ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

НАТАЛЬЯ ВЛАДИМИРОВНА КРУПИНА

Москва,
2021

Взаимное расположение прямых на плоскости

Параллельность прямых

Пусть на плоскости заданы две прямые l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, и l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих координатах пропорциональны ($A_1/A_2 = B_1/B_2$) или когда угловые коэффициенты прямых равны между собой ($k_1 = k_2$)

Перпендикулярность прямых

Пусть на плоскости заданы две прямые l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, и l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих координатах пропорциональны ($A_1/A_2 = B_1/B_2$) или когда угловые коэффициенты прямых равны между собой ($k_1 = k_2$)

Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Пример. Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.
Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример. Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины С.

Находим уравнение стороны AB: $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$;

$4x = 6y - 6$; $2x - 3y + 3 = 0$; $y = \frac{2}{3}x + 1$.

Искомое уравнение высоты имеет вид: $Ax + By + C = 0$ или $y = kx + b$.

$k = -\frac{3}{2}$. Тогда $y = -\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку С, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда $b = 17$. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

Ответ: $3x + 2y - 34 = 0$.

Тема 2.3 Кривые второго порядка

Уравнение второй степени с двумя переменными определяет на плоскости кривую второго порядка и притом единственную. Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

В этом уравнении коэффициенты могут принимать любые действительные значения при условии, что A, B и C одновременно не равны нулю. Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса.

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - уравнение “мнимого” эллипса.

3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение гиперболы.

4) $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.

5) $y^2 = 2px$ – уравнение параболы.

6) $y^2 - a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.

7) $y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.

8) $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.

9) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

Окружность

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром.

Пусть центром окружности является точка $O(a;\ b)$, а расстояние до любой точки $M(x;y)$ окружности равно R. Тогда

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \text{ –}$$

каноническое уравнение окружности с центром $O(a;\ b)$ и радиусом R.

<u>Пример.</u> Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде: $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$.

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к каноническому виду. Для этого выделим полные квадраты:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2{,}5y - 2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2{,}5y + 25/16 - 25/16 - 2 = 0$$

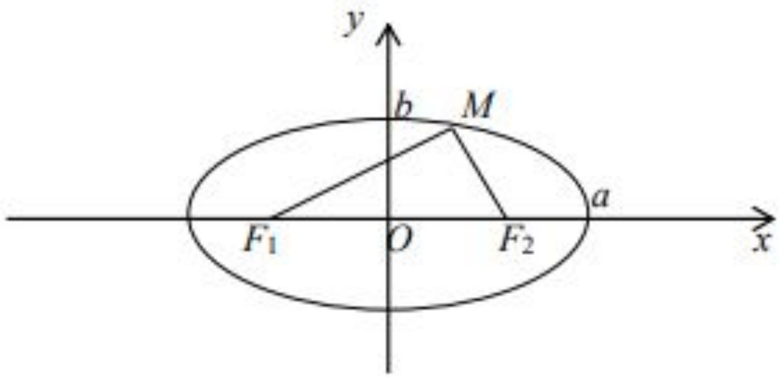
$$(x-2)^2 + (y+5/4)^2 - 25/16 - 6 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+5/4)^2 = 121/16$$

Отсюда находим координаты центра $O(2;\ -5/4)$; радиус $R = 11/4$.

Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называемых ***фокусами***) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.



Фокусы обозначаются буквами F_1, F_2, расстояние между фокусами – $2c$, сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов – $2a$ ($2a > 2c$), a – большая полуось; b – малая полуось.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где a, b и c связаны между собой равенствами:

$$a^2 - b^2 = c^2 \ (\textit{или}\ b^2 - a^2 = c^2).$$

$$a^2 - b^2 = c^2 \text{ (или } b^2 - a^2 = c^2\text{)}.$$

Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к длине большей оси и называется ***эксцентриситетом***.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \text{ или } \varepsilon = \frac{c}{b}$$

Т.к. по определению $2a > 2c$, то эксцентриситет всегда выражается правильной дробью, т.е. $0 \le \varepsilon < 1$.

Величина $k = b/a$ называется ***коэффициентом сжатия*** эллипса, а величина $1 - k = (a - b)/a$ называется ***сжатием*** эллипса.
Коэффициент сжатия и эксцентриситет связаны соотношением: $k^2 = 1 - \varepsilon^2$.
Если $a = b$ ($c = 0$, $\varepsilon = 0$, фокусы сливаются), то эллипс вырождается в окружность.

Пример. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

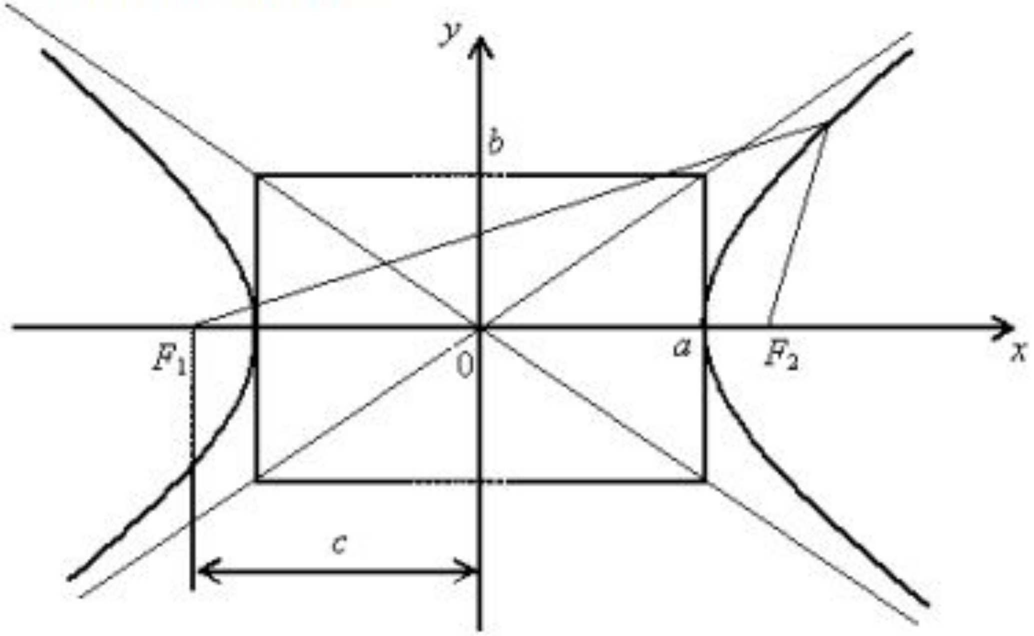
Расстояние между фокусами: $2c = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$, таким образом, $a^2 - b^2 = c^2 = \frac{1}{2}$

по условию $2a = 2$, следовательно, $a = 1$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2$.

Итого: $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1/2} = 1$.

Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух заданных точек, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.



Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ или } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,$$

где a, b и c связаны между собой равенством $a^2+b^2=c^2$.

Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат.

Фокусы обозначаются буквами F_1, F_2, расстояние между фокусами – $2c$, разность расстояний от любой точки гиперболы до фокусов – $2a$ ($2a < 2c$). Ось $2a$ называется действительной осью гиперболы, ось $2b$ – мнимой осью гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к длине действительной оси:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \text{ или } \varepsilon = \frac{c}{b}.$$

Т.к. по определению $2a < 2c$, то эксцентриситет гиперболы всегда выражается неправильной дробью, т.е. $\varepsilon > 1$.

Если длина действительной оси равна длине мнимой оси, т.е. $a = b$, $\varepsilon = \sqrt{2}$, то гипербола называется ***равнобочной (равносторонней).***

Пример. Составить каноническое уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 - 9 = 16$.

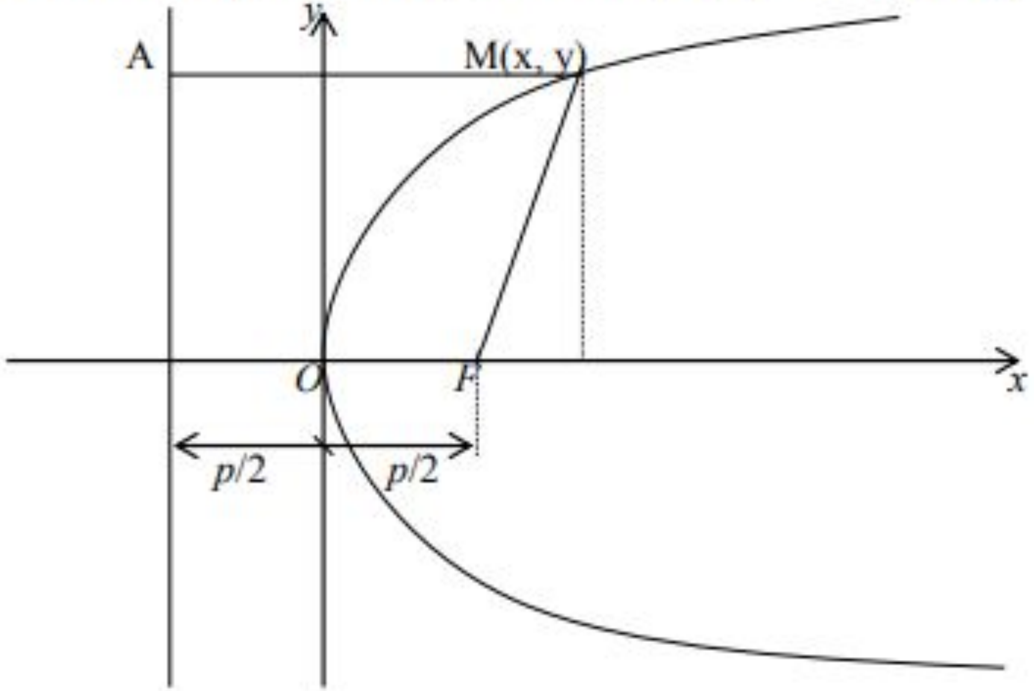
Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $\varepsilon = c/a = 2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$; $b^2 = 16 - 4 = 12$.

Тогда $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ - искомое уравнение гиперболы.

Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой ***фокусом***, и данной прямой, называемой ***директрисой***.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Фокус параболы обозначается буквой F, директриса – d, расстояние от фокуса до директрисы – p.

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси абсцисс, имеет вид:

$$y^2 = 2px \text{ или } y^2 = -2px$$

Уравнения директрис соответственно $x = -p/2$, $x = p/2$

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси ординат, имеет вид:

$$x^2 = 2py \text{ или } x^2 = -2py$$

Уравнения директрис соответственно $y = -p/2$, $y = p/2$

Пример. На параболе $y^2 = 8x$ найти точки, расстояние которой от директрисы равно 4.

Из уравнения параболы получаем, что $p = 4$. $r = x + p/2 = 4$; следовательно:
$x = 2$; $y^2 = 16$; $y = \pm 4$. Искомые точки: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.

Векторное и смешанное произведения векторов

Упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется правой, если при совмещении их начал кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ как поворот против часовой стрелки (рис.2.6).

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ и удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a} \hat{,} \vec{b})$;

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая.

Основные *свойства векторного произведения*:

1) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$;

2) $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$;

3) $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$;

4) $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

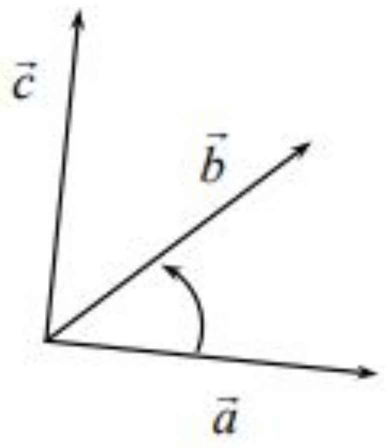


Рис.2.6

Если векторы $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ заданы координатами в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \qquad (2.12)$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, может быть найдена по формуле

$$S = |[\vec{a}, \vec{b}]|. \qquad (2.13)$$

Пример 2.8. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2;-1;4)$, $B(3;1;6)$, $C(6;2;9)$.

Р е ш е н и е. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}(1;2;2)$ и $\overrightarrow{AC}(4;3;5)$, поэтому, согласно (2.13),

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|.$$

По формуле (2.12)

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 3^2 + (-5)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, обозначаемое $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ и равное скалярному произведению вектора $[\vec{a},\vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$, т.е. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$.

Основные свойства смешанного произведения:

1) $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=(\vec{a},[\vec{b},\vec{c}])$;

2) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$;

3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0 \Leftrightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны;

4) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})>0 \Leftrightarrow$ тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая.

Если векторы $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}(x_3;y_3;z_3)$ заданы координатами в ортонормированном базисе, то

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.14)$$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, может быть найден по формуле

$$V=|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|. \qquad (2.15)$$

Пример 2.9. Доказать, что точки $A(1;2;3)$, $B(2;4;1)$, $C(1;-3;6)$ и $D(4;-2;3)$ лежат в одной плоскости.

Р е ш е н и е. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{AB}(1;2;-2)$, $\overline{AC}(0;-5;3)$ и $\overline{AD}(3;-4;0)$ компланарны, а

значит, по свойству 3) смешанного произведения, $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = 0$. По формуле (2.14) находим

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2.10. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(3;-1;5)$, $B(5;2;6)$, $C(-1;3;4)$ и $D(7;3;-1)$.

Р е ш е н и е. Объем пирамиды $ABCD$ равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}(2;3;1)$, $\overline{AC}(-4;4;-1)$, $\overline{AD}(4;4;-6)$, поэтому, согласно (2.15),

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|.$$

Находим смешанное произведение:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -156,$$

следовательно, $V_{ABCD} = \dfrac{156}{6} = 26$.

Задачи для самостоятельного решения

2.47. Найти $|[\vec{a},\vec{b}]|$, если $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=8, (\hat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{6}$.

2.48. Найти $|[\vec{a},\vec{b}]|$, если $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=10, (\vec{a},\vec{b})=8$.

2.49. Найти и построить вектор $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$, если:

а) $\vec{a}=2\vec{i}, \vec{b}=3\vec{k}$; б) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}, \vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$; в) $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}, \vec{b}=2\vec{j}+3\vec{k}$.

2.50. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{j}+2\vec{k}$.

2.51. Доказать равенство: $[2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}]=3[\vec{a},\vec{b}]$.

2.52. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$, где $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$, $(\hat{\vec{p},\vec{q}})=\frac{\pi}{6}$.

2.53. Известно, что $|\vec{p}|=|\vec{q}|=5$, и $(\vec{p}\hat{,}\vec{q})=\dfrac{\pi}{4}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$ и $\vec{b}=3\vec{p}+2\vec{q}$.

2.54. Дан параллелограмм $ABCD$. Известно, что $\overline{AC}=2\vec{p}-\vec{q}$, $\overline{BD}=5\vec{p}-4\vec{q}$, где $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$, и $(\vec{p}\hat{,}\vec{q})=\dfrac{\pi}{4}$. Найти площадь параллелограмма.

2.55. Даны вершины $A(1;-2;8)$, $B(0;0;4)$, $C(6;2;0)$ треугольника. Найти длину высоты треугольника, проведенной из вершины B.

2.56. Даны вершины $A(3;-1;4)$, $B(2;4;5)$, $C(4;4;5)$ треугольника. Найти его площадь.

2.57. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+7\vec{j}+5\vec{k}$ и $\vec{c}=6\vec{i}+8+4\vec{k}$.

2.58. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. В случае некомпланарности определить, правой или левой является тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

а) $\vec{a}(1;-1;3)$, $\vec{b}(2;3;-1)$, $\vec{c}(1;9;-11)$;

б) $\vec{a}(3;-1;2)$, $\vec{b}(2;1;-1)$, $\vec{c}(3;-2;1)$;

в) $\vec{a}(4;1;1)$, $\vec{b}(2;0;3)$, $\vec{c}(-6;2;-4)$.

2.59. При каком значении α векторы $\vec{a}(7;\alpha;-13)$, $\vec{b}(1;-2;1)$ и $\vec{c}(3;1;-2)$ компланарны?

2.60. Определить, лежат ли точки $A(1;2;-1)$, $B(4;1;5)$, $C(-1;2;1)$ и $D(2;1;3)$ в одной плоскости.