LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES RELATIVES AUX OSCILLATEURS MECANIQUES

LE PENDULE SIMPLE

QUELQUES REMARQUES PRELIMINAIRES

Un mouvement harmonique simple existe lorsqu'une force de rappel est appliquée au système.
Cette force est proportionnelle et de sens opposé au déplacement repéré par rapport à une position d'équilibre

Dans un mouvement harmonique simple, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle changent constamment.
Leur somme, l'énergie mécanique, demeure constante

Lors d'oscillations simples, l'amplitude est constante et la période est indépendante de l'amplitude

Il peut se produire un phénomène de résonance dans le cas où le système est entraîné par une force périodique dont la fréquence est proche de la fréquence propre d'oscillation du système

Les systèmes soumis à des forces élastique (proportionnelles à la déformation) décrivent un mouvement sinusoïdal Ils constituent des oscillateurs harmoniques

Dans le cas d'oscillations mécaniques
le système subit un déplacement linéaire ou angulaire

Oscillations non mécaniques
(phénomènes électriques)

Oscillations harmoniques simples
(oscillations sans perte d'énergie)

Oscillations harmoniques amorties
(existence de frottements, diminution de l'énergie)

TERMINOLOGIE

Mouvement périodique

Mouvement ou évènement qui se répète à des intervalles réguliers

$$x(t) = x(t + T)$$

T
période du mouvement
unité : seconde (s)

$$f = \frac{1}{T}$$

f
fréquence
unité : s^{-1} ou hertz (HZ)
1 Hz = 1 oscillation par seconde

Oscillations

mouvement de va et vient entre deux positions extrêmes sur une trajectoire donnée autour d’une position d’équilibre stable (d’une valeur d’équilibre ou valeur centrale)

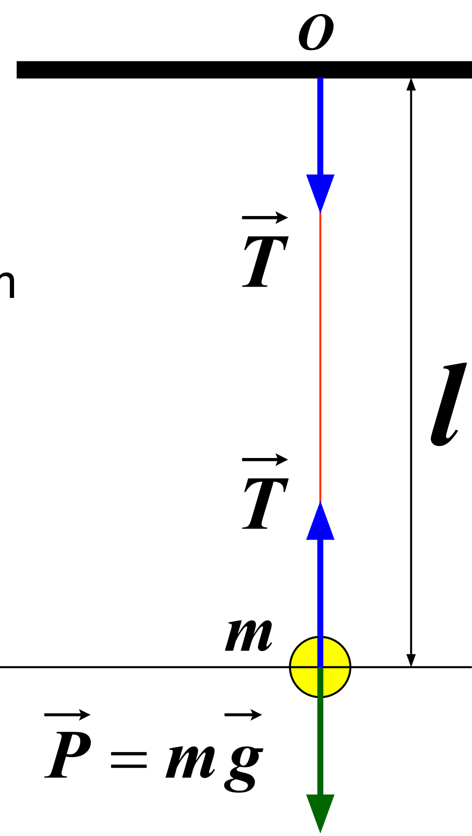
DEFINITION

on appelle pendule tout système pouvant osciller dans un plan vertical autour d'un point fixe

un pendule simple est constitué d'un objet ponctuel suspendu à un point fixe par un fil de longueur l invariable et de masse négligeable

position d'équilibre stable

Système : bille de masse m
Référentiel : géocentrique
Supposé galiléen
Repère : attaché à la bille



Forces extérieures appliquées à la bille :

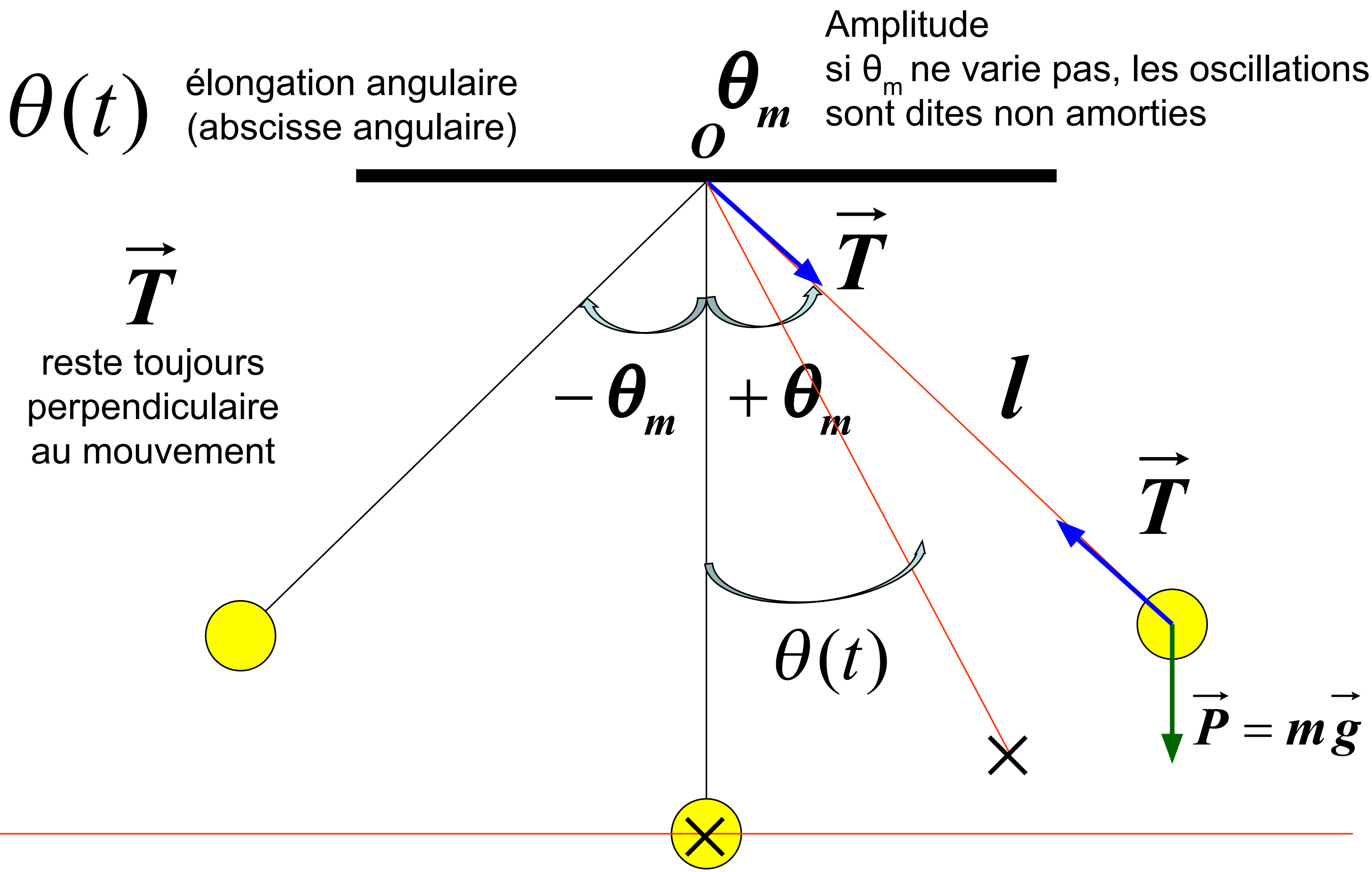
$\vec{T}$ tension du fil

$\vec{P}$ poids

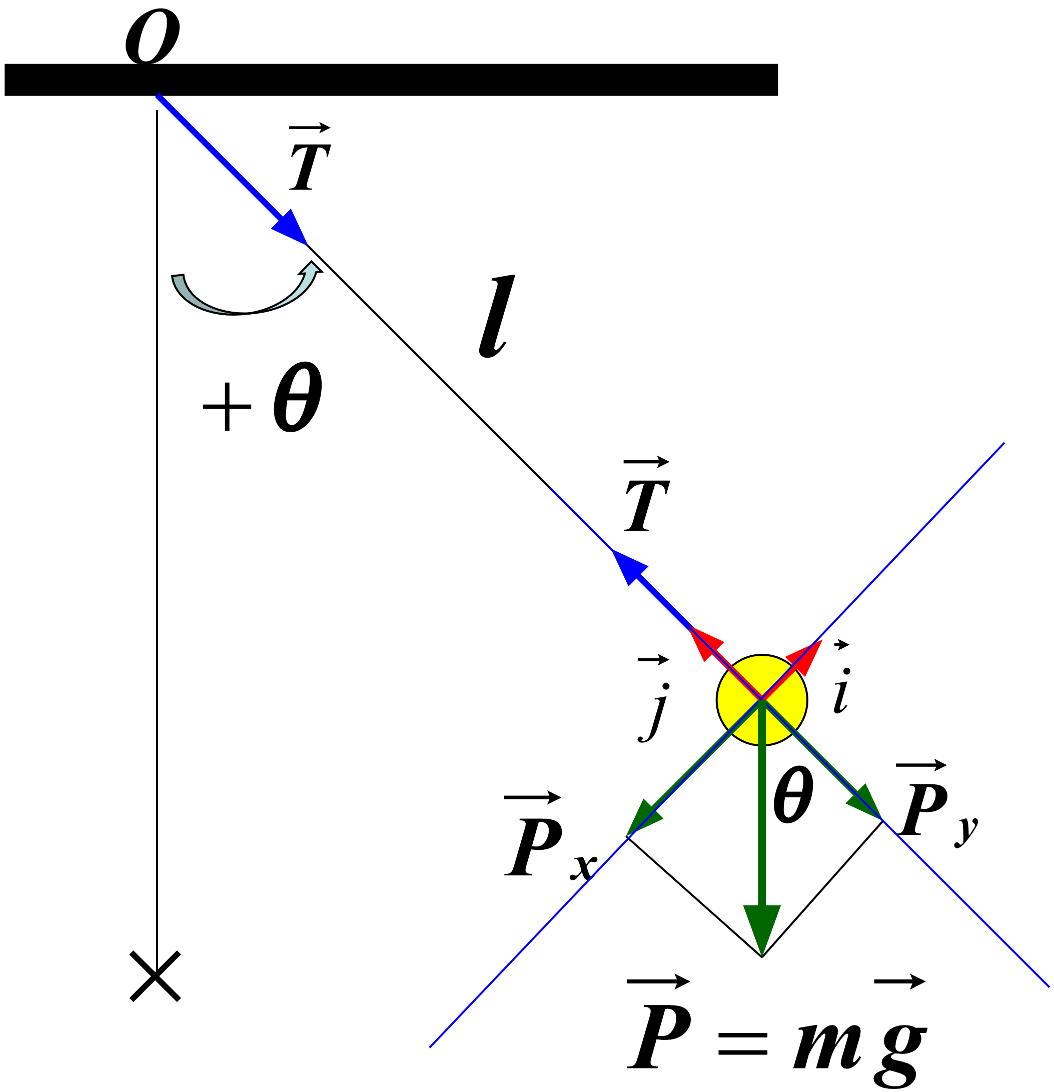
Principe d'inertie

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}^{appl}} = \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

CONFIGURATION À INSTANT T DONNÉ



CONFIGURATION À INSTANT T DONNÉ



Projections sur les axes du repère

$$(\vec{i}, \vec{j})$$

$$\left\|\overrightarrow{P_x}\right\| = P_x = -mg\sin\theta$$

$$\left\|\overrightarrow{P_y}\right\| = Py = -mg\cos\theta$$

$$\left\|\overrightarrow{T_x}\right\| = T_x = 0$$

$$\left\|\overrightarrow{T_y}\right\| = T_y = T$$

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P_x} + \overrightarrow{P_y}$$

POSITION D'ÉQUILIBRE STATIQUE À UN INSTANT DONNÉ

$$\overrightarrow{\boldsymbol{P}} + \overrightarrow{\boldsymbol{T}} = \vec{0}$$

projection sur les deux axes perpendiculaires

$\vec{i}$ Oy, axe radial

$\vec{j}$ Ox, tangente au mouvement

$$P_y = -mg\cos\theta \qquad P_x = -mg\sin\theta$$

$$T_y - mg\cos\theta = 0 \qquad T_x = 0$$

$$T_y = mg\cos\theta$$

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}^{appl}} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = (\overrightarrow{P_x} + \overrightarrow{P_y}) + (\overrightarrow{T_x} + \overrightarrow{T_y}) = \overrightarrow{P_x}$$

$\overrightarrow{P_x}$ Force de rappel vers la position d'équilibre

ABSCISSE CURVILIGNE

sur la trajectoire circulaire (centre O, rayon l) décrite par le système de masse m
l'abscisse curviligne est donnée par

$$s(t) = l\theta(t)$$

APPLICATION DEUXIEME LOI DE NEWTON

$$\boxed{\sum \overrightarrow{F_{ext}^{appl}} = \overrightarrow{P_x} = m\overrightarrow{a_G}}$$

$$P_x = -mg\sin\theta$$

$$\boxed{a_G = \frac{d^2}{dt^2}\left[s = l\theta\right] = l\frac{d^2\theta}{dt^2} = l\ddot{\theta}}$$

$$\boxed{-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}}$$

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{l}}\sin\boldsymbol{\theta} = 0}$$

équation différentielle du second ordre à coefficient constant

l'équation précédente ne correspond pas à un mouvement harmonique simple

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$$

HYPOTHESE DES **PETITES OSCILLATIONS**
ISOCHRONISME

$$\theta \ en \ radians \quad \Rightarrow \quad \theta \ \ petit \rightarrow \sin\theta \cong \theta$$

équation du mouvement dans ces conditions

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \longrightarrow \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\omega}_0^2\boldsymbol{\theta} = 0$$

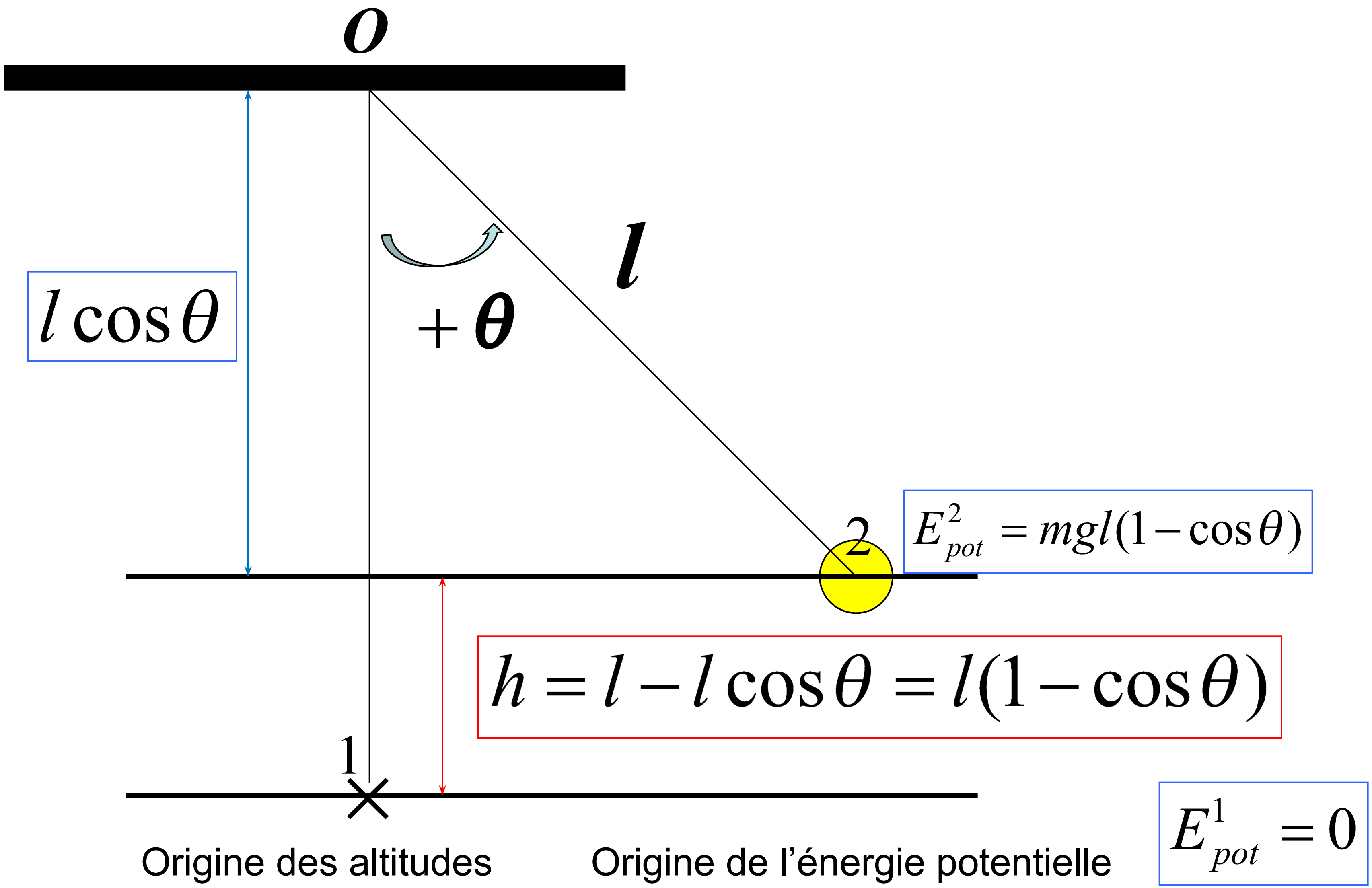
on retrouve l’écriture générale du mouvement harmonique simple

$$\boldsymbol{\omega}_0^2 = \frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{l}} \qquad \boldsymbol{\omega}_0 = \sqrt{\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{l}}} \qquad \boldsymbol{T} = 2\boldsymbol{\pi}\sqrt{\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{l}}}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{M}} \cos(\boldsymbol{\omega}_0 \boldsymbol{t} + \boldsymbol{\varphi}_0)$$

Si l'angle θ devient trop grand, la vitesse de la boule est très grande au passage à l'équilibre et les frottements fluides dus à l'air ne sont plus négligeables. La période varie au cours du temps.

ENERGIE POTENTIELLE DU PENDULE A UN INSTANT DONNE



ENERGIE CINETIQUE DU PENDULE A UN INSTANT DONNE

Rappel de l'abscisse curviligne :

$$s(t) = l\theta(t)$$

VITESSE

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}[l\theta] = l\dot{\theta} = l\frac{d\theta}{dt}$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$$

ENERGIE MECANIQUE DU PENDULE A UN INSTANT DONNE

$$\boldsymbol{E_{mécanique} = E_{cinétique} + E_{potentielle}}$$

$$\boldsymbol{E_{mécanique}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{ml}^2\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 + \boldsymbol{mgl}(1-\cos\boldsymbol{\theta})$$

REMARQUES

Le système est isolé, pas de frottements, il y a conservation de l’énergie mécanique dans le cas d’un oscillateur non amorti (pendule simple)

le travail de la tension est nul : la force est perpendiculaire au déplacement

VARIATION DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE EN FONCTION DU TEMPS

L'énergie mécanique est constante donc :

$$\frac{d}{dt}[E_{méc}] = 0$$

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-\cos\theta)] = 0$$

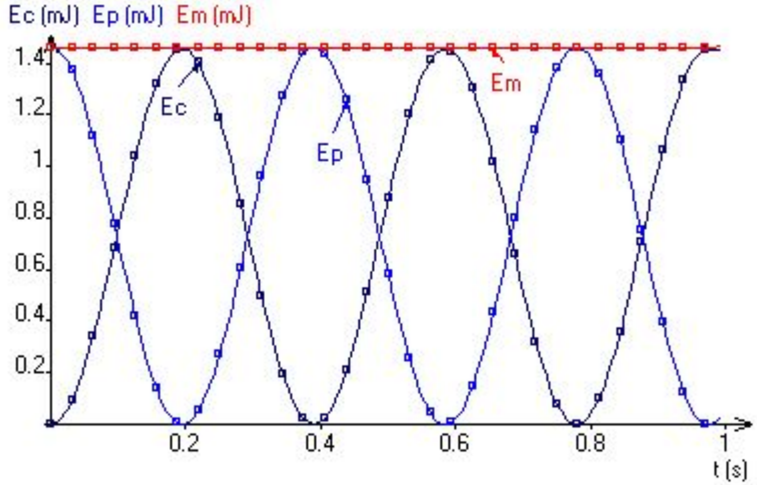
$$\Downarrow$$

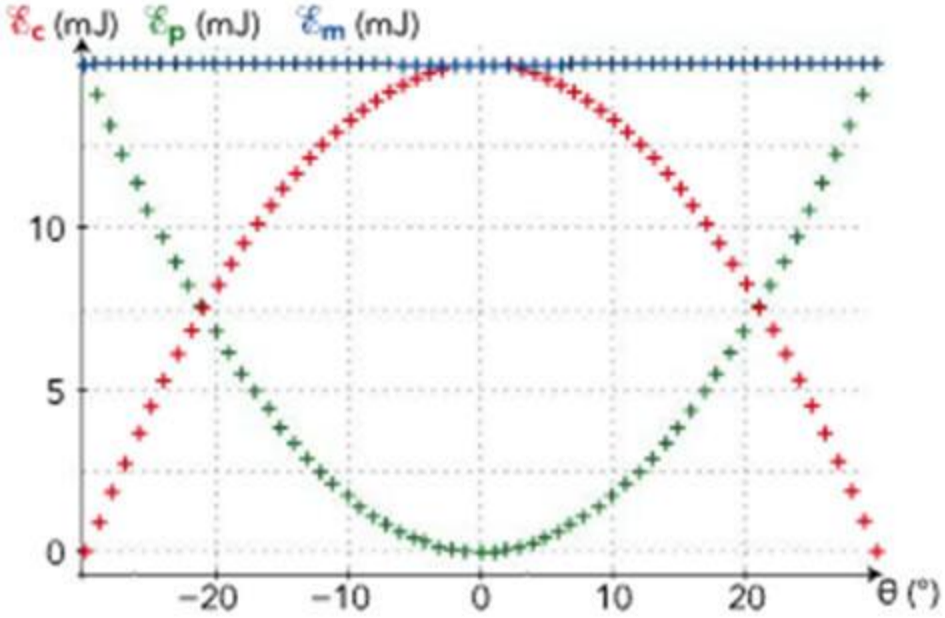
$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

$$\Downarrow$$

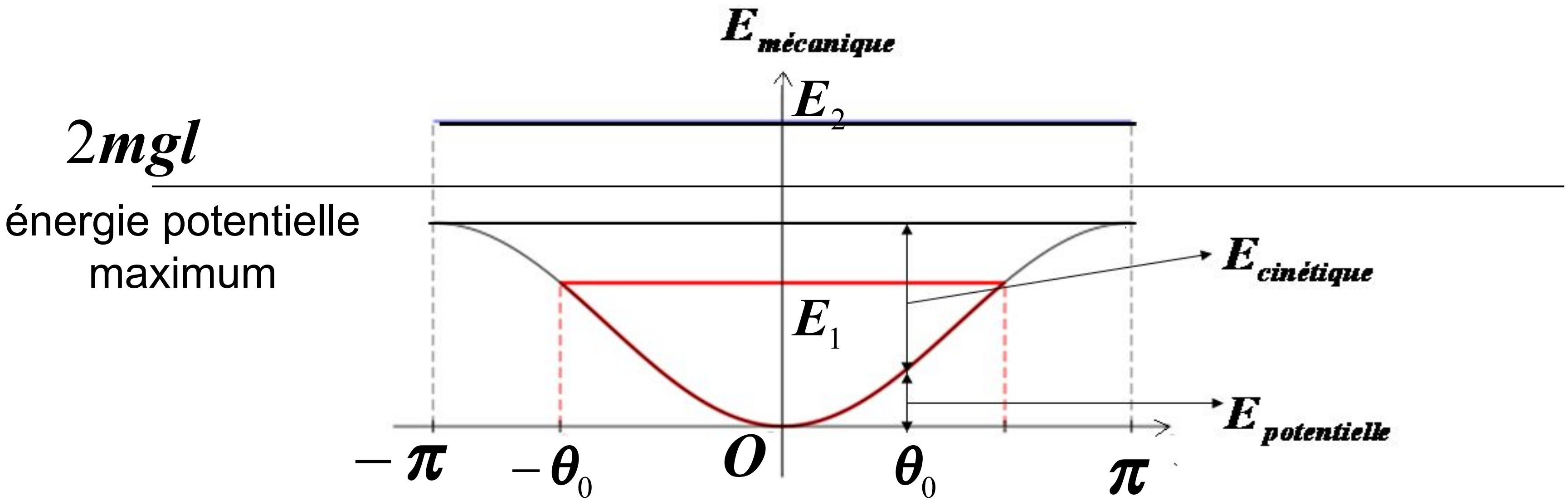
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

On aboutit à l'équation différentielle obtenue en utilisant les lois de Newton





Ce pendule est constitué d'une bille de masse **m** = 30 g suspendue à l'extrémité d'un fil inextensible de masse négligeable (devant celle de la bille).



puits de potentiel du pendule simple

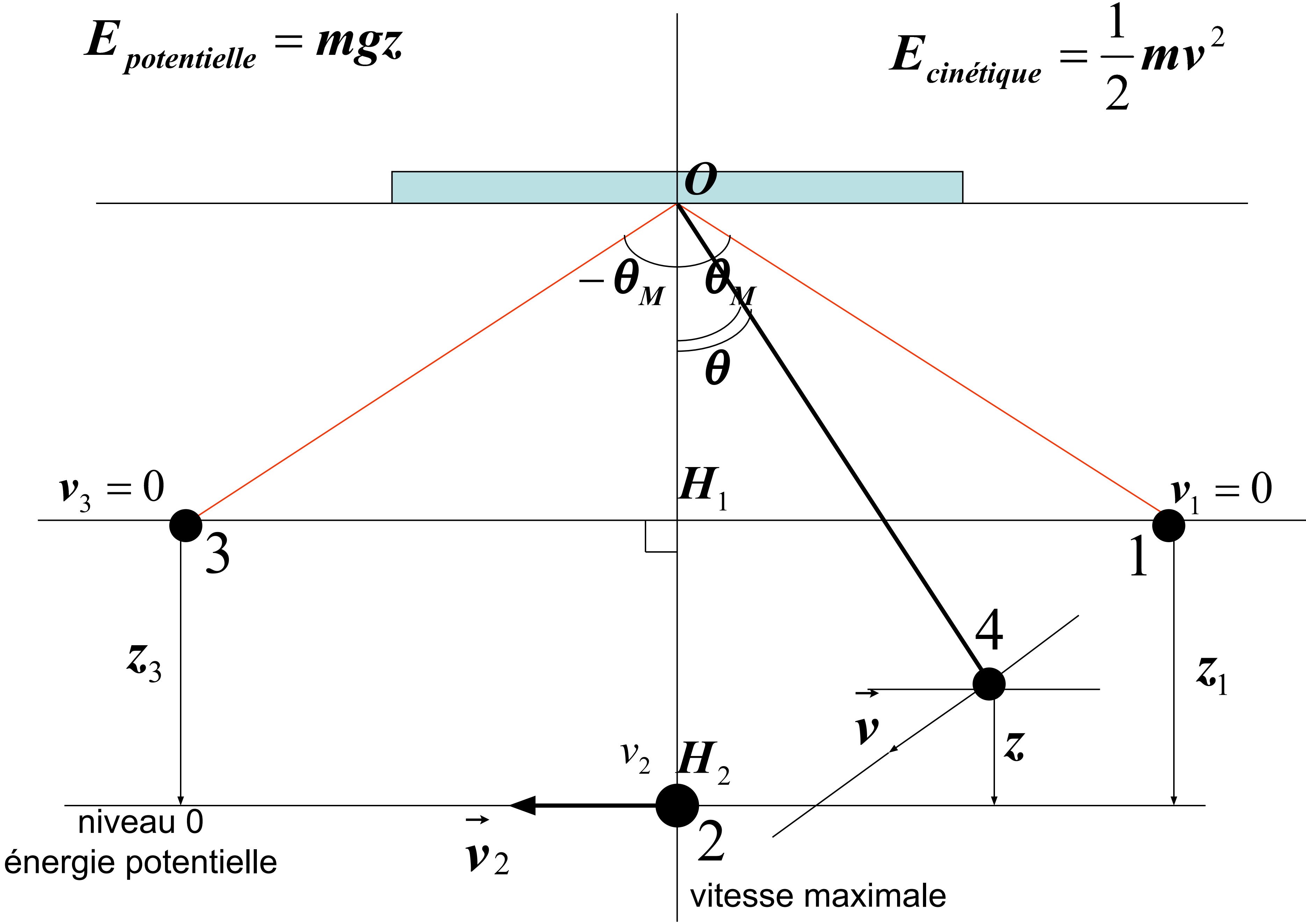
$$E_{mécanique} = E_1 < 2mgl$$

θ_0 élongation pour laquelle la vitesse s’annule

le pendule oscille périodiquement dans un puits de potentiel. On dit qu’il est confiné.

$$E_{mécanique} = E_2 > 2mgl$$

le pendule franchit les barrières de potentiel
sa vitesse angulaire ne peut s'annuler
le pendule tourne autour du point O.



$E_{potentielle} = mgz$
$E_{cinétique} = \frac{1}{2}mv^2$
O
$-\theta_M$
θ_M
θ
H_1
$v_3 = 0$
$v_1 = 0$
3
1
4
z_3
z_1
$\vec{v}$
z
v_2
H_2
2
niveau 0
énergie potentielle
$\vec{v}_2$
vitesse maximale

POSITION	ENERGIE CINETIQUE	ENERGIE POTENTIELLE	ENERGIE MECANIQUE
1	0	mgz_1	mgz_1
2	$\frac{1}{2}mv_2^2$	0	$\frac{1}{2}mv_2^2$
3	0	mgz_3	mgz_3
4	$\frac{1}{2}mv^2$	mgz	$\frac{1}{2}mv^2 + mgz$

conservation de l'énergie mécanique

$$mgz_1 = mgz_3 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

BILAN DE L'ENERGIE MECANIQUE

TRAJETS	ENERGIE CINETIQUE	ENERGIE POTENTIELLE
$1 \rightarrow 2$	↗	↘
$1 \rightarrow 2$	↘	↗
$1 \rightarrow 2$	↗	↘
$1 \rightarrow 2$	↘	↗