22.04.20.

Тема:
Двугранный угол.
Перпендикулярность плоскостей.

Учащиеся должны прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1428
https://infourok.ru/videouroki/1430
https://infourok.ru/videouroki/1429

Теоретическая часть:
Прочитать.
Теоремы и определения
(выделенное жирным шрифтом) – выучить.

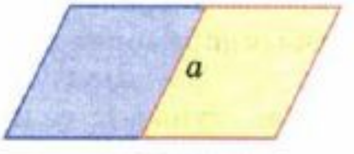
§ 3 Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей

22 Двугранный угол

Углом на плоскости мы называем фигуру, образованную двумя лучами, исходящими из одной точки. В стереометрии наряду с такими углами рассматривается еще один вид углов — **двугранные углы**. Чтобы ввести понятие двугранного угла, напомним, что любая прямая, проведенная в данной плоскости, разделяет эту плоскость на две полуплоскости (рис. 58, *а*). Представим себе, что мы перегнули плоскость по прямой a так, что две полуплоскости с границей a оказались уже не лежащими в одной плоскости (рис. 58, *б*). Полученная фигура и есть двугранный угол.

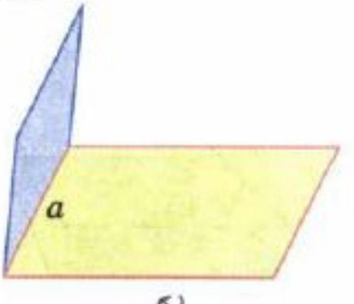
Таким образом, можно дать такое определение двугранного угла: **двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими одной плоскости.** Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его **гранями**. У двугранного угла две грани, отсюда и название — двугранный угол. Прямая a — общая граница полуплоскостей — называется **ребром** двугранного угла.

Двугранный угол с ребром AB, на разных гранях которого отмечены точки C и D, называют двугранным углом $CABD$.



а)

Прямая a разделяет плоскость на две полуплоскости



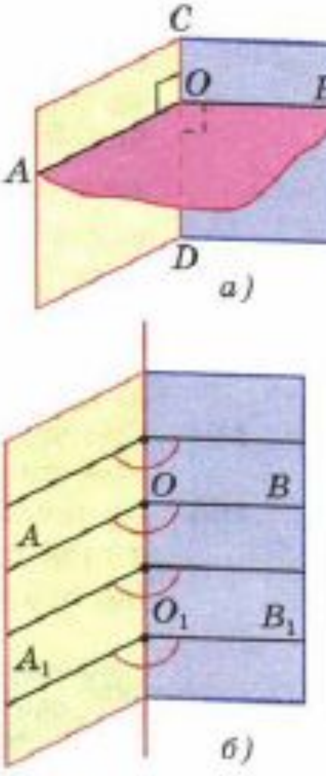
б)

Двугранный угол

Рис. 58

В обыденной жизни мы часто встречаемся с предметами, имеющими форму двугранного угла. Такими предметами являются двускатные крыши зданий, полураскрытая папка, стена комнаты совместно с полом и т. д.

Мы знаем, что углы на плоскости (обычные углы) измеряются в градусах. А как измеряются двугранные углы? Это делается следующим образом. Отметим на ребре двугранного угла какую-нибудь точку и в каждой грани из этой точки проведем луч перпендикулярно к ребру. Образованный этими лучами угол называется **линейным углом двугранного угла.** На рисунке 59, *а* угол AOB — линейный угол двугранного угла с ребром CD. Так как $OA \perp CD$ и $OB \perp CD$, то плоскость AOB перпендикулярна к прямой CD. Таким образом, плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру двугранного угла. Очевидно, двугранный угол имеет бесконечное множество линейных углов (рис. 59, *б*).



Линейный угол двугранного угла

Рис. 59

Докажем, что **все линейные углы двугранного угла равны друг другу.** Рассмотрим два линейных угла AOB и $A_1O_1B_1$ (см. рис. 59, *б*). Лучи OA и O_1A_1 лежат в одной грани и перпендикулярны к прямой OO_1, поэтому они сонаправлены. Точно так же сонаправлены лучи OB и O_1B_1. Поэтому $\angle A_1O_1B_1 = \angle AOB$ (как углы с сонаправленными сторонами).

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла. На рисунке 60, *а* градусная мера двугранного угла равна 45°. Обычно говорят коротко: «Двугранный угол равен 45°».

Двугранный угол называется **прямым (острым, тупым)**, если он равен 90° (меньше 90°, больше 90°). Двугранный угол, изображенный на рисунке 60, *б*, прямой, на рисунке 60, *а* — острый, а на рисунке 60, *в* — тупой.

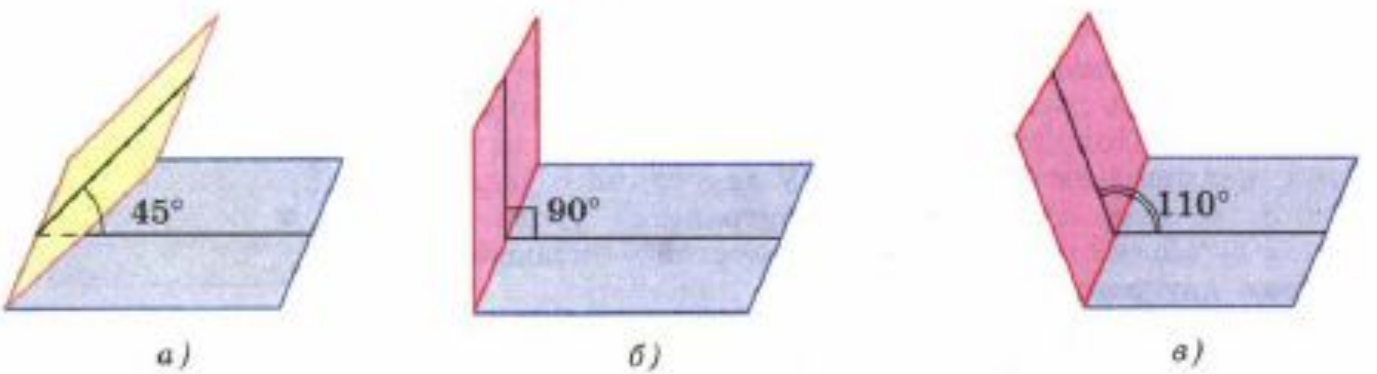


Рис. 60

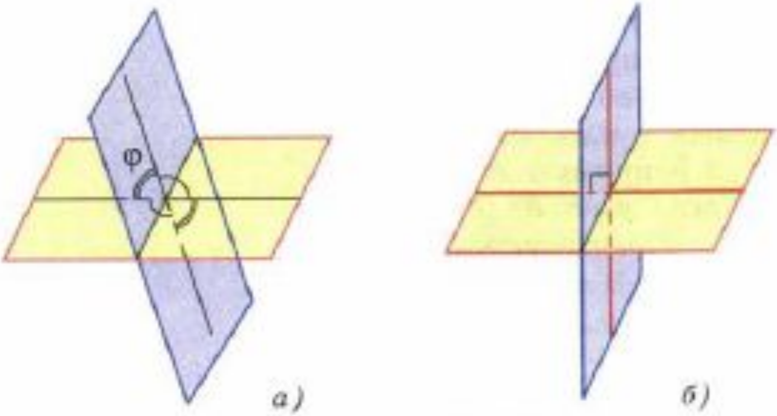


Рис. 61

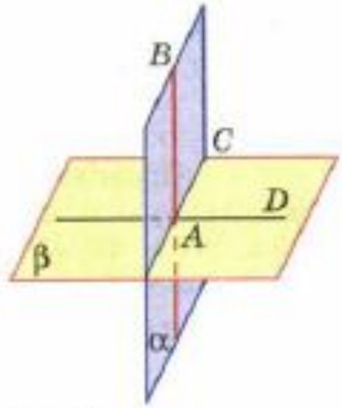


Рис. 62

23 Признак перпендикулярности двух плоскостей

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром (рис. 61, *а*). Если один из этих двугранных углов равен φ, то другие три угла равны соответственно $180° - \varphi$, φ и $180° - \varphi$. В частности, если один из углов прямой ($\varphi = 90°$), то и остальные три угла прямые. Если φ — тот из четырех углов, который не превосходит каждого из остальных, то говорят, что **угол между пересекающимися плоскостями равен** φ. Очевидно, $0° < \varphi \leqslant 90°$.

Определение

Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными** (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90° (рис. 61, *б*).

Примером взаимно перпендикулярных плоскостей служат плоскости стены и пола комнаты. Ясно, что все четыре двугранных угла, образованные взаимно перпендикулярными плоскостями, прямые.

Рассмотрим признак перпендикулярности двух плоскостей.

Теорема

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Доказательство

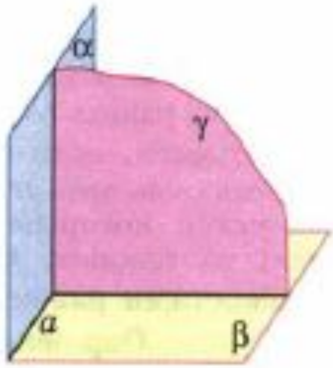
Рассмотрим плоскости α и β такие, что плоскость α проходит через прямую AB, перпендикулярную к плоскости β и пересекающуюся с ней в точке A (рис. 62). Докажем, что $\alpha \perp \beta$. Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой AC, причем $AB \perp AC$, так как по условию $AB \perp \beta$, т. е. прямая AB перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости β.

Проведем в плоскости β прямую AD, перпендикулярную к прямой AC. Тогда угол BAD — линейный угол двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей α и β. Но $\angle BAD = 90°$ (так как $AB \perp \beta$). Следовательно, угол между плоскостями α и β равен $90°$, т. е. $\alpha \perp \beta$. Теорема доказана.

Следствие

Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей (рис. 63).

24 Прямоугольный параллелепипед



Если $\gamma \perp a$, то $\gamma \perp \alpha$ и $\gamma \perp \beta$

Рис. 63

Параллелепипед называется **прямоугольным**, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники. Форму прямоугольного параллелепипеда имеют многие предметы: коробки, ящики, комнаты и т. д. На рисунке 64 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Его основаниями служат прямоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, а боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 перпендикулярны к основаниям. Отсюда следует, что $AA_1 \perp AB$, т. е. боковая грань AA_1B_1B — прямоугольник. То же самое можно сказать и об остальных боковых гранях. Таким образом, мы обосновали следующее свойство прямоугольного параллелепипеда:

1^0. В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней — прямоугольники.

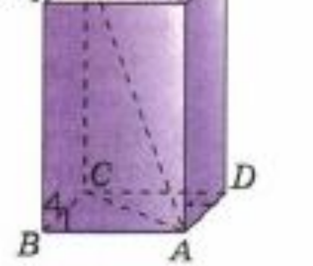
Полуплоскости, в которых расположены смежные грани параллелепипеда, образуют двугранные углы, которые называются **двугранными углами параллелепипеда.**

Докажите самостоятельно, что:

2^0. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда — прямые.

Теперь рассмотрим одно из самых замечательных свойств прямоугольного параллелепипеда.

Длины трех ребер, имеющих общую вершину, назовем **измерениями** прямоугольного параллелепипеда. Например, у параллелепипеда, изображенного



Прямоугольный параллелепипед

Рис. 64

на рисунке 64, в качестве измерений можно взять длины ребер AB, AD и AA_1.

В обыденной практике, говоря о размерах комнаты, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, вместо слова «измерения» используют обычно слова «длина», «ширина» и «высота» комнаты. Ясно, что длина, ширина и высота комнаты — это и есть ее измерения.

Прежде чем сформулировать свойство параллелепипеда, связанное с его измерениями, вспомним, что в прямоугольнике квадрат диагонали равен сумме квадратов смежных сторон.

Длины смежных сторон можно назвать измерениями прямоугольника, и поэтому **квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его измерений**. Оказывается, аналогичным свойством обладает и прямоугольный параллелепипед.

Теорема

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Доказательство

Обратимся к рисунку 64, на котором изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, и докажем, что

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Так как ребро CC_1 перпендикулярно к основанию $ABCD$, то угол ACC_1 прямой. Из прямоугольного треугольника ACC_1 по теореме Пифагора получаем

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2.$$

Но AC — диагональ прямоугольника $ABCD$, поэтому $AC^2 = AB^2 + AD^2$. Кроме того, $CC_1 = AA_1$. Следовательно, $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$. Теорема доказана.

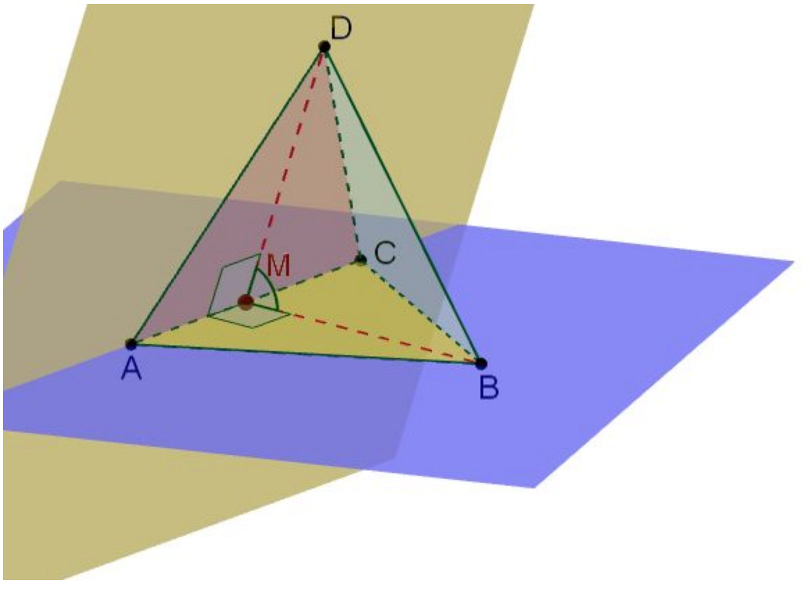
Следствие

Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

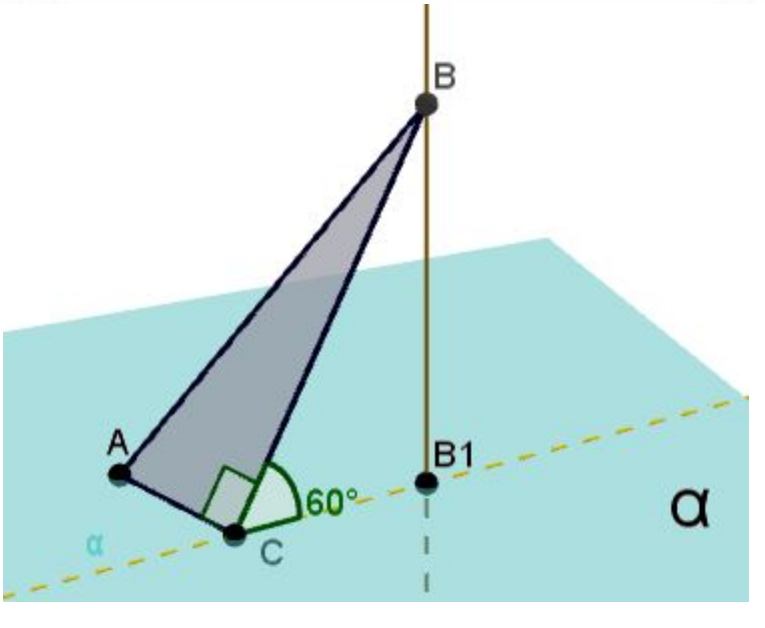
Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется **кубом**. Все грани куба — равные друг другу квадраты.

Практическая часть.

167 В тетраэдре $DABC$ все ребра равны, точка M — середина ребра AC. Докажите, что $\angle DMB$ — линейный угол двугранного угла $BACD$.



172 Катет AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежит в плоскости α, а угол между плоскостями α и ABC равен $60°$. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если $AC = 5$ см, $AB = 13$ см.



195 Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AC_1 = 12$ см и диагональ BD_1 составляет с плоскостью грани AA_1D_1D угол в $30°$, а с ребром DD_1 — угол в $45°$.