

Алгебра логики



Значения

В алгебре логики переменные и выражения могут иметь только два значения:

- Истина;
- Ложь.

Подобно древнегреческой логике.

Отрицание \neg

Иными словами НЕ. Также обозначается полоской над переменной или функцией.

| A | \bar{A} |
|-----|-----------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

КОНЪЮНКЦИЯ \wedge

Иными словами умножение или логическое И

Таблица -->
ИСТИННОСТИ

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|--------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

Дизъюнкция \vee

Иными словами умножение или логическое ИЛИ

| A | B | $A \vee B$ |
|---|---|------------|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

Импликация \rightarrow

Иными словами операция следования. Из истины не может следовать ложь.

| a | b | $a \rightarrow b$ |
|-----|-----|-------------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

Эквивалентность \equiv

Если переменные равны, то функция истина.

*Таблица истинности
эквиваленции:*

| <i>A</i> | <i>B</i> | <i>A</i> \equiv <i>B</i> |
|----------|----------|----------------------------|
| <i>0</i> | <i>0</i> | <i>1</i> |
| <i>0</i> | <i>1</i> | <i>0</i> |
| <i>1</i> | <i>0</i> | <i>0</i> |
| <i>1</i> | <i>1</i> | <i>1</i> |

XOR \oplus

Иными словами “исключающее ИЛИ”.

| a | b | $a \oplus b$ |
|-----|-----|--------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

NB!

Обратите внимание, что таблица истинности XOR соответствует отрицанию эквивалентности.

Следовательно $A \oplus B = \neg (A \equiv B)$

А таблица истинности импликации соответствует $\neg A \vee B$.

Следовательно: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$

Законы

В алгебре логики действуют те же правила, что и в обычной:

| Закон | Для \vee | Для \wedge |
|------------------------------------|--|--|
| Переместительный | $A \vee B = B \vee A$ | $A \wedge B = B \wedge A$ |
| Сочетательный | $A \vee (B \vee C) = (B \vee A) \vee C$ | $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ |
| Распределительный | $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ |
| Правила де Моргана | $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$ | $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ |
| Идемпотенции | $A \vee A = A$ | $A \wedge A = A$ |
| Поглощения | $A \vee A \wedge B = A$ | $A \wedge (A \vee B) = A$ |
| Склеивания | $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B) = B$ | $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B) = B$ |
| Операция переменной с ее инверсией | $A \vee \overline{A} = 1$ | $A \wedge \overline{A} = 0$ |
| Операция с константами | $A \vee 0 = A$ | $A \wedge 1 = A$ |
| | $A \vee 1 = 1$ | $A \wedge 0 = 0$ |
| Двойного отрицания | $\overline{\overline{A}} = A$ | |

Законы Де Моргана

Если таблица истинности одного выражения эквивалентная таблице истинности второго, то такие выражения эквивалентны.

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

$$\overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$