

Клавдий Птолемей 90-168 гг.

Позднеэллинистический астроном, астролог, математик, механик, оптик, теоретик музыки и географ. Жил и работал в Александрии Египетской.

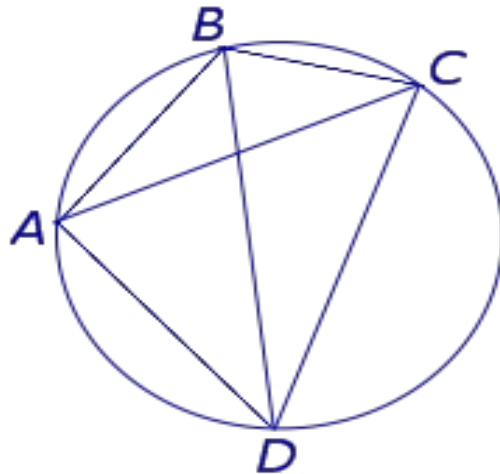
# Теорема Птолемея

Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон.

Докажем, что  $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

# Доказательство

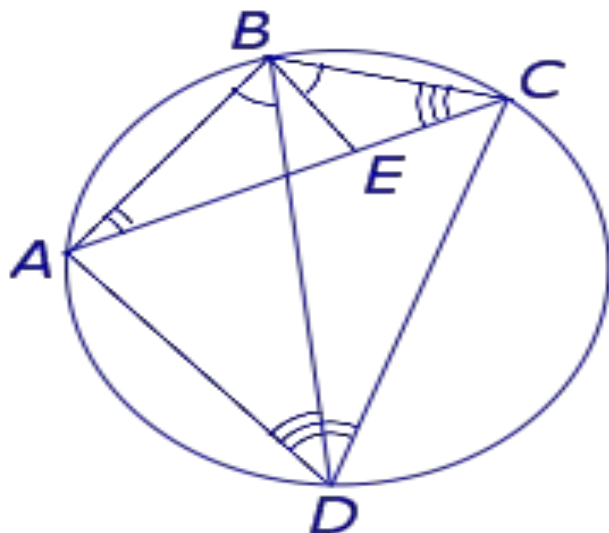
Рассмотрим произвольный четырёхугольник  $ABCD$ , вписанный в окружность.



Выберем на диагонали AC точку E так, чтобы угол ABD был равен углу CBE. треугольник ABD подобен треугольнику BCE. У этих треугольников по два равных угла: угол ABD равен углу CBE (по построению точки E), угол ADB равен углу ACB (эти углы являются вписанными углами, опирающимися на одну и ту же дугу).

Следовательно справедлива пропорция:  $\frac{BD}{EC} = \frac{BA}{AD}$  откуда

$$\frac{BD}{EC} = \frac{BA}{AD} \Rightarrow BC \cdot AD = EC \cdot BD(1)$$

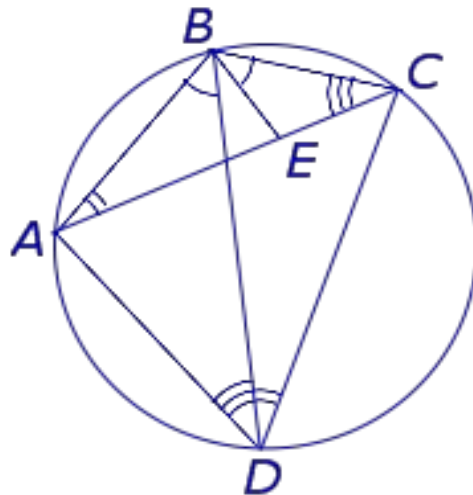


Треугольник ABE подобен треугольнику BCD. У этих треугольников по два равных угла: угол ABE равен углу BDC (углы ABD и EBC равны по построению, угол DBE – общий), угол BAC равен углу BDC (эти углы являются вписанными углами, опирающимися на одну и ту же дугу).

Следовательно, справедлива пропорция:  $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD}$ ,

откуда вытекает равенство:

$$AB \cdot CD = AE \cdot BD \quad (2)$$



Складывая равенства (1) и (2),  
получаем:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AE \cdot BD + EC \cdot BD = (AE + EC) \cdot BD = AC \cdot BD$$

что и требовалось доказать.