

A close-up, high-angle view of a computer keyboard. The keys are light gray and arranged in a grid. One key in the center-right area is highlighted in a bright yellow color. The text "Параллелепипед" is overlaid in the center of the image.

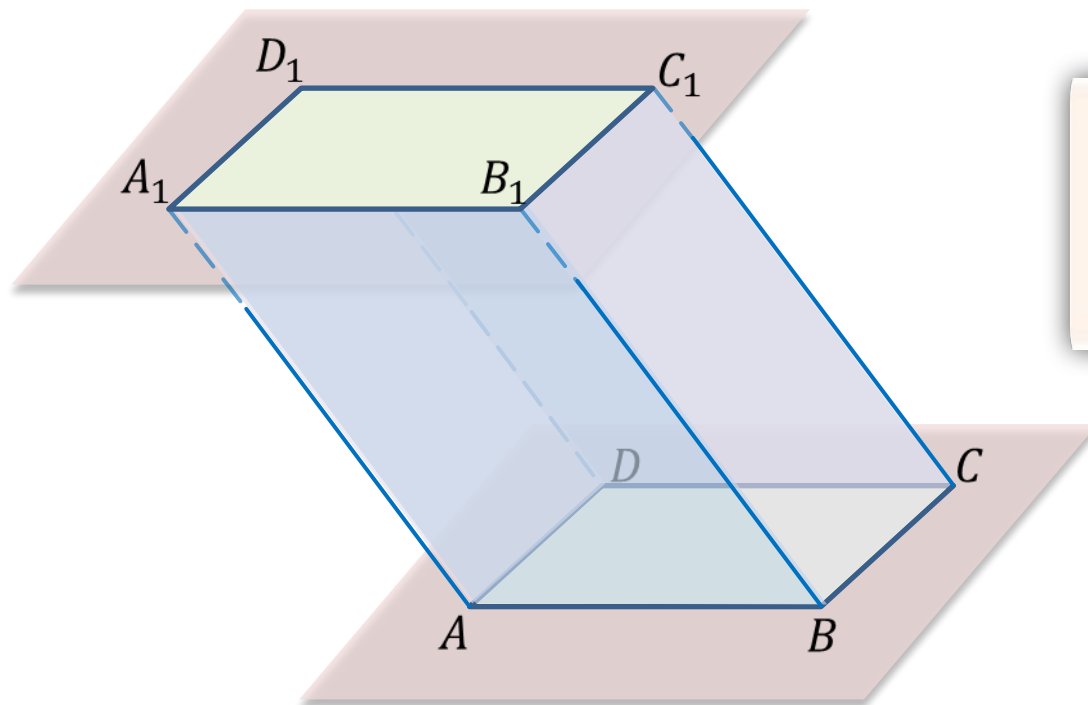
Параллелепипед

Цели обучения:

10.1.2 знать определение и свойства прямоугольного параллелепипеда;

10.3.7 выводить свойства прямоугольного параллелепипеда и применять их при решении задач;

Определение. Параллелепипед это четырехугольная призма, основаниями которой являются параллелограммы.



$$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$$

Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны

$$AB \parallel A_1B_1$$

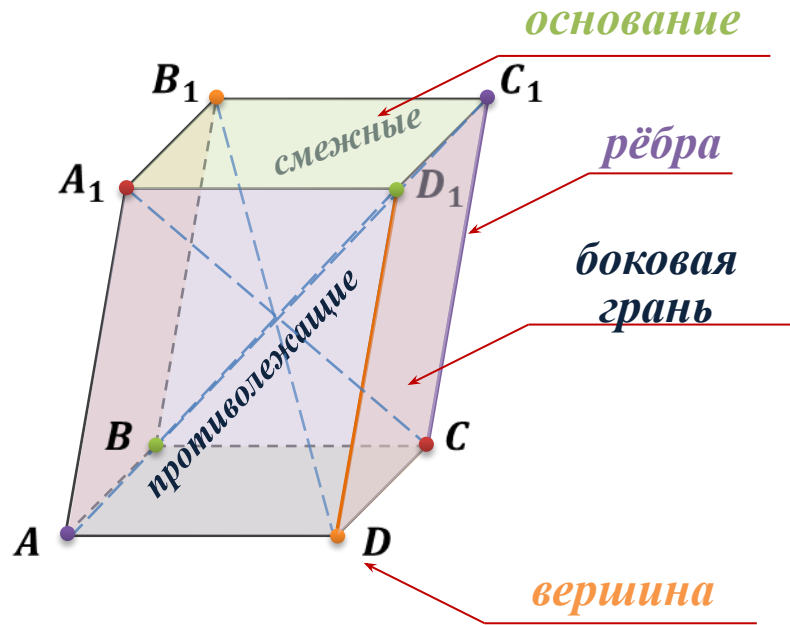
AA_1B_1B – параллелограмм

$ABCD A_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед

$ABCD, AA_1B_1B, BB_1C_1C,$

CC_1D_1D, DD_1A_1A – грани

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед.



Стороны параллелограммов называются *рѣбрами* параллелепипеда.

Их вершины – *вершинами* параллелепипеда.

Две грани параллелепипеда называются *противолежащими*, если они не имеют общего ребра.

Грани имеющие общее ребро называются *смежными*.

Иногда какие-нибудь две противоположащие грани параллелепипеда выделяются и называются *основаниями*.

Тогда остальные грани – *боковыми гранями*.

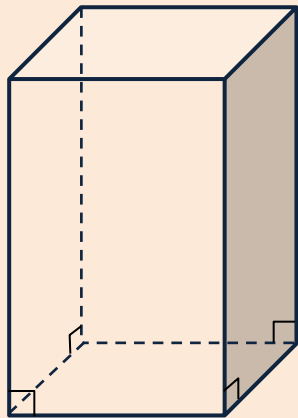
Две вершины, которые не принадлежат одной грани, называются *противоположными*.

Отрезок, который соединяет противоположные вершины, называется *диагональю* параллелепипеда.

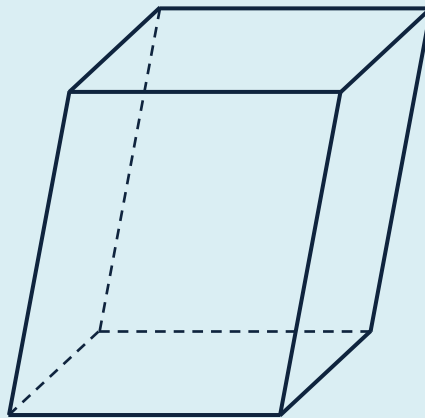
παρ-άλληλος — «параллельный»

ἐπί-πεδον — «плоскость»

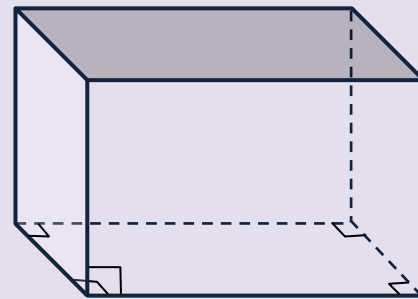
Если все боковые ребра параллелепипеда *перпендикулярны* к плоскостям его оснований, то есть боковые грани — *прямоугольники*, то такой параллелепипед называется ***прямым***.



Если все боковые ребра параллелепипеда *не перпендикулярны* к плоскостям его оснований, то такой параллелепипед называется ***наклонным***.



Если основаниями прямого параллелепипеда служат *прямоугольники*, то такой параллелепипед называется ***прямоугольным***.



Свойства прямоугольного параллелепипеда

- 1°. В прямоугольном параллелепипеде 6 граней и все они являются прямоугольниками.
- 2°. Противоположные грани попарно равны и параллельны.
- 3°. Все двугранные углы – прямые.
- 4°. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.
- 5°. Прямоугольный параллелепипед имеет 4 диагонали, которые пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.
- 6°. Любая грань прямоугольного параллелепипеда может быть принята за основание.
- 7°. Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется *кубом*.
- 8°. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов *трех его измерений* (длины, ширины, высоты).



Теорема 1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед

Доказать: теорема 1

Доказательство:

1) $ABCD$ — параллелограмм $\Rightarrow BC \parallel AD$

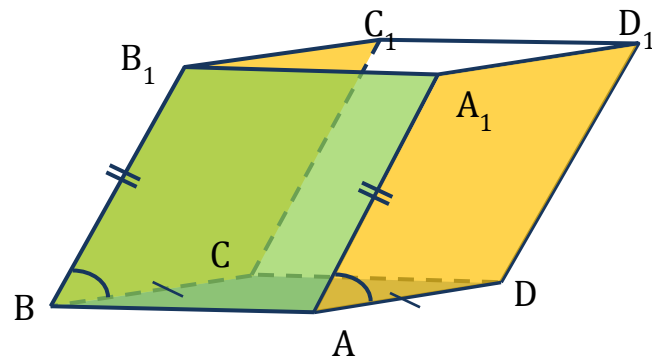
2) $ABB_1 A_1$ — параллелограмм $\Rightarrow BB_1 \parallel AA_1$

3)
$$\left. \begin{array}{l} BC \parallel AD \\ BB_1 \parallel AA_1 \\ BC \cap BB_1 \end{array} \right\} \Rightarrow (BB_1 C_1 C) \parallel (AA_1 D_1 D)$$

$$\left. \begin{array}{l} BC, BB_1 \in (BB_1 C_1 C) \\ AD, AA_1 \in (AA_1 D_1 D) \end{array} \right\}$$

4) $BC = AD, BB_1 = AA_1$

5) $\angle B_1 BC = \angle A_1 AD$



6)
$$\left. \begin{array}{l} BC = AD \\ BB_1 = AA_1 \\ \angle B_1 BC = \angle A_1 AD \end{array} \right\} \Rightarrow BB_1 C_1 C = AA_1 D_1 D$$

Ч.т.д



Теорема 2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед

$B_1 D_1, B D_1$ — диагонали $B B_1 D_1 D$

Доказать: теорема 2

Доказательство:

1) $BB_1 = AA_1, BB_1 \parallel AA_1$

$AA_1 = DD_1, AA_1 \parallel DD_1$

2) $BB_1 = AA_1, AA_1 = DD_1 \Rightarrow BB_1 = DD_1$

$BB_1 \parallel AA_1, AA_1 \parallel DD_1 \Rightarrow BB_1 \parallel DD_1$ (если две прямые в пространстве параллельны третьей прямой, то они параллельны)

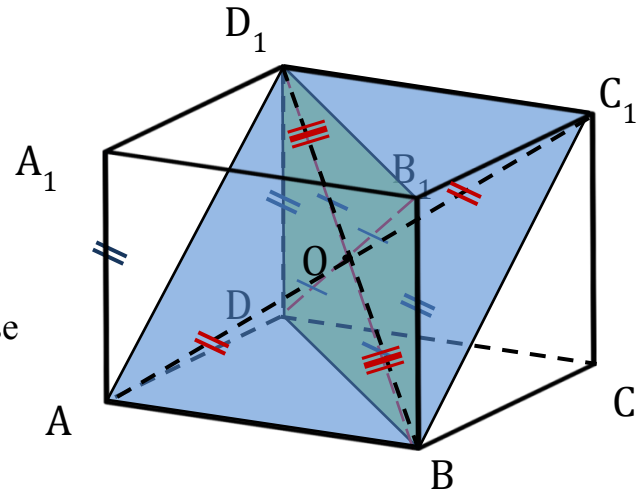
3) $\left. \begin{array}{l} BB_1 = DD_1 \\ BB_1 \parallel DD_1 \end{array} \right\} \Rightarrow BB_1 D_1 D$ — параллелограмм \Rightarrow

$\Rightarrow B_1 D \cap B D_1 = O, B_1 O = OD, BO = OD_1$ (диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам)

4) $BC_1 D_1 A$ — параллелограмм \Rightarrow

$\Rightarrow C_1 A \cap B D_1 = O, C_1 O = OA, BO = OD_1$

Ч.т.д



Задача 1

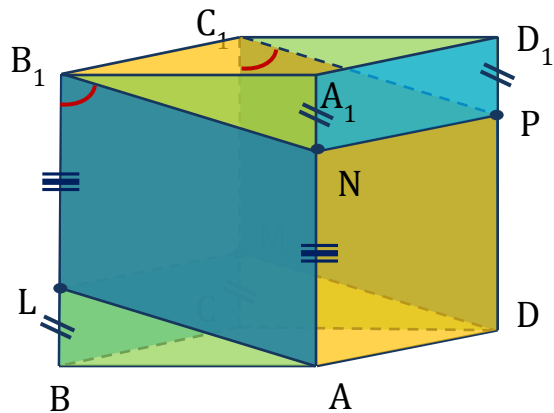
Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед

$$BL = CM = A_1 N = D_1 P$$

Доказать: $ALMDNB_1 C_1 P$ — параллелепипед

Доказательство:

- 1) $BB_1 A_1 A$ — параллелограмм $\Rightarrow BB_1 = AA_1, BB_1 \parallel AA_1$
- 2) $\left. \begin{array}{l} BB_1 = AA_1 \\ BL = A_1 N \end{array} \right\} \Rightarrow LB_1 = NA, LB_1 \parallel NA$
- 3) $\left. \begin{array}{l} LB_1 = NA \\ BB_1 \parallel AA_1 \\ LB_1 \subset BB_1 \\ NA = AA_1 \end{array} \right\} \Rightarrow LB_1 NA$ — параллелограмм
- 4) $MC_1 PD$ — параллелограмм (аналогично п. 3)
- 5) $\angle LB_1 N = \angle MC_1 P$
 $\left. \begin{array}{l} LB_1 = CM \\ BB_1 = AA_1 \\ \angle LB_1 N = \angle MC_1 P \end{array} \right\} \Rightarrow LB_1 NA = MC_1 PD$
- 7) $BL = CM \Rightarrow BLMC$ — параллелограмм $\Rightarrow BC \parallel LM \parallel B_1 C_1$
- 8) $A_1 N = D_1 P \Rightarrow NA_1 D_1 P$ — параллелограмм $\Rightarrow A_1 D_1 \parallel NP \parallel AD$
- 9) $(ABB_1 A_1) \parallel (DCC_1 D_1) \Rightarrow B_1 C_1 = LM = AD = NP$
- 10) $ANPD, NB_1 C_1 P, LB_1 C_1 M, ALMD$ — параллелограммы
 $LB_1 NA = MC_1 PD \Rightarrow ALMDNB_1 C_1 P$ — параллелепипед



Что требовалось доказать

Задача 2. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Доказать, что диагональ AC параллельна $A_1 C_1$.

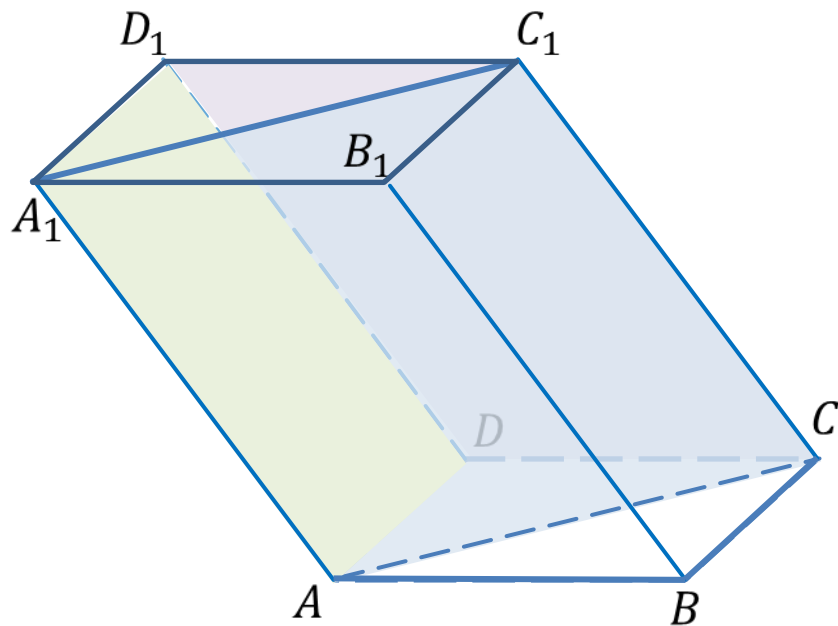
Доказательство.

$$AA_1 \parallel DD_1, AA_1 = DD_1$$

$$CC_1 \parallel DD_1, CC_1 = DD_1$$

$$AA_1 C_1 C \text{ — параллелограмм} \Rightarrow AC \parallel A_1 C_1$$

Что и требовалось доказать.



Задача 3. Сумма всех рёбер параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 120 см.

Найдите каждое ребро параллелепипеда, если $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$, а $\frac{BC}{BB_1} = \frac{5}{6}$.

Решение.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5} \Rightarrow AB = \frac{4}{5} BC$$

$$\frac{BC}{BB_1} = \frac{5}{6} \Rightarrow BB_1 = \frac{6}{5} BC$$

$$4 \cdot AB + 4 \cdot BC + 4 \cdot BB_1 = 120$$

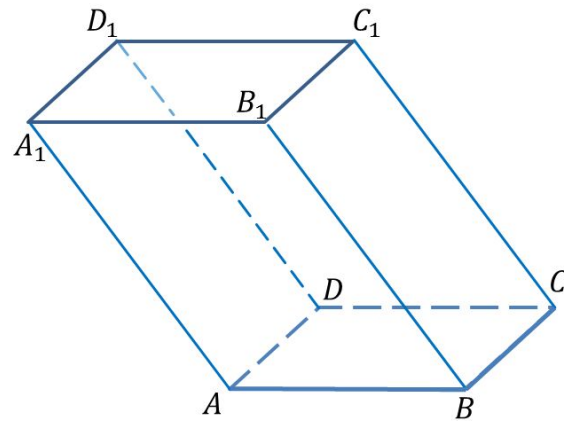
$$4 \cdot \frac{4}{5} BC + 4 \cdot BC + 4 \cdot \frac{6}{5} BC = 120$$

$$12BC = 120 \Rightarrow BC = 10 \text{ см}$$

$$AB = \frac{4}{5} BC \Rightarrow AB = 8 \text{ см}$$

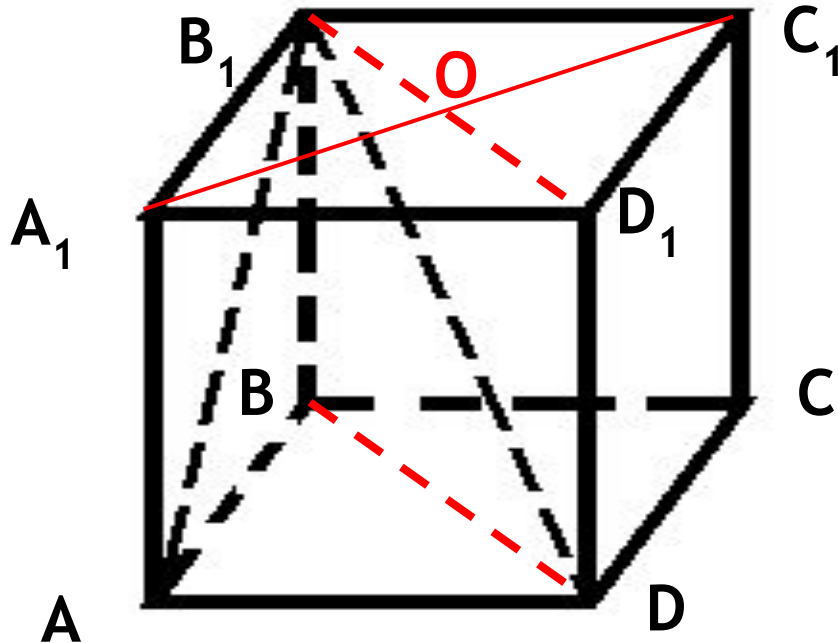
$$BB_1 = \frac{6}{5} BC \Rightarrow BB_1 = 12 \text{ см}$$

Ответ: 10 см, 8 см, 12 см.



Задача 4

Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат со стороной, равной 5 см. Расстояние от бокового ребра до скрещивающейся с ним диагонали параллелепипеда равно



$$5\sqrt{2}/2 \text{ см}$$

Задача 5

Три измерения прямоугольного параллелепипеда равны 1 см, 2 см, 3 см.

1. Сумма длин всех ребер равна

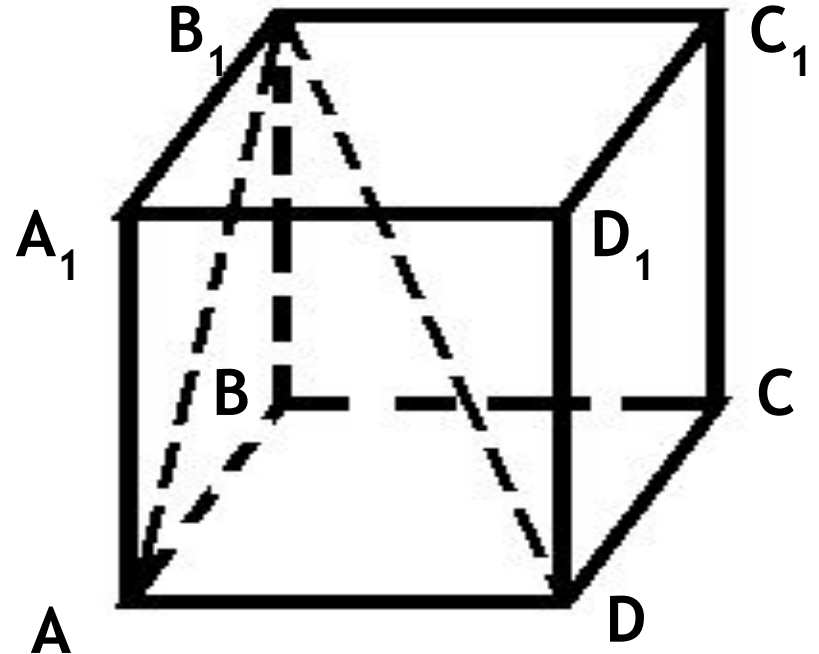
24 см

2. Сумма площадей всех его граней равна

22 см²

3. Длины его диагоналей равны

$\sqrt{14}$ см



Задача 6

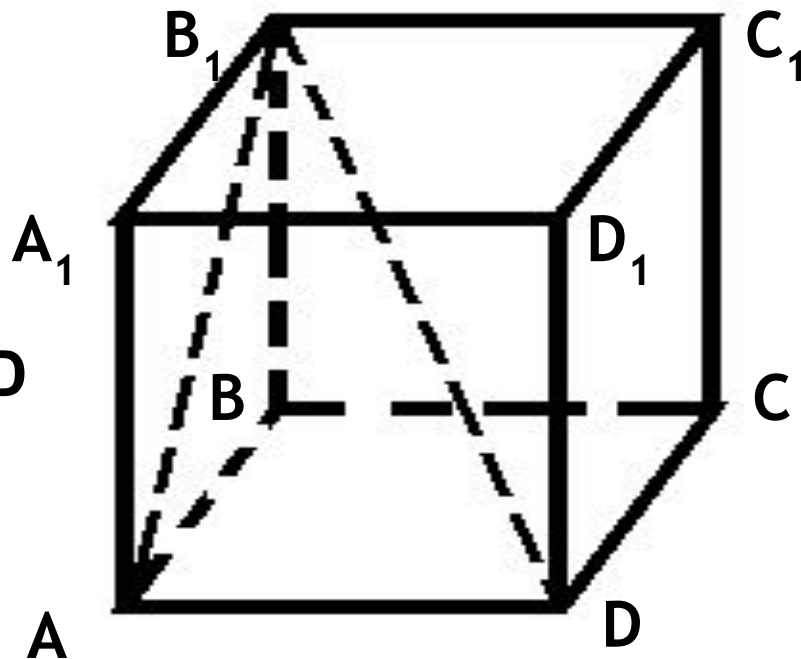
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - прямоугольный параллелепипед

1. Треугольник AB_1D ????

прямоугольный

2. ??? **Угол BDB_1**

- угол между диагональю B_1D
и плоскостью основания



РЕФЛЕКСИЯ УРОКА

REFLECTION

