



# Logit & probit модели

---

Чеботарь Полина  
Мартьянова Елизавета



# Содержание

---

**Введение**

Логит - модель

Пробит - модель

# Модели двоичного выбора

## Примеры

Часто интересны факторы, определяющие подобные ситуации:

- Почему одни люди поступают в вузы, а другие – нет?
- Почему одни люди меняют место жительства, а другие – нет?
- И т.п. (ответ можно закодировать как «нет» = 0, «да» = 1)

## Типы

- Линейная модель
- Логит-модель
- Пробит-модель
- Тобит-модель

## Метод оценки

- Метод максимального правдоподобия
- МНК (только для линейной модели)

## Функция вероятности события

$$p_i = p(Y_i=1) = \beta_1 + \beta_2 X_i \quad \bullet \text{Линейная модель}$$

$$p_i = F(Z_i) = \frac{1}{1 + e^{-Z_i}} \quad \bullet \text{Логит-модель}$$

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \quad \bullet \text{Пробит-модель}$$



# Содержание

---

Введение

**Логит - модель**

Пробит - модель



# Логит-модель. Области применения

---

*Историческая справка:*

В 1950-х зарождалась в работах разных авторов, в нынешнем виде сформулирована в середине 1960х (D.R. Cox *Some procedures associated with the logistic qualitative response curve*).

**Используется:**

- Медицина (определение вероятности успешного лечения и т.п.)
- Социология
- Маркетинговые исследования (предсказание склонности к покупке)
- Задачи классификации (скоринг в банках, маркетинг и пр.)

# Логит-модель. Математический СМЫСЛ

- Вероятность события определяется функцией:

$$p_i = F(Z_i) = \frac{1}{1 + e^{-Z_i}}, \text{ где } Z:$$

$$Z_i = \beta_1 + \beta_2 X_i \text{ - Линейная комбинация независимых факторов}$$

- Предельное воздействие вел-ны Z на вероятность есть производная функции вероятности:

$$f(Z) = \frac{dp}{dZ} = \frac{e^{-Z}}{(1 + e^{-Z})^2}$$

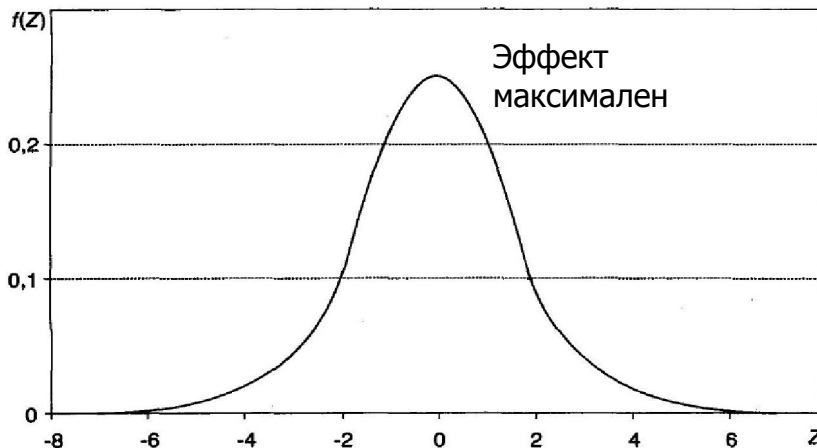
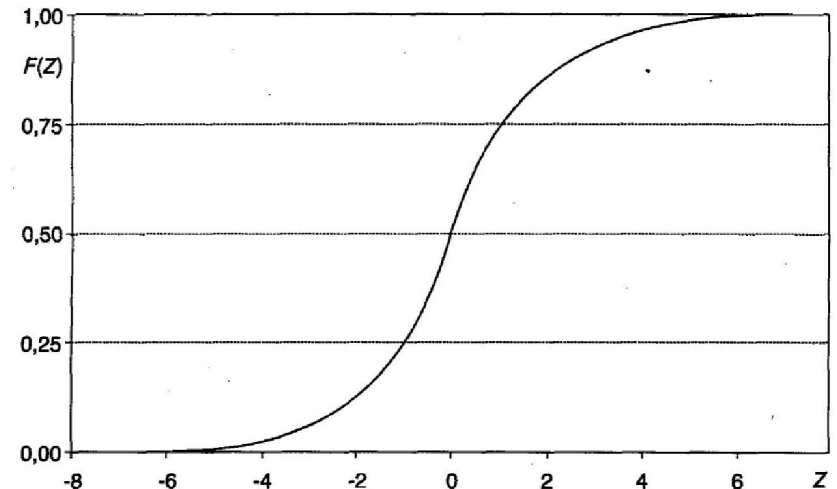


Рис. 10.4. Предельное воздействие Z на вероятность



Исправление недостатка линейной модели, в которой вероятность могла получаться больше 1 (что логически неверно):

- $Z \rightarrow \infty$ ,  $e^{-Z} \rightarrow 0$ , вероятность ограничена сверху 1
- $Z \rightarrow -\infty$ ,  $e^{-Z} \rightarrow \infty$ , вероятность ограничена снизу 0



# Логит-модель. Этапы оценки.

---

- 1) Определение зависимой переменной и факторов
- 2) Построение переменной  $Z$ , как линейной комбинации независимых переменных
- 3) Построение уравнения для искомой вероятности события и нахождение производных (для оценки кумулятивного и предельного воздействия факторов)
- 4) Проведение вычислений с помощью программы (используется метод максимального правдоподобия)
- 5) Интерпретация результатов
- 6) Качество оценивания

# Пример. Окончание средней школы (1)

1)

Переменная

Описание

**GRAD**

- Зависимая переменная
- 1- если индивид окончил школу, 0 – в противном случае

**ASVABC**

- Независимая переменная
- Совокупный результат тестирования познавательных способностей

**SM**

- Независимая переменная
- Число лет обучения матери респондента

**SF**

- Независимая переменная
- Число лет обучения отца респондента

**MALE**

- Независимая переменная, фиктивная переменная
- Пол, 1=мужской, 0=женский

2)

$$Z = \beta_1 + \beta_2 ASVABC + \beta_3 SM + \beta_4 SF + \beta_5 MALE.$$



# Пример. Окончание средней школы (2)

3) 
$$p_i = F(Z_i) = \frac{1}{1 + e^{-Z_i}}$$
 (Подставляется полученное выражение для Z)

4) . logit GRAD ASVABC SM SF MALE  
Logit estimates Number of obs = 540  
LR chi2(4) = 43.75  
Prob > chi2 = 0.0000  
Log likelihood = -96.804844 Pseudo R2 = 0.1843

GRAD	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf.	Interval]
ASVABC	.1329127	.0245718	5.41	0.000	.0847528	.1810726
SM	-.023178	.0868122	-0.27	0.789	-.1933267	.1469708
SF	.0122663	.0718876	0.17	0.865	-.1286307	.1531634
MALE	.1279654	.3989345	0.32	0.748	-.6539318	.9098627
_cons	-3.252373	1.065524	-3.05	0.002	-5.340761	-1.163985

Таблица оцененных коэффициентов. Далее для оценки кумулятивного и предельного эффектов необходимо произвести дальнейшие расчеты, подставив полученные коэффициенты в формулы.

# Пример. Окончание средней школы (3)

Переменная	Среднее	$b$	Среднее $\times b$	$f(Z)$	$bf(Z)$
<i>ASVABC</i>	51,36	0,1329	6,8257	0,0281	0,0037
<i>SM</i>	11,58	-0,0231	-0,2687	0,0281	-0,0007
<i>SF</i>	11,84	0,0123	0,1456	0,0281	0,0003
<i>MALE</i>	0,50	0,1280	0,0640	0,0281	0,0036
Постоянный член	1,000	-3,2524	-3,2524		
Итого			3,5143		

$$\frac{dp}{dASVABC} = \frac{dp}{dZ} \times \frac{dZ}{dASVABC} = f(Z)\beta_2$$

Пример нахождения выражения предельного эффекта для одной из переменных

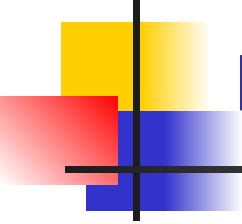
Столбец предельных эффектов



# Пример. Окончание средней школы (4)

---

- 5)
- Увеличение ASVABC на один балл увеличивает вероятность успешного окончания школы на 0,4 процентных пункта.
  - Аналогично, влияет принадлежность к мужскому полу.
  - Образование родителей влияет незначительно
  - Кроме того, на 10% уровне значимости значим только коэффициент при переменной ASVABC



# Пример. Окончание средней школы (4)

---

6) **Для метода максимального правдоподобия нет коэффициента, аналогичного R-square, поэтому используются следующие способы:**

-Число правильно предсказанных исходов, если в наблюдении  $i$ , считать предсказанием 1 при  $p(i) > 0,5$ , 0 – в противном случае

-Сумма квадратов отклонений  $\sum_{i=1}^n (Y_i - p_i)^2$

-Коэффициент корреляции между исходными и предсказанными значениями

Кроме того, значимость отдельных коэффициентов по-прежнему можно оценить с помощью t-статистики (или z-статистики для больших выборок).



# Содержание

---

Введение

Логит - модель

**Пробит - модель**



# Пробит-модель. Обзор

---

- 1935 год – Chester Bliss «THE CALCULATION OF THE DOSAGE-MORTALITY CURVE», Annals of Applied Biology
- 1)1934 год - Chester Bliss «The method of probits», Science  
2)1947 - David John Finney «Probit Analysis», Cambridge University Press
- Сферы использования
  - Медицина
  - Социология
  - Маркетинг
  - Любые статистические исследования

# Пробит-модель. Математическая составляющая 1(2)

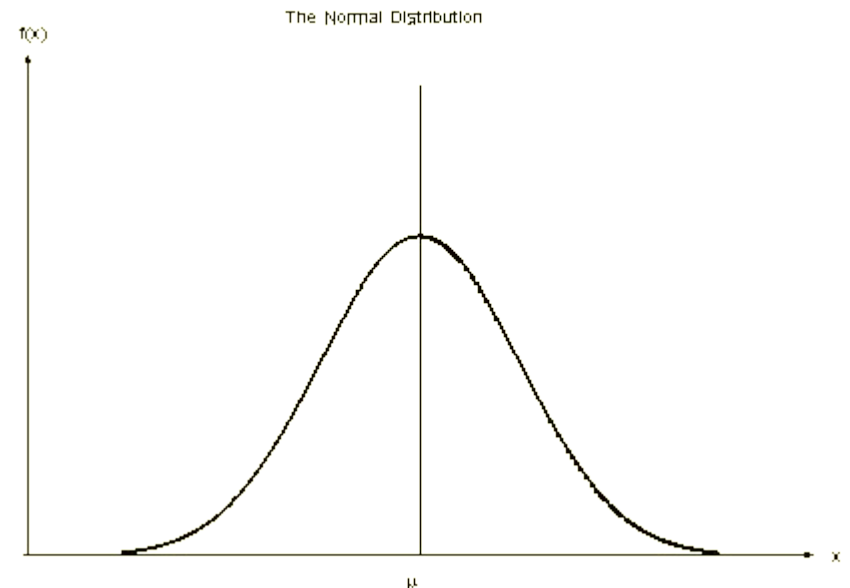
Пробит-модель – альтернативная модель двоичного выбора

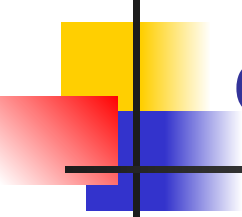
Для пробит-анализа используется стандартное нормальное распределение для моделирования зависимости  $F(Z)$

$$P_i = F(Z_i).$$

- функция вероятности зависит от переменной  $Z$ , которая в свою очередь зависит от выбранных факторов

$$Z = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k.$$





# Пробит-модель. Математическая составляющая 2(2)

---

Для оценки параметров, как и в логит-модели, используется метод максимального правдоподобия

Предельный эффект переменной  $X_i$  - равен производной функции вероятности по этой переменной

$$\frac{\partial p}{\partial X_i} = \frac{dp}{dZ} \frac{\partial Z}{\partial X_i} = f(Z)\beta_i.$$

Так как  $f(Z)$  – производная функции (функция плотности) стандартного нормального распределения  $F(Z)$ , то она выглядит следующим образом

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}.$$





# Пробит-модель

---

Расчет общей статистики предельного эффекта:

1. Рассчитать значение  $Z$  для средних значений объясняющих переменных

$$Z = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k.$$

2. Рассчитывается  $f(Z)$  по формуле

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}.$$

3. Рассчитывается предельный эффект  $X_i$  равный  $f(z)\beta_i$



# Пробит-модель. Применение 1(3)

Переменная	Описание
<b>GRAD</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>•Зависимая переменная</li><li>•1- если индивид окончил школу, 0 – в противном случае</li></ul>
<b>ASVABC</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>•Независимая переменная</li><li>•Совокупный результат тестирования познавательных способностей</li></ul>
<b>SM</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>•Независимая переменная</li><li>•Число лет обучения матери респондента</li></ul>
<b>SF</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>•Независимая переменная</li><li>•Число лет обучения отца респондента</li></ul>
<b>MALE</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>•Независимая переменная, фиктивная переменная</li><li>•Пол, 1=мужской, 0=женский</li></ul>

$$Z = \beta_1 + \beta_2 ASVABC + \beta_3 SM + \beta_4 SF + \beta_5 MALE.$$

# Пробит-модель. Применение 2(3)

```
. probit GRAD ASVABC SM SF MALE
Probit estimates Number of obs = 540
LR chi2(4) = 44.11
Prob > chi2 = 0.0000
Log likelihood = -96.624926 Pseudo R2 = 0.1858
```

GRAD	Coef.	Std. Err.	z	P> z	[95% Conf.	Interval]
ASVABC	.0648442	.0120378	5.39	0.000	.0412505	.0884379
SM	-.0081163	.0440399	-0.18	0.854	-.094433	.0782004
SF	.0056041	.0359557	0.16	0.876	-.0648677	.0760759
MALE	.0630588	.1988279	0.32	0.751	-.3266368	.4527544
_cons	-1.450787	.5470608	-2.65	0.008	-2.523006	-.3785673



# Пробит-модель. Применение 3(3)

Пробит оценивание – зависимая переменная GRAD

Переменная	Среднее	$b$	Среднее $\times b$	$f(Z)$	$bf(Z)$
<i>ASVABC</i>	51,36	0,0648	3,3281	0,0680	0,0044
<i>SM</i>	11,58	-0,0081	-0,0938	0,0680	-0,0006
<i>SF</i>	11,84	0,0056	0,0663	0,0680	0,0004
<i>MALE</i>	0,50	0,0631	0,0316	0,0680	0,0043
Постоянный член	1,00	-1,4508	-1,4508		
Итого			1,8814		

# Сравнение результатов оценки logit и probit

logit

Переменная	Среднее	$b$	Среднее $\times b$	$f(Z)$	$bf(Z)$
ASVABC	51,36	0,1329	6,8257	0,0281	0,0037
SM	11,58	-0,0231	-0,2687	0,0281	-0,0007
SF	11,84	0,0123	0,1456	0,0281	0,0003
MALE	0,50	0,1280	0,0640	0,0281	0,0036
Постоянный член	1,000	-3,2524	-3,2524		
Итого			3,5143		

probit

Переменная	Среднее	$b$	Среднее $\times b$	$f(Z)$	$bf(Z)$
ASVABC	51,36	0,0648	3,3281	0,0680	0,0044
SM	11,58	-0,0081	-0,0938	0,0680	-0,0006
SF	11,84	0,0056	0,0663	0,0680	0,0004
MALE	0,50	0,0631	0,0316	0,0680	0,0043
Постоянный член	1,00	-1,4508	-1,4508		
Итого			1,8814		

Незначительные  
изменения

# Логит и пробит анализ.

## Преимущества и недостатки

### Плюсы

- Исправление недостатка линейной модели, в которой вероятность могла получаться больше 1 (что логически неверно): вероятность от 0 до 1
- При решении задач классификации объекты можно разделять на несколько групп:
  - Например, в скоринге не только -(0 - плохой, 1 - хороший), но и несколько групп (1, 2, 3, 4 группы риска).

### Минусы

- Систематическое завышение оценки коэффициентов регрессии при размере выборки – менее 500
- При построении модели нужно минимально **10** исходов на каждую независимую переменную (рекомендованное значение **30-50**):
  - Например, интересующий исход – смерть пациента. Если 50 пациентов из 100 умирают – максимальное число независимых переменных в модели =  $50/10=5$



# Реальные исследования 1(2)

- 2010 – «**Predicting Foreign Bank Exits? Logit and Probit Regression Approach**», Aneta Hryckiewicz (*Goethe University, Frankfurt*), Oskar Kowalewski (*Warsaw School of Economics*)
- Данные:
  - 81 закрытый филиал в 37 странах
  - период 1999-2006
  - Анализ данных для филиала и домашнего региона, для года закрытия и предшествующего ему года

Переменная	расшифровка
<b>Assets</b>	Log total assets
<b>Agrowth</b>	Annual change of total assets
<b>Equity</b>	Equity to total assets ratio
<b>Loans</b>	Net loans to total assets ratio
<b>Liquidity</b>	Liquid assets to customer and short term funding ratio
<b>LQuality</b>	Loan loss provision to net interest revenue ratio
<b>ROAA</b>	Return on average assets
<b>Costs</b>	Cost to income ratio



# Реальные исследования. Результаты 2(2)

---

- Основная причина закрытия зарубежных отделений – не низкие финансовые показатели филиала, а внутренние проблемы материнского банка: выявлена прямая взаимосвязь между падением показателей материнского банка и ростом вероятности закрытия зарубежного подразделения.
- При этом в год закрытия показатели материнского банка показывали значительный рост
- Результаты логит и пробит анализа отличаются незначительно





Конец

---

Спасибо за внимание!



# ИСТОЧНИКИ

---

- Nemes S, Jonasson JM, Genell A, Steineck G. 2009 Bias in odds ratios by logistic regression modelling and sample size. *BMC Medical Research Methodology*
- Peduzzi P, Concato J, Kemper E, Holford TR, Feinstein AR (1996). "A simulation study of the number of events per variable in logistic regression analysis". *J Clin Epidemiol* 49 (12): 1373–9.
- Agresti A (2007). "Building and applying logistic regression models". *An Introduction to Categorical Data Analysis*. Hoboken, New Jersey: Wiley. p. 138
- Lennox, Clive S., Identifying Failing Companies: A Re-evaluation of the Logit, Probit and MDA Approaches (February 1998)
- Hryckiewicz, Aneta and Kowalewski, Oskar, Predicting Foreign Bank Exits? A Logit and Probit Regression Approach (January 15, 2010)