

# Метод деформируемого многогранника (Нелдера- Мида)

Кочеганова Л.М.  
М21-ИВТ-1

# Задача

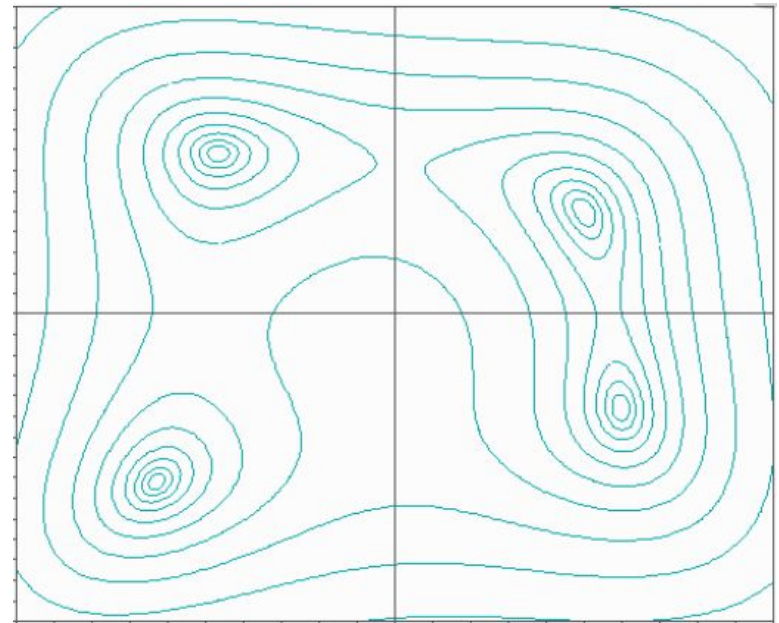
---

$$\min_{X \in R^n} \Phi(X) = \Phi(X^*) = \Phi^*$$

Найти минимум критерия оптимальности  $\Phi(X)$ , определенного в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R^n$

Метод использует следующие операции над симплексами:

1. отражение;
2. редукция;
3. сжатие;
4. растяжение.



# Отражение вершин симплекса

Производится относительно центра тяжести  $X_c$  остальных вершин.  
Отражение  $k$ -й вершины с координатами:

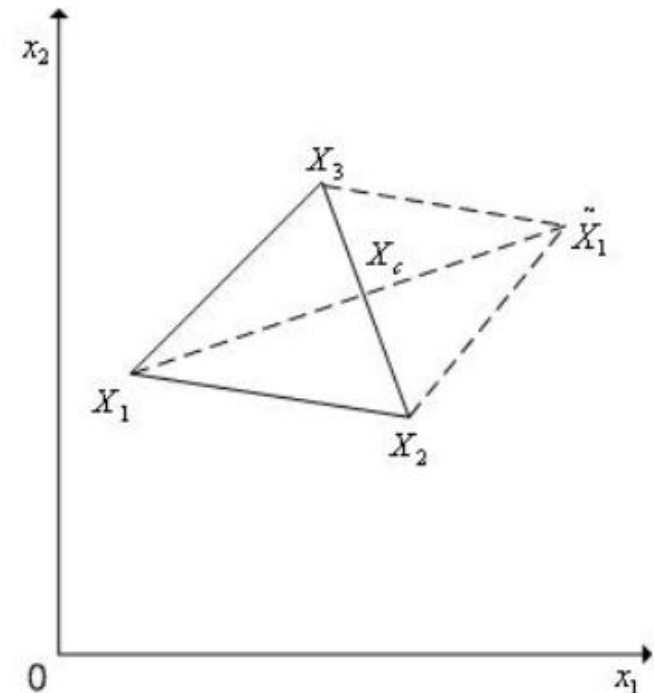
$$X_i^r, i \in [1, n+1]$$

Новый симплекс с координатами вершин:

$$X_i^{r+1} = X_i^r, i \in [1, n+1], i \neq k, X_k^{r+1} = 2X_c^r - X_k^r$$

Вектор координат центра тяжести остальных вершин симплекса:

$$X_c^r = \frac{1}{n} \sum_{i=1, i \neq k}^{n+1} X_i^r$$



# Редукция симплекса

Уменьшение длин всех ребер симплекса в одно и то же количество раз.

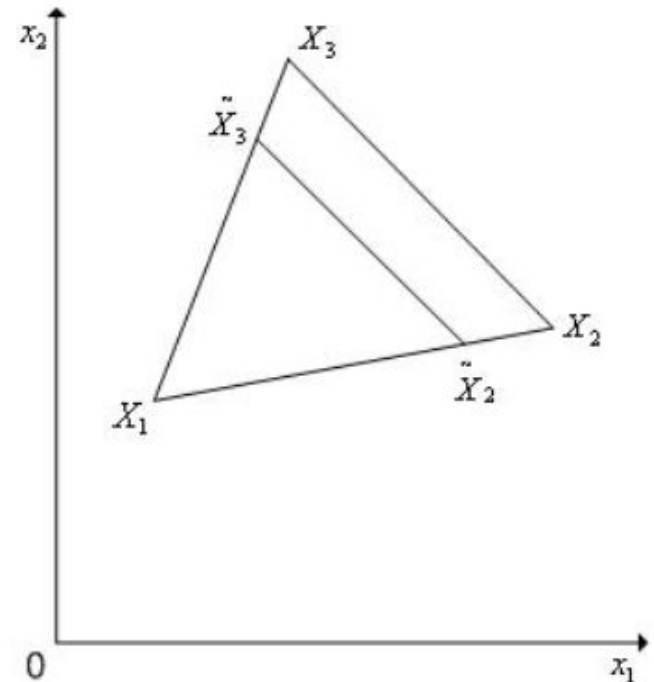
Редукция вершин симплекса  $X_i^r, i \in [1, n+1]$  к верши  $X_k$

Новый симплекс с координатами вершин:

$$X_i^{r+1} = X_k^r + \gamma(X_i^r - X_k^r), i \in [1, n+1], i \neq k, X_k^{r+1} = X_k^r$$

Коэффициенты редукции равны:

$$\gamma \in (0, 1), \gamma \approx 0.5$$



# Сжатие симплекса

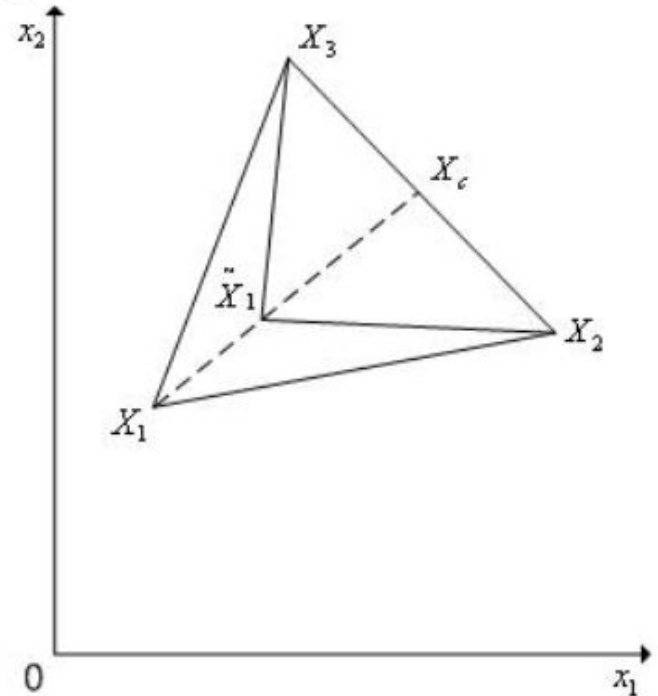
Сжатие симплекса  $X_i^r, i \in [1, n+1]$  в направлении  $(X_k^r - X_c^r)$

Новый симплекс с координатами вершин:

$$X_i^{r+1} = X_i^r, i \in [1, n+1], i \neq k, X_k^{r+1} = X_c^r + \beta(X_k^r - X_c^r)$$

Коэффициенты сжатия:

$$\beta \in (0, 1), \beta \approx 0.4-0.6$$



# Растяжение симплекса

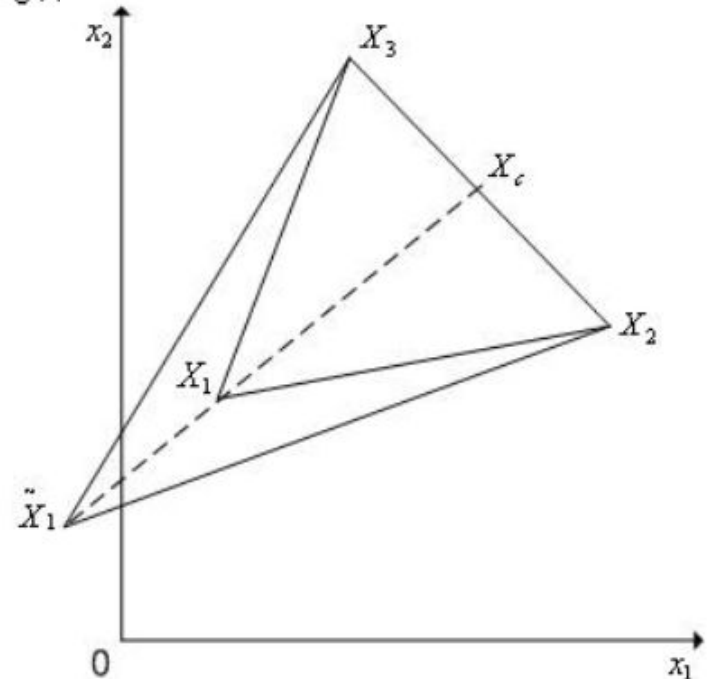
Сжатие симплекса  $X_i^r, i \in [1, n+1]$  в направлении  $(X_k^r - X_c^r)$

Новый симплекс с координатами вершин:

$$X_i^{r+1} = X_i^r, i \in [1, n+1], i \neq k, X_k^{r+1} = X_c^r + \alpha(X_k^r - X_c^r).$$

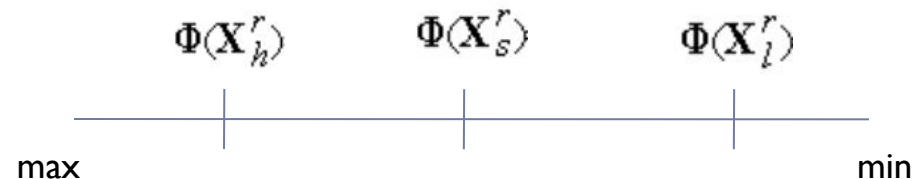
Коэффициенты растяжения:

$$\alpha \approx 2.8 - 3.0$$



# Схема метода Нелдера-Мида

- $X_i^r, i \in [1, n+1]$  обозначим за  $S^r$ ; зададим начальную точку  $X^0$
- Находим координаты  $X_i^0, i \in [1, n+1]$  и вычисляем значение функции во всех вершинах симплекса  $\Phi(X_i^0)$
- Среди вершин симплекса найдем те, что принимают наименьшее, наибольшее и следующее за максимальным значение  $X_{l=k_l}^r, X_{h=k_h}^r, X_{s=k_s}^r$   
Вычислим значение функции в них:
- $$\Phi(X_l^r) = \min_{i \in [1, n+1]} \Phi(X_i^r),$$
- $$\Phi(X_h^r) = \max_{i \in [1, n+1]} \Phi(X_i^r),$$
- $$\Phi(X_s^r) = \max_{i \in [1, n+1], i \neq h} \Phi(X_i^r)$$



# Схема метода Нелдера-Мида

Выполняем отражение вершины симплекса  $X_h^r$ , вычисляем  $\Phi(X_{kh}^{r+1})$ , получили новый симплекс  $S^{r+1}$

Если  $\Phi(X_{kh}^{r+1}) \leq \Phi(X_h^r)$   $\Phi(X_{kh}^{r+1}) \leq \Phi(X_l^r)$ .

Если  $\Phi(X_{kh}^{r+1}) \leq \Phi(X_h^r)$   $\Phi(X_{kh}^{r+1}) \geq \Phi(X_l^r)$ .

НО

Если  $\Phi(X_{kh}^{r+1}) \geq \Phi(X_h^r)$

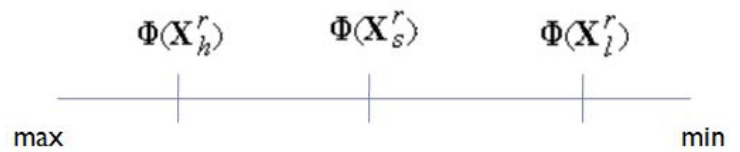
Растяжение симплекса в направлении  $(X_{kh}^{r+1} - X_c^{r+1})$ .  
Получаем новую вершину  $X_{kh}^{r+2}$ . Если  $\Phi(X_{kh}^{r+2}) \leq \Phi(X_l^r)$  возвращаемся к вычислению 3х вершин симплекса и отражению.  
 $r=r+2$

Возвращаемся к вычислению 3х вершин симплекса и отражению.

Сжатие симплекса в направлении  $(X_{kh}^{r+1} - X_c^{r+1})$ .  
Получаем новую вершину  $X_{kh}^{r+2}$ . Если  $\Phi(X_{kh}^{r+2}) \leq \Phi(X_{kh}^r)$ , то возвращаемся к вычислению 3х вершин симплекса и отражению.  
 $r=r+2$

Иначе - данные не используем.  
 $r=r+1$

Иначе – выполняем редукцию к вершине  $X_{l=k_l}^r$





# Условие окончания итераций

---

$$\max_{i \in [1, n+1], i \neq k} |\Phi(\mathbf{X}_i^{r+1}) - \Phi(\mathbf{X}_k^{r+1})| \leq \varepsilon_\Phi$$

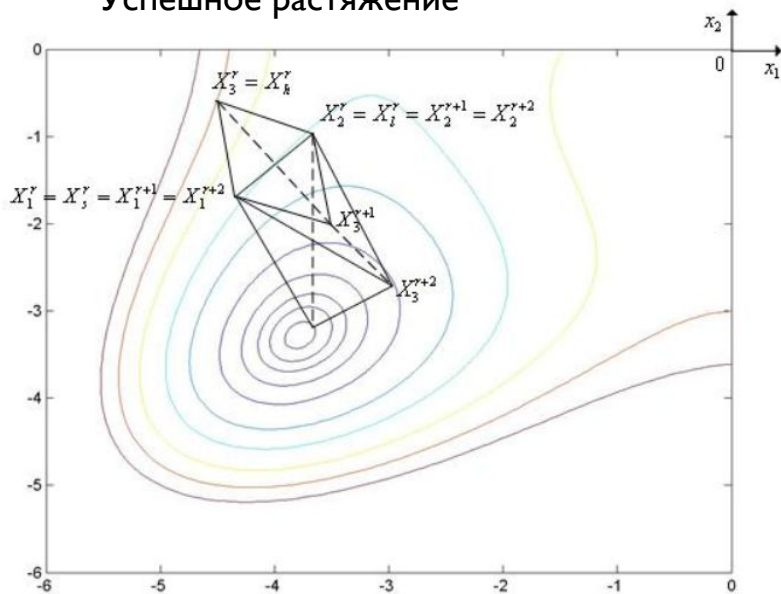
$\varepsilon_\Phi$  - требуемая точность решения

Можно завершать итерации, когда длина максимального из ребер текущего симплекса станет меньше или равна требуемой точности решения  $\varepsilon_X$

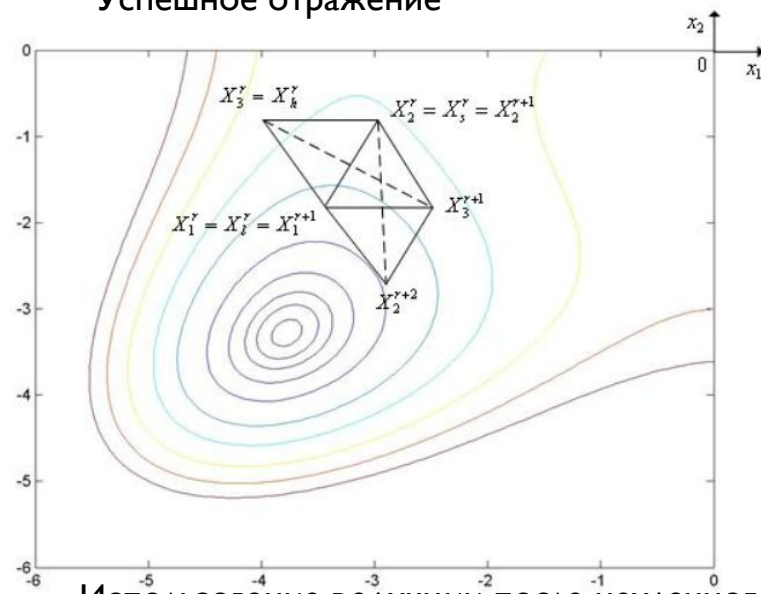
Также можно завершить алгоритм, если выполнено необходимое количество итераций.



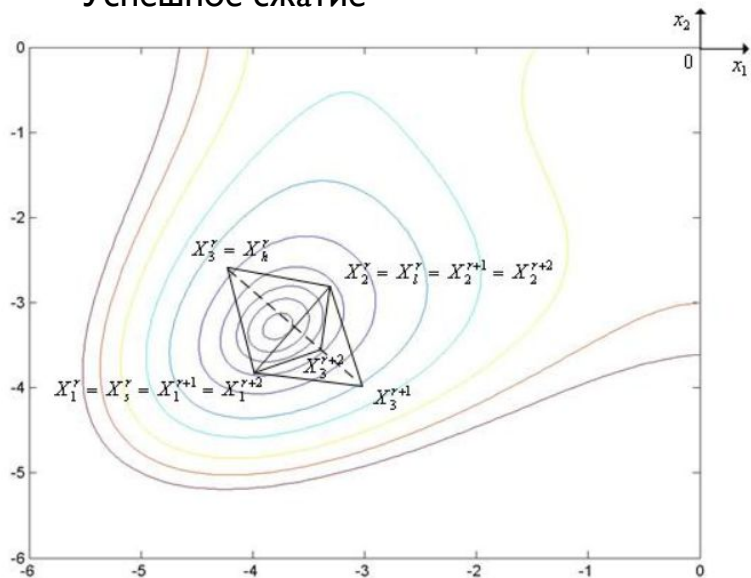
Успешное растяжение



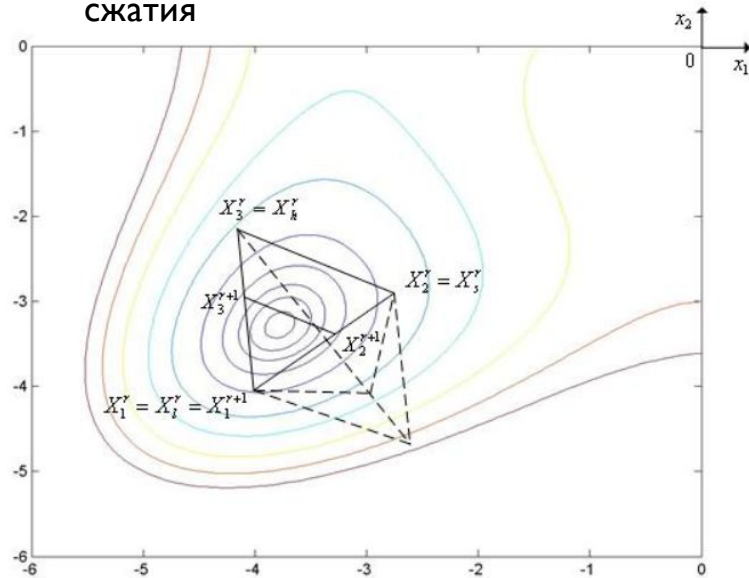
Успешное отражение



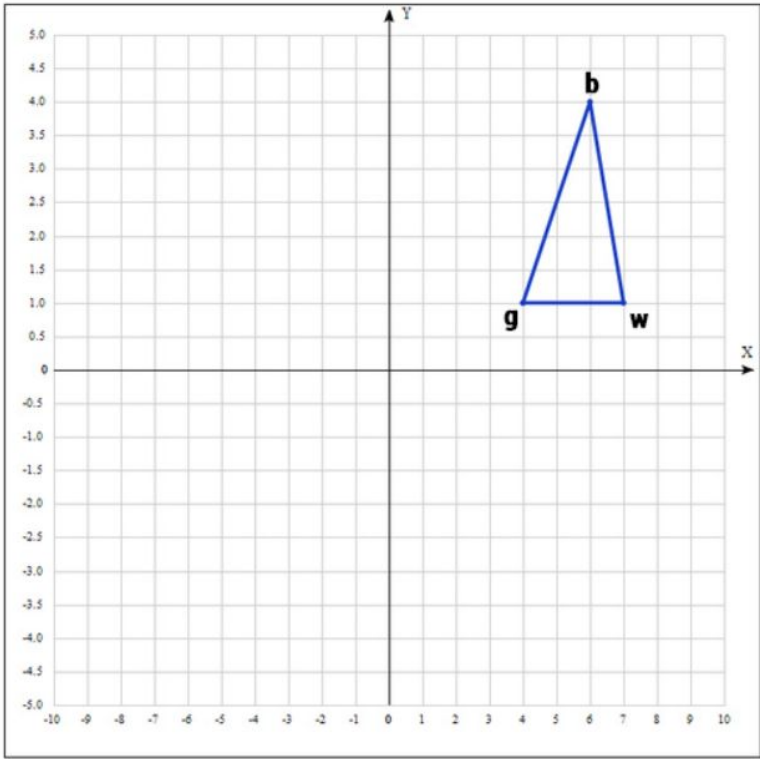
Успешное сжатие



Использование редукции после неудачного сжатия



1)



2)

$$mid = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

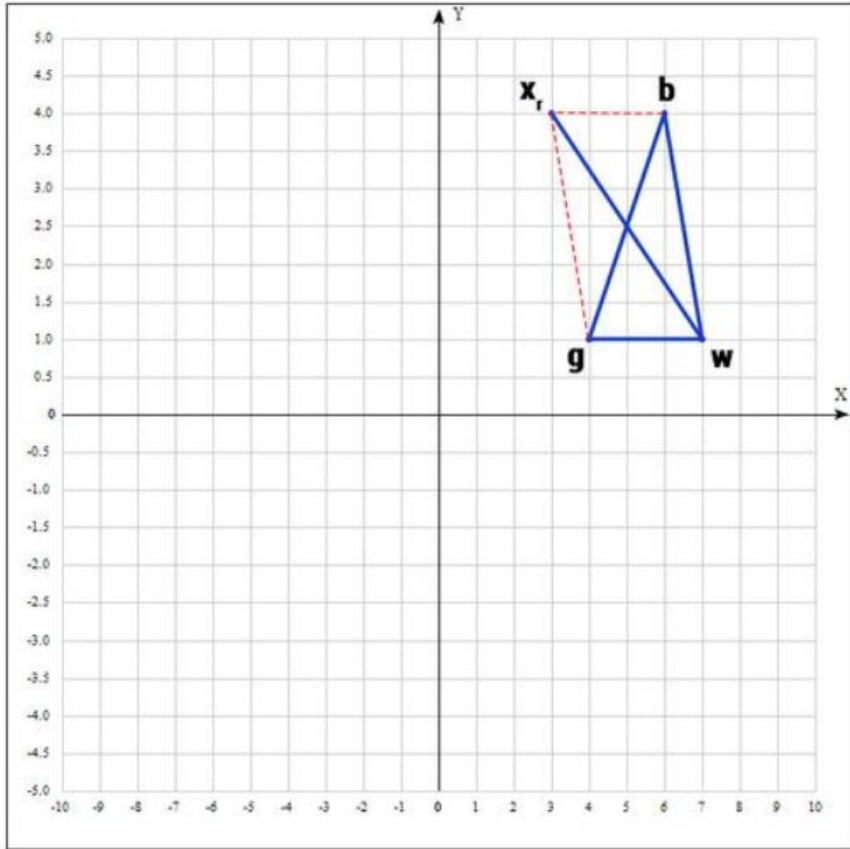
$$mid = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$f(V_2) \leq f(V_1) \leq f(V_3).$$

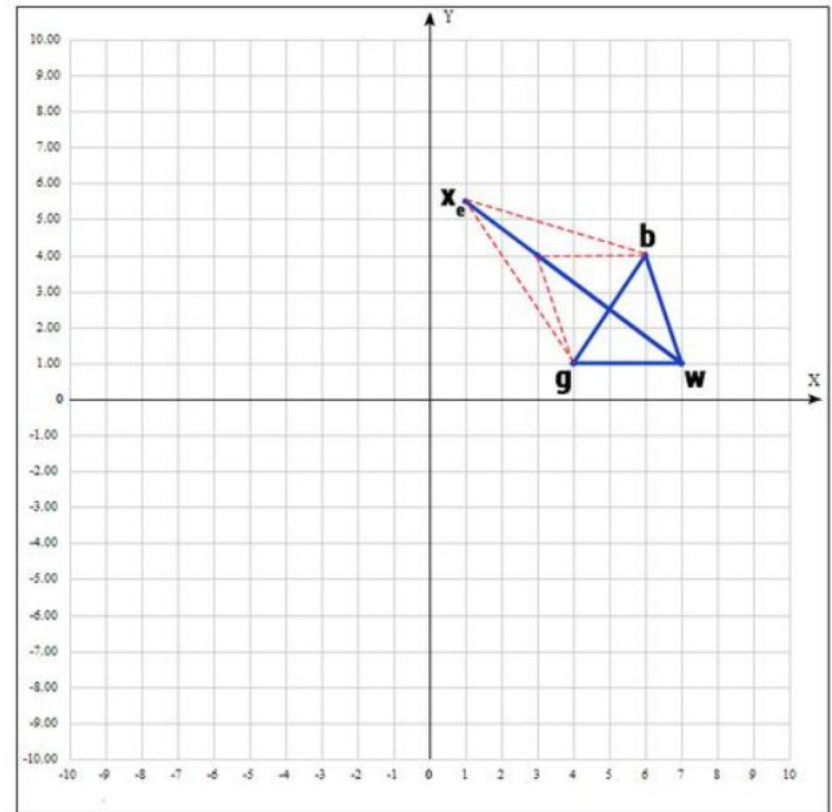
$b = V_2$ ,  $g = V_1$ ,  $w = V_3$ , где best, good, worst — соответственно.



3)  $x_r = mid + (mid - w)$



4)  $x_e = mid + (x_r - mid)$   
 $f(x_e) < f(b)$



# Пример

Найти экстремум следующей функции:  $F(x,y)=x^2+xy+y^2-6x-9y$

Возьмем точки:  $V1(0, 0); F(V1) = 0 = b$  ;

$V2(1, 0); F(V2) = -5 = g$ ;

$V3(0, 1); F(V3) = -8 = w$ .

Находим центр тяжести  $X_c$  (середина отрезка  $bg$ ) =  $(b+g)/2 = (1/2, 1/2)$

Отражение вершины:  $X1 = 2X_c - w = (1, 1)$

Вычисляем значение в точке  $X1$

$F(X1) = -12$  ;  $F(X1) < F(b)$   $\longrightarrow$  операция растяжения

Растяжение вершины:  $X2 = X_c + \alpha(X1 - X_c)$

Возьмем  $\alpha = 2$   $\longrightarrow X2 = (1.5, 1.5)$

Вычисляем значение в точке  $X2$

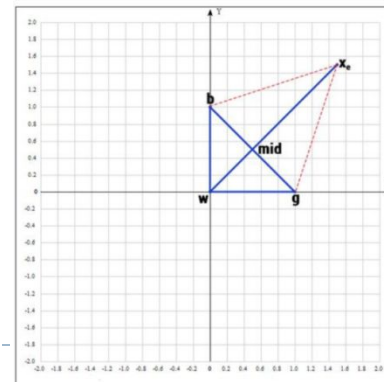
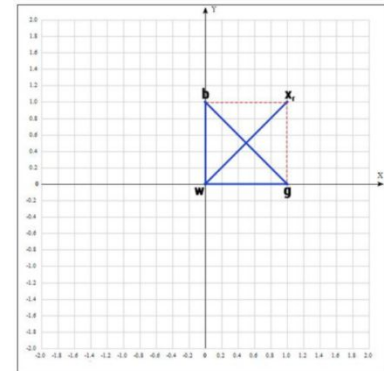
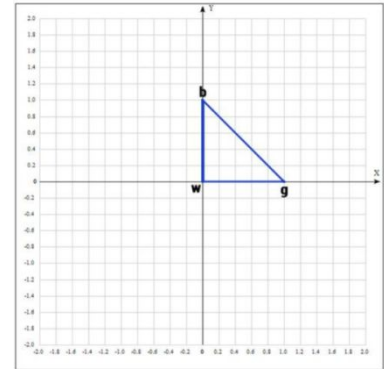
$F(X2) = -15.75$   $\longrightarrow$  получаем новые вершины

$V1(1.5, 1.5); F(V1) = -15.75$

$V2(1, 0); F(V2) = -5$

$V3(0, 1); F(V3) = -8$

**Начинаем алгоритм сначала!**



# Пример

Результат для 10 итераций

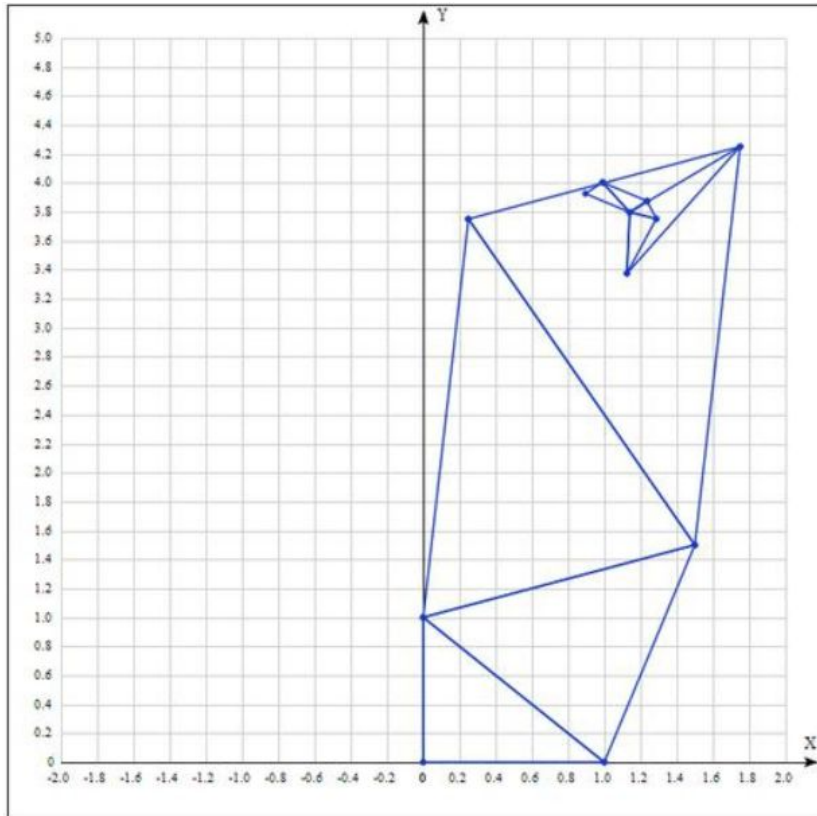


Таблица значений для 10 итераций

Best	Good	Worst
$f(0, 1) = -8$	$f(1.0, 0) = -5$	$f(0, 0) = 0$
$f(1.5, 1.5) = -15.75$	$f(0, 1) = -8$	$f(1.0, 0) = -5$
$f(0.25, 3.75) = -20.187$	$f(1.5, 1.5) = -15.75$	$f(0, 1) = -8$
$f(0.25, 3.75) = -20.187$	$f(1.75, 4.25) = -20.1875$	$f(1.5, 1.5) = -15.75$
$f(1.125, 3.375) = -20.671$	$f(1.75, 4.25) = -20.1875$	$f(0.25, 3.75) = -20.1875$
$f(1.140, 3.796) = -20.9638$	$f(1.125, 3.375) = -20.6718$	$f(1.75, 4.25) = -20.1875$
$f(1.140, 3.796) = -20.9638$	$f(1.287, 3.751) = -20.8668$	$f(1.125, 3.375) = -20.6718$
$f(1.140, 3.796) = -20.9638$	$f(1.236, 3.874) = -20.9521$	$f(1.287, 3.751) = -20.8668$
$f(0.990, 4.002) = -20.9951$	$f(1.140, 3.796) = -20.9638$	$f(1.2365, 3.874) = -20.9520$
$f(0.990, 4.002) = -20.9951$	$f(0.895, 3.925) = -20.9855$	$f(1.140, 3.796) = -20.9638$

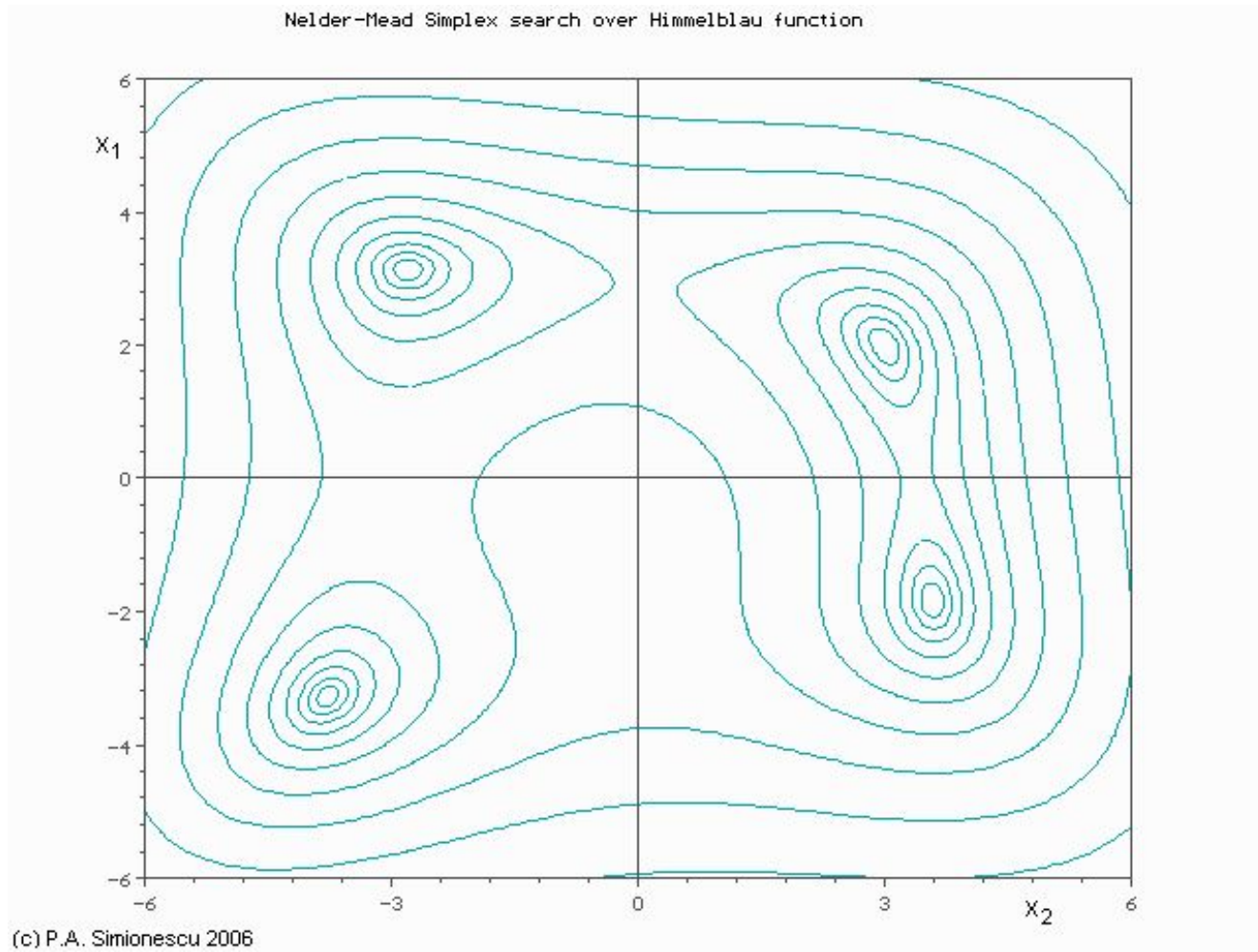
Ответ:

После 10 итераций мы получаем достаточно точное приближение:

$$F(0.990, 4.002) = -20.9951$$

Аналитический экстремум функции достигается в  $F(1,4) = -21$

# Визуальный пример работы



# Список литературы

---

1. [КУРС «Многомерная оптимизация». Лекция 10. Метод Нелдера — Мида на сайте Института дистанционного обучения ИНТУИТ.](#)
2. [Метод Нелдера-Мида. Краткий алгоритм.](#)
3. <http://bigor.bmstu.ru/?cnt/?doc=МО/ch0606.mod/?cou=МО/base.cou>
4. [http://wp.wiki-wiki.ru/wp/index.php/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4\\_%D0%9D%D0%B5%D0%BB%D0%B4%D0%B5%D1%80%D0%B0\\_%E2%80%94%D0%9C%D0%B8%D0%B4%D0%B0](http://wp.wiki-wiki.ru/wp/index.php/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%9D%D0%B5%D0%BB%D0%B4%D0%B5%D1%80%D0%B0_%E2%80%94%D0%9C%D0%B8%D0%B4%D0%B0)
5. <https://habr.com/ru/post/332092/>

