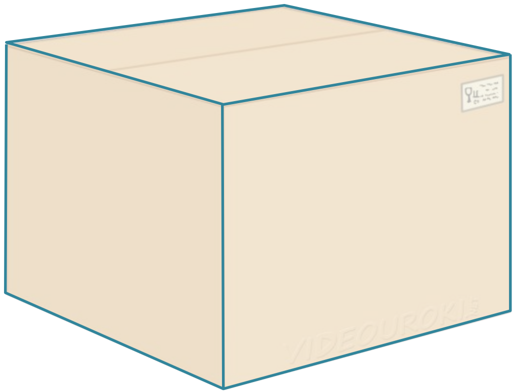
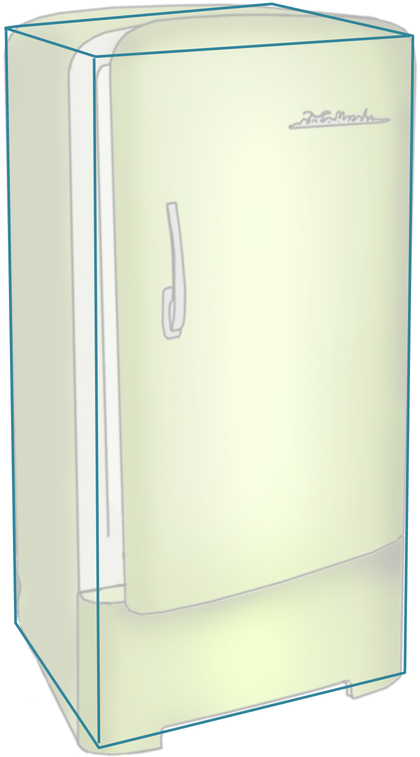

СПИЧКИ
СПИЧКИ





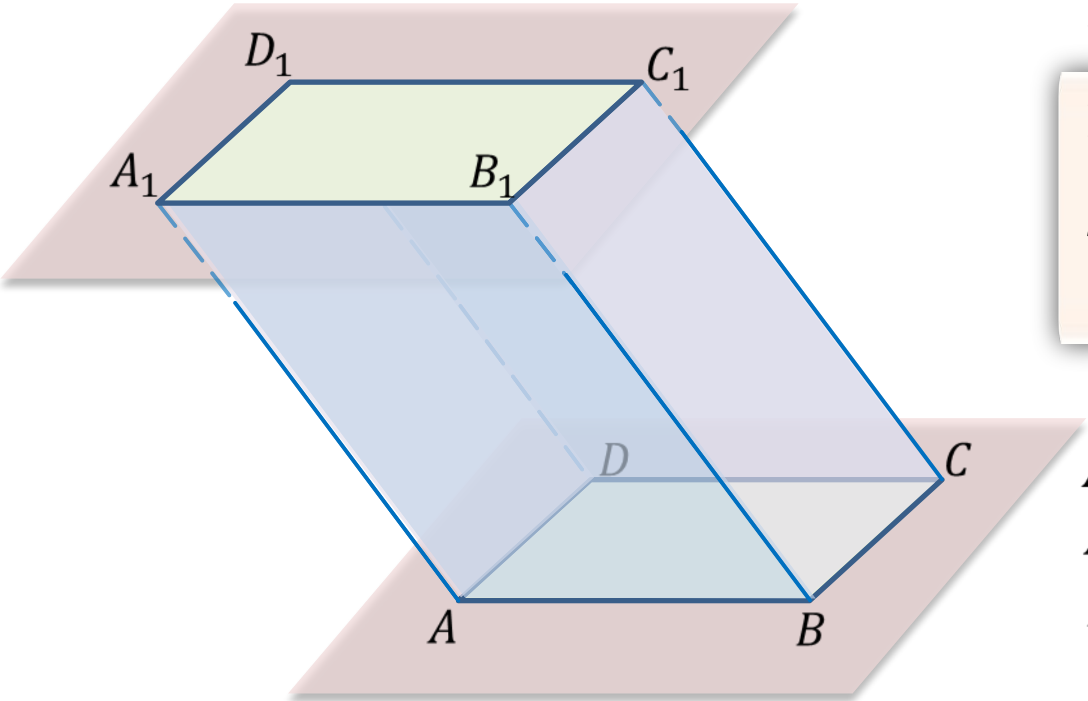
Параллелепипед

Цели обучения:

10.1.2 знать определение и свойства прямоугольного параллелепипеда;

10.3.7 выводить свойства прямоугольного параллелепипеда и применять их при решении задач;

Определение. **Параллелепипед** это четырехугольная призма, основаниями которой являются параллелограммы.



$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$

Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны

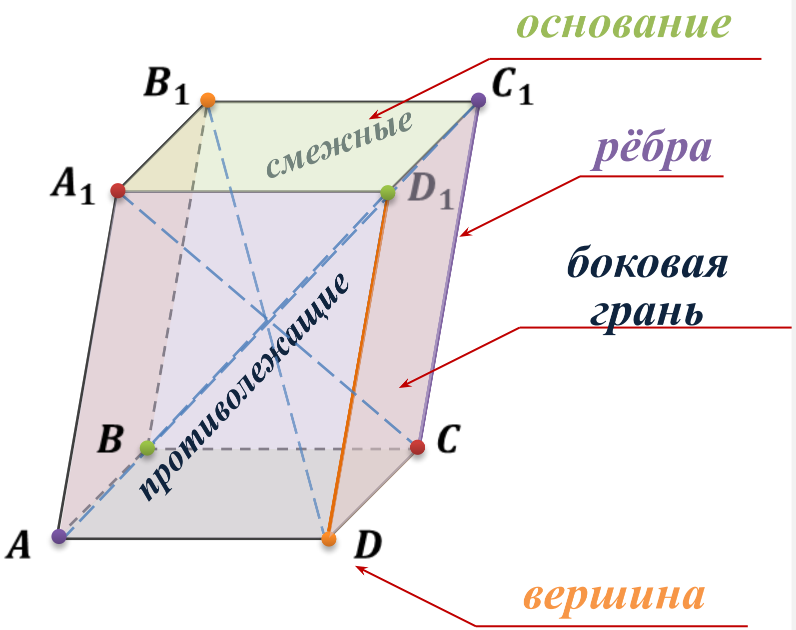
$AB \parallel A_1B_1$

AA_1B_1B – параллелограмм

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед

$ABCD, AA_1B_1B, BB_1C_1C,$
CC_1D_1D, DD_1A_1A – грани

$ABCDA_1B_1C_1D_1$– **параллелепипед.**



Стороны параллелограммов называются ***рёбрами*** параллелепипеда.

Их вершины – ***вершинами*** параллелепипеда.

Две грани параллелепипеда называются ***противолежащими***, если они не имеют общего ребра.

Грани имеющие общее ребро называются ***смежными***.

Иногда какие-нибудь две противолежащие грани параллелепипеда выделяются и называются ***основаниями***.

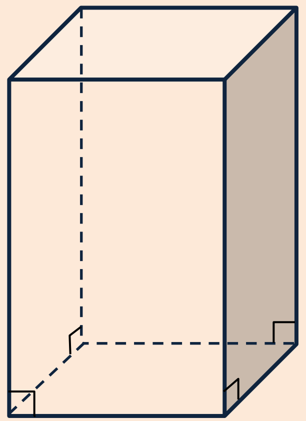
Тогда остальные грани – ***боковыми гранями***.

Две вершины, которые не принадлежат одной грани, называются ***противоположными***.

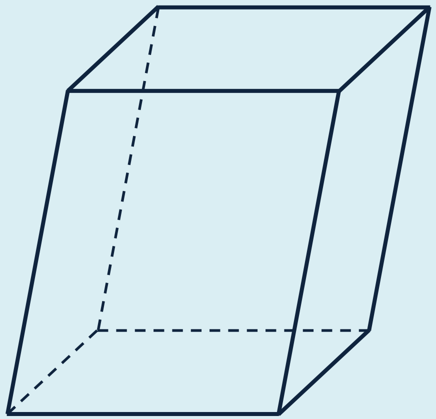
Отрезок, который соединяет противоположные вершины, называется ***диагональю*** параллелепипеда.

παρ-άλληλος — «параллельный» ἐπί-πεδον — «плоскость»

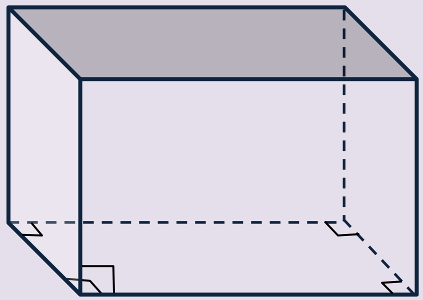
Если все боковые ребра параллелепипеда *перпендикулярны* к плоскостям его оснований, то есть боковые грани – *прямоугольники*, то такой параллелепипед называется ***прямым***.



Если все боковые ребра параллелепипеда *не перпендикулярны* к плоскостям его оснований, то такой параллелепипед называется ***наклонным***.



Если основаниями прямого параллелепипеда служат *прямоугольники*, то такой параллелепипед называется ***прямоугольным***.



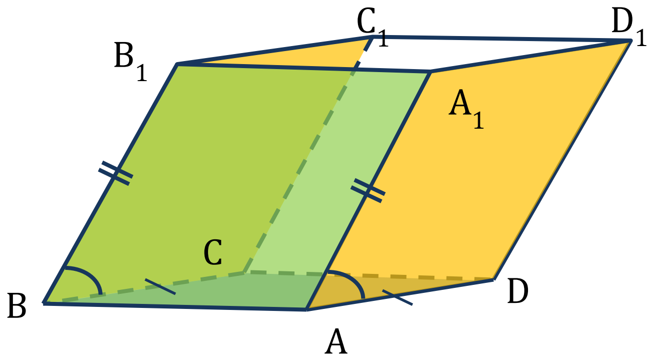
Свойства прямоугольного параллелепипеда

1°. В прямоугольном параллелепипеде 6 граней и все они являются прямоугольниками.
2°. Противоположные грани попарно равны и параллельны.
3°. Все двугранные углы – прямые.
4°. Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.
5°. Прямоугольный параллелепипед имеет 4 диагонали, которые пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.
6°. Любая грань прямоугольного параллелепипеда может быть принята за основание.
7°. Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется ***кубом***.
8°. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов ***трех его измерений*** (длины, ширины, высоты).

Теорема 1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед

Доказать: теорема 1



Доказательство:

1) ABCD — параллелограмм ⇒ $BC \parallel AD$

2) ABB_1A_1 — параллелограмм ⇒ $BB_1 \parallel AA_1$

3) $\left.\begin{array}{r} BC \parallel AD \\ BB_1 \parallel AA_1 \\ BC \cap BB_1 \\ BC, BB_1 \in (BB_1C_1C) \\ AD, AA_1 \in (AA_1D_1D) \end{array}\right\} \Rightarrow (BB_1C_1C) \parallel (AA_1D_1D)$

4) $BC = AD$, $BB_1 = AA_1$

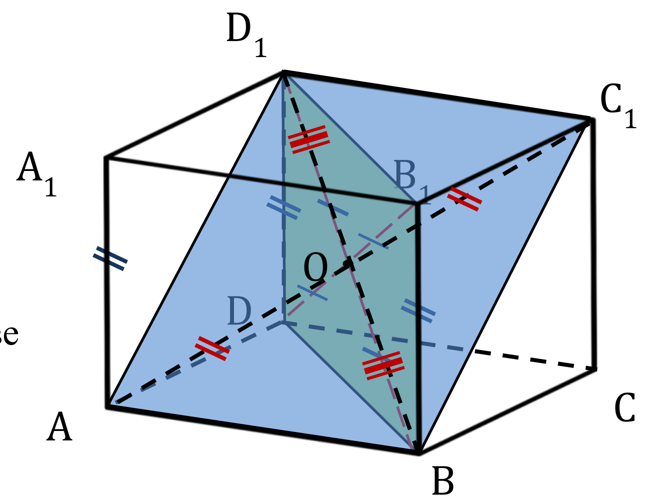
5) $\angle B_1BC = \angle A_1AD$

6) $\left.\begin{array}{r} BC = AD \\ BB_1 = AA_1 \\ \angle B_1BC = \angle A_1AD \end{array}\right\} \Rightarrow BB_1C_1C = AA_1D_1D$

Ч.т.д

Теорема 2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед
B_1D, BD_1 — диагонали BB_1D_1D
Доказать: теорема 2
Доказательство:



1) $BB_1 = AA_1$, $BB_1 \parallel AA_1$
$AA_1 = DD_1$, $AA_1 \parallel DD_1$
2) $BB_1 = AA_1$, $AA_1 = DD_1 \Rightarrow BB_1 = DD_1$

$BB_1 \parallel AA_1$, $AA_1 \parallel DD_1 \Rightarrow BB_1 \parallel DD_1$ (если две прямые в пространстве параллельны третьей прямой, то они параллельны)

3) $\left.\begin{matrix} BB_1 = DD_1 \\ BB_1 \parallel DD_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow BB_1D_1D$ — параллелограмм $\Rightarrow$

$\Rightarrow B_1D \cap BD_1 = O$, $B_1O = OD$, $BO = OD_1$ (диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам)

4) BC_1D_1A — параллелограмм $\Rightarrow$
$\Rightarrow C_1A \cap BD_1 = O$, $C_1O = OA$, $BO = OD_1$

Ч.т.д

Задача 1

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед

$BL = CM = A_1N = D_1P$

Доказать: $ALMDNB_1C_1P$ — параллелепипед

Доказательство:

1) BB_1A_1A — параллелограмм $\Rightarrow BB_1 = AA_1$, $BB_1 \parallel AA_1$

2) $\left.\begin{array}{l} BB_1 = AA_1 \\ BL = A_1N \end{array}\right\} \Rightarrow LB_1 = NA,\ LB_1 \parallel NA$

3) $\left.\begin{array}{l} LB_1 = NA \\ BB_1 \parallel AA_1 \\ LB_1 \subset BB_1 \\ NA = AA_1 \end{array}\right\} \Rightarrow LB_1NA$ — параллелограмм

4) MC_1PD – параллелограмм (аналогично п. 3)

5) $\angle LB_1N = \angle MC_1P$

6) $\left.\begin{array}{l} LB_1 = CM \\ BB_1 = AA_1 \\ \angle LB_1N = \angle MC_1P \end{array}\right\} \Rightarrow LB_1NA = MC_1PD$

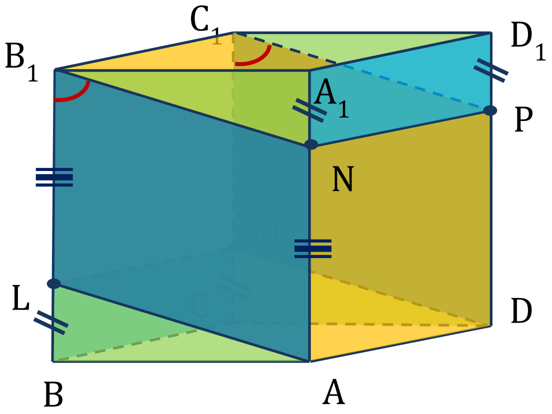
7) $BL = CM \Rightarrow BLMC$ — параллелограмм $\Rightarrow BC \parallel LM \parallel B_1C_1$

8) $A_1N = D_1P \Rightarrow NA_1D_1P$ — параллелограмм $\Rightarrow A_1D_1 \parallel NP \parallel AD$

9) $(ABB_1A_1) \parallel (DCC_1D_1) \Rightarrow B_1C_1 = LM = AD = NP$

10) $ANPD$, NB_1C_1P, LB_1C_1M, $ALMD$ — параллелограммы

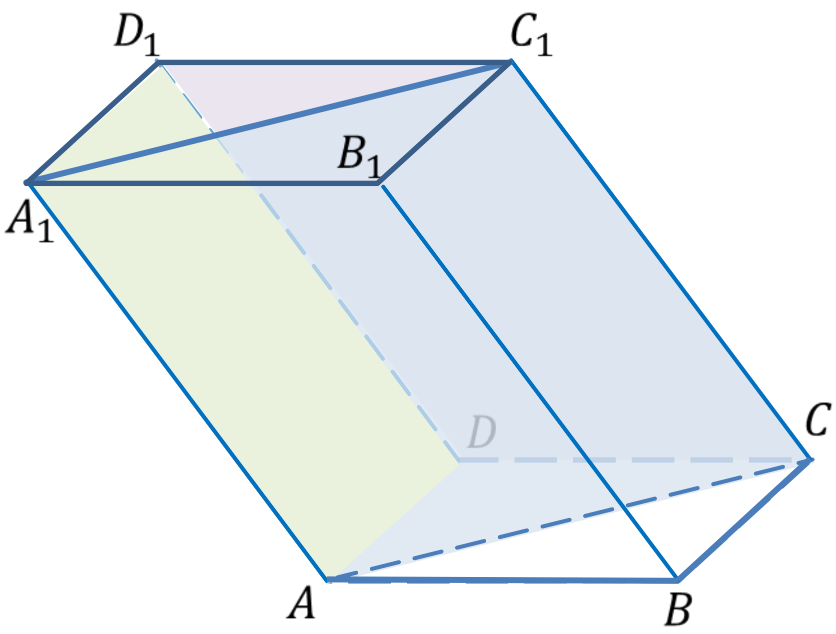
$LB_1NA = MC_1PD \Rightarrow$ $ALMDNB_1C_1P$ — параллелепипед



Что требовалось доказать

Задача 2. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказать, что диагональ AC параллельна A_1C_1.

Доказательство.



$AA_1 \parallel DD_1, AA_1 = DD_1$

$CC_1 \parallel DD_1, CC_1 = DD_1$

AA_1C_1C – параллелограмм $\Rightarrow AC \parallel A_1C_1$

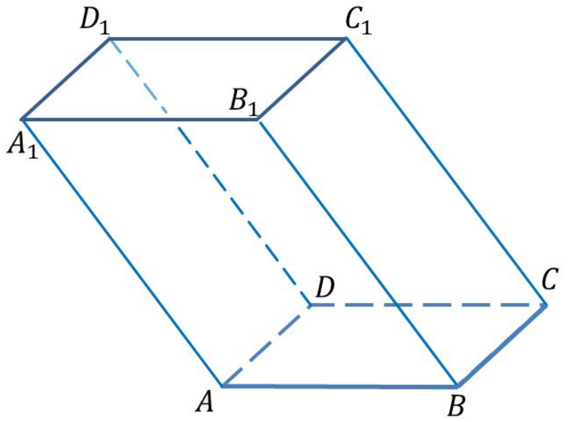
Что и требовалось доказать.

Задача 3. Сумма всех рёбер параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 120 см. Найдите каждое ребро параллелепипеда, если $\frac{AB}{BC}=\frac{4}{5}$, а $\frac{BC}{BB_1}=\frac{5}{6}$.

Решение.

$$\frac{AB}{BC}=\frac{4}{5}\Rightarrow AB=\frac{4}{5}BC$$

$$\frac{BC}{BB_1}=\frac{5}{6}\Rightarrow BB_1=\frac{6}{5}BC$$



$$4\cdot AB+4\cdot BC+4\cdot BB_1=120$$

$$4\cdot\frac{4}{5}BC+4\cdot BC+4\cdot\frac{6}{5}BC=120$$

$$12BC=120\Rightarrow BC=10\text{ см}$$

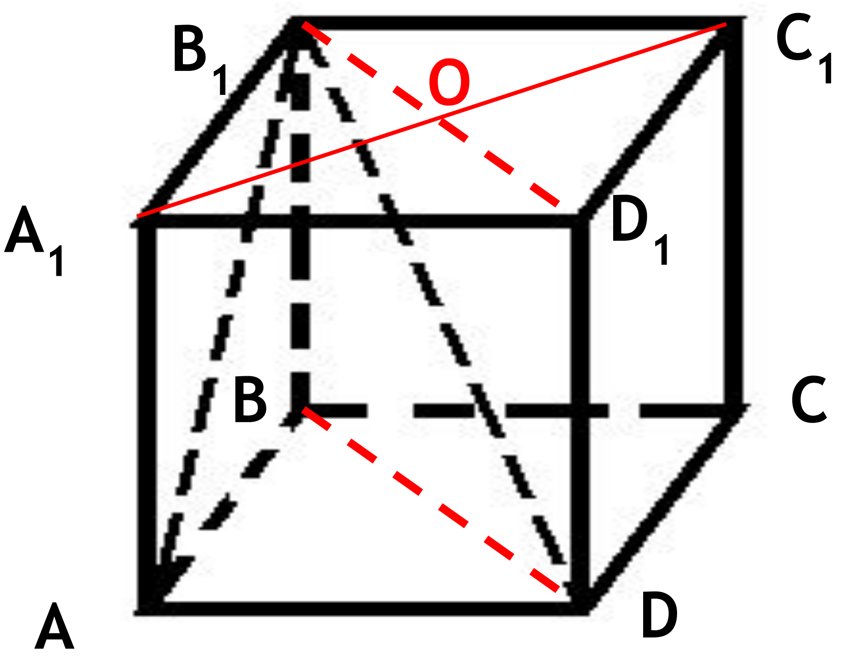
$$AB=\frac{4}{5}BC\Rightarrow AB=8\text{ см}$$

$$BB_1=\frac{6}{5}BC\Rightarrow BB_1=12\text{ см}$$

Ответ: 10 см, 8 см, 12 см.

Задача 4

Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат со стороной, равной 5 см. Расстояние от бокового ребра до скрещивающейся с ним диагонали параллелепипеда равно



5 √2 /2 см

Задача 5

Три измерения прямоугольного параллелепипеда равны 1 см, 2 см, 3 см.

1. Сумма длин всех ребер равна

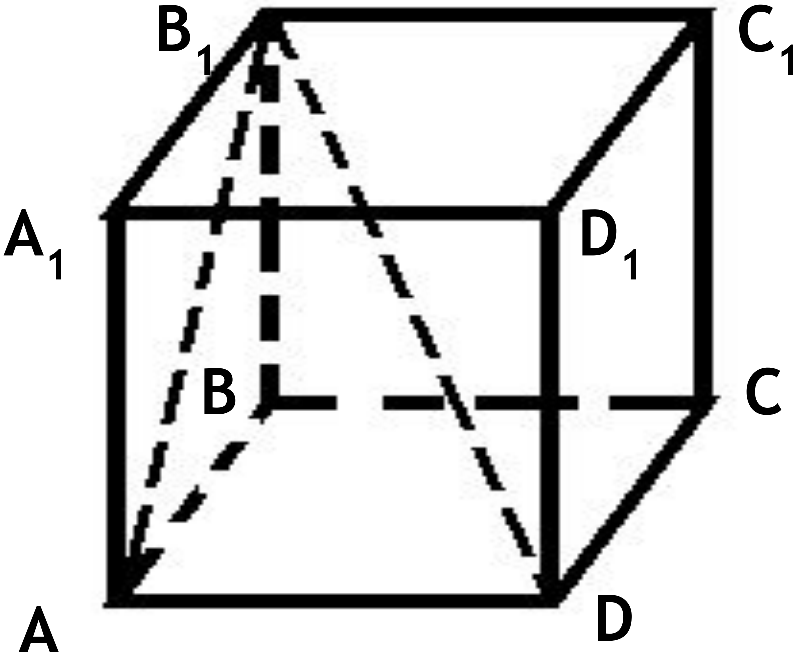
24 см

2. Сумма площадей всех его граней равна

22 см^2

3. Длины его диагоналей равны

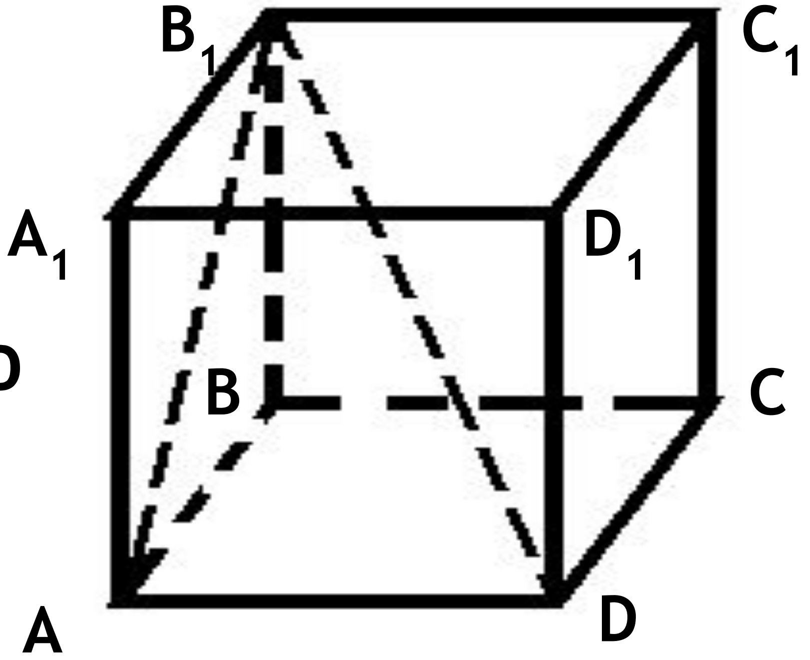
$\sqrt{14}$ см



Задача 6

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольный параллелепипед

1. Треугольник AB_1D ????
прямоугольный



2. ??? Угол BDB_1
- угол между диагональю B_1D
и плоскостью основания


РЕФЛЕКСИЯ УРОКА
REFLECTION
Это же так просто!
Я это сделаю!
Я могу это сделать!
Я попытаюсь...
Как мне это сделать?
Я хочу это сделать!
Я не могу это сделать (не умею, не получится)
Я не буду этого делать.