# Клавдий Птолемей 90-168 гг.

Позднеэллинистический астроном, астролог, математик, механик, оптик, теоретик музыки и географ. Жил и работал в Александрии Египетской.

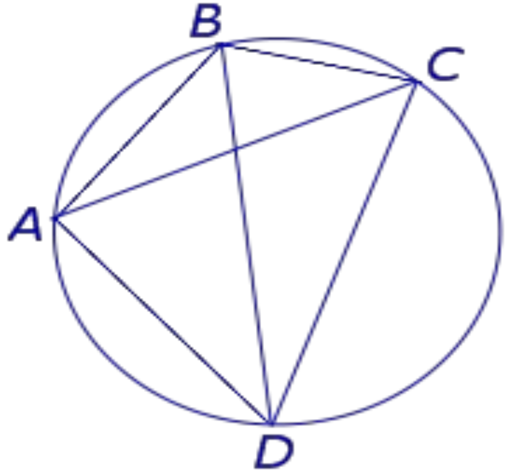
# Теорема Птолемея

Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон.

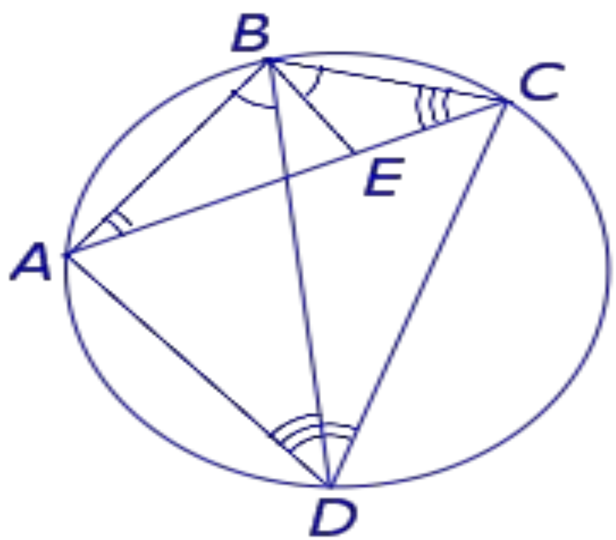
Докажем, что $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

# Доказательство

Рассмотрим произвольный четырёхугольник ABCD, вписанный в окружность.

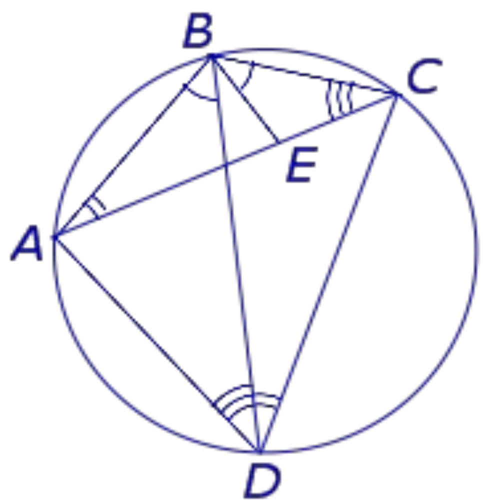


Выберем на диагонали AC точку E так, чтобы угол ABD был равен углу CBE. треугольник ABD подобен треугольнику BCE. У этих треугольников по два равных угла: угол ABD равен углу CBE (по построению точки E), угол ADB равен углу ACB (эти углы являются вписанными углами, опирающимися на одну и ту же дугу). Следовательно, справедлива пропорция: $\frac{BC}{EC}=\frac{BD}{AD}$ откуда вытекает равенство:BC·AD=EC·BD(1)



Треугольник ABE подобен треугольнику BCD. У этих треугольников по два равных угла: угол ABE равен углу DBC (углы ABD и EBC равны по построению, угол DBE – общий), угол BAC равен углу BDC (эти углы являются вписанными углами, опирающимися на одну и ту же дугу). Следовательно, справедлива пропорция: $\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{CD}$, откуда вытекает равенство:

$AB \cdot CD = AE \cdot BD$ (2)



# Складывая равенства (1) и (2), получаем:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AE \cdot BD + EC \cdot BD = (AE + EC) \cdot BD = AC \cdot BD$$

что и требовалось доказать.