойдет ровно m раз

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}}$$

Схема повторных испытаний Бернулли

Пусть один и тот же опыт повторяется n раз. Причем в результате одного опыта некоторое событие A либо происходит, либо не происходит. Причем вероятность наступления события A не зависит от номера опыта:

$$p(A) = p; \quad 0 < p < 1.$$

Тогда, вероятность того, что событие A не наступит:

$$p(\bar{A}) = q; \quad q = 1 - p.$$

Эту схему из повторных испытаний называют схемой повторных испытаний Бернулли.

Теорема

Вероятность того, что событие A в схеме Бернулли произойдет ровно m раз,

Вероятность того, что некоторое событие A в схеме повторных испытаний Бернулли происходит ровно m раз, находится с помощью формулы Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \bullet p^m \bullet q^{n-m}$$

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Теорема

Вероятность того, что событие A в схеме Бернулли произойдет ровно m раз

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Пример

Стрелок стреляет по мишени, и вероятность попадания в мишень не зависит от номера выстрела, она постоянна и равна 0,8. Что вероятнее: попасть два раза при четырех выстрелах, или три раза при шести?

Задача

За время облучения самолета вращающимся радиолокатором от него успевают отразиться 8 импульсов.

Отраженный импульс подавляется помехой и не принимается приемным устройством радиолокатора с вероятностью $0{,}1$.

Для **обнаружения** самолета необходимо **принять не менее 5 отраженных** импульсов.

Найти вероятность обнаружения, если отдельные импульсы подавляются независимо.

ДАНО: события

$A =$ один отраженный импульс принят $\quad p(A) = 0{,}9$

$C =$ самолет обнаружен

НАЙТИ $p(C)$

РЕШЕНИЕ: Схема Бернулли: $\quad n = \quad p = \quad q =$

$C =$ самолет обнаружен $= \{m \geq 5\}$

$=$ **принято** пять или **принято** шесть или **принято** семь или **принято** восемь

$p(C) = P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) =$ **закончить**

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Какова вероятность того, что при 10 бросаниях игральной кости три раза выпадет пять очков? Не более трех раз? Не менее трех раз?

Задача 2. Какова вероятность того, что при 10 бросаниях игральной кости число очков, кратное трем, выпадет больше двух, но меньше пяти раз?

Задача 3. Что вероятнее — выиграть у равносильного противника (ничейный результат исключается):

а) три партии из четырех или пять из восьми;

б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

Понятие полной группы событий

Определение. События $H_1, H_2 \ldots H_n$ образуют полную группу несовместных событий, если выполняются ~~три~~ условия:

1) $H_1 + H_2 + \ldots + H_n$ - достоверное событие

2) $H_k, k = \overline{1, n}$ - попарно несовместимые,

т.е. $H_i \bullet H_j$ - невозможное событие, если $j \neq i$,

~~3) События $H_k, k = \overline{1, n}$ равновозможные.~~

Формула полной вероятности

Пусть некоторое событие А происходит одновременно с одним из событий H_k, причем неизвестно заранее с каким именно. Тогда события H_k принято называть гипотезами, так как не известно заранее, какая из гипотез имела место.

Доказательство формулы полной вероятности

Воспользуемся тем, что события H_k образуют полную группу событий. Тогда $H_1 + H_2 + ... + H_n = H$ - достоверное событие.

Следовательно:

$$
\begin{aligned}
p(A) &= p(A \bullet H) = p(A \bullet H_1 + A \bullet H_2 + ... + A \bullet H_n) = \\
&= p(A \bullet H_1) + p(A \bullet H_2) + ... + p(A \bullet H_n) = \\
&= p(H_1) p(A | H_1) + p(H_2) p(A | H_2) + ... + p(H_n) p(A | H_n)
\end{aligned}
$$

Пример

В группе 22 студента, среди которых 4 отличника, 5 хорошистов, 2 двоечника, а остальные с удовлетворительными знаниями. Вероятность сдать экзамен у отличника – 0,9; у хорошиста - 0,8; у троечника – 0,6; у двоечника – 0,3. Случайно выбранный студент из группы сдает экзамен. Найти вероятность того, что он сдаст экзамен.

Решение

Всего 22 студент, отсюда:

$p(H_1) =$ $p(H_2) =$ $p(H_3) =$ $p(H_4) =$

$p(A|H_1) =$ $p(A|H_2) =$

$p(A|H_3) =$ $p(A|H_4) =$

$$p(A) = p(H_1)p(A|H_1) + p(H_2)p(A|H_2) +$$
$$+ p(H_3)p(A|H_3) + p(H_4)p(A|H_4) =$$

$= 0{,}16 + 0{,}18 + 0{,}3 + 0{,}027 =$ $0{,}667$ **ОТВЕТ**

Задача

Для улучшения качества радиосвязи используется **два** приемника,
которые работают независимо.

Вероятность приема сигнала каждым приемником равна 0,8;

Вероятность безотказной работы каждого приемника равна 0,9.

Найти вероятность приема сигнала.

ДАНО:

события

$\Pi_1 =$ приемник 1 работает $\qquad p(\Pi_1) = 0{,}9$

$\Pi_2 =$ приемник 2 работает $\qquad p(\Pi_2) = 0{,}9$

$A =$ прием сигнала

НАЙТИ:

$p(A) = ?$

РЕШЕНИЕ: по формуле полной вероятности

$H_1 = \Pi_1 \cdot \overline{\Pi_2}$

$H_2 = \Pi_2 \cdot \overline{\Pi_1}$

$H_3 = \Pi_1 \cdot \Pi_2$

$H_4 = \overline{\Pi_1} \cdot \overline{\Pi_2}$

закончить дома

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3. В цехе работают 20 станков. Из них 10 – марки *A*, 6 – марки *B* и 4 – марки *C*. Вероятность того, что качество изделий окажется отличным, равна: для станков марки *A* – 0,9, марки *B* – 0,8, марки *C* – 0,7. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом?

Задача 4. 60% кинескопов, имеющихся на складе телеателье, изготовлены заводом № 1, а остальные – заводом № 2. Вероятность того, что кинескоп завода № 1 не выйдет из строя в течение гарантийного срока службы, равна 0,9, а для кинескопов завода № 2 эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что наугад взятый кинескоп выдержит гарантийный срок службы.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5. На сборку поступают детали с трех автоматов. Первый дает 20%, второй – 30%, третий – 50% деталей данного типа. Первый автомат дает 0,2% брака, второй – 0,3% брака, третий – 0,1%. Найти вероятность поступления на сборку бракованной детали.

Задача 6. В спартакиаде участвуют 30 спортсменов: 10 лыжников, 12 прыгунов с трамплина, 8 конькобежцев. Вероятность выполнить норму для каждого лыжника, прыгуна и конькобежца равна соответственно 0,5; 0,6; 0,3. Найти вероятность того, что наудачу вызванный спортсмен не выполнит норму.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7. Из одной колоды в 52 карты переложили во вторую колоду из 36 карт одну карту. Найти вероятность того, что после этого из второй колоды вынут туз.

Задача 8. Имеются две партии изделий. В первой партии 10 штук, из них 8 бракованных. Во второй – 8 штук, из них 7 – бракованных. Из первой партии во вторую перекладывают одно изделие, затем из второй берут наугад одно изделие. Найти вероятность того, что оно бракованное.