

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

НАТАЛЬЯ ВЛАДИМИРОВНА КРУПИНА

Москва,
2021

Взаимное расположение прямых на плоскости

Параллельность прямых

Пусть на плоскости заданы две прямые $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, и $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих координатах пропорциональны ($A_1/A_2 = B_1/B_2$) или когда угловые коэффициенты прямых равны между собой ($k_1 = k_2$)

Перпендикулярность прямых

Пусть на плоскости заданы две прямые $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, и $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих координатах пропорциональны ($A_1/A_2 = B_1/B_2$) или когда угловые коэффициенты прямых равны между собой ($k_1 = k_2$)

Если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то острый угол между этими прямыми будет определяться как

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/k_2$.

Пример. Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.
Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1 k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример. Даны вершины треугольника $A(0; 1)$, $B(6; 5)$, $C(12; -1)$. Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C .

Находим уравнение стороны AB : $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$;

$$4x = 6y - 6; \quad 2x - 3y + 3 = 0; \quad y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Искомое уравнение высоты имеет вид: $Ax + By + C = 0$ или $y = kx + b$.

$k = -\frac{3}{2}$. Тогда $y = -\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку C , то ее координаты

удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда $b = 17$. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

Ответ: $3x + 2y - 34 = 0$.

Тема 2.3 Кривые второго порядка

Уравнение второй степени с двумя переменными определяет на плоскости кривую второго порядка и притом единственную. Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

В этом уравнении коэффициенты могут принимать любые действительные значения при условии, что A , B и C одновременно не равны нулю. Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

- 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса.
- 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - уравнение “мнимого” эллипса.
- 3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение гиперболы.
- 4) $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ – уравнение двух пересекающихся прямых.
- 5) $y^2 = 2px$ – уравнение параболы.
- 6) $y^2 - a^2 = 0$ – уравнение двух параллельных прямых.
- 7) $y^2 + a^2 = 0$ – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.
- 8) $y^2 = 0$ – пара совпадающих прямых.
- 9) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ – уравнение окружности.

Окружность

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром.

Пусть центром окружности является точка $O(a; b)$, а расстояние до любой точки $M(x; y)$ окружности равно R . Тогда

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 -$$

каноническое уравнение окружности с центром $O(a; b)$ и радиусом R .

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде: $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$.

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к каноническому виду. Для этого выделим полные квадраты:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2,5y - 2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2,5y + 25/16 - 25/16 - 2 = 0$$

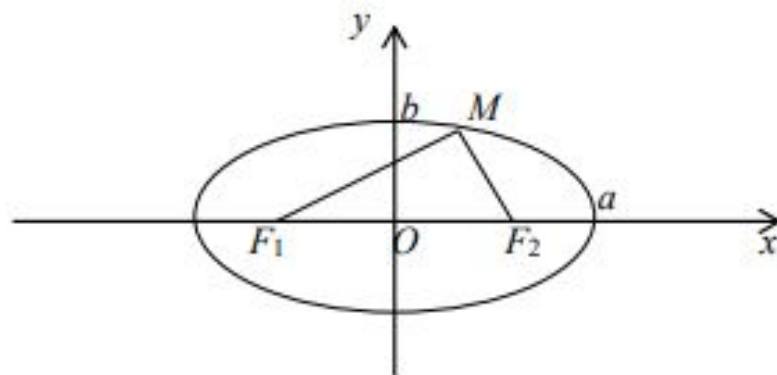
$$(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 - 25/16 - 6 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 = 121/16$$

Отсюда находим координаты центра $O(2; -5/4)$; радиус $R = 11/4$.

Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называемых **фокусами**) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.



Фокусы обозначаются буквами F_1 , F_2 , расстояние между фокусами – $2c$, сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов – $2a$ ($2a > 2c$), a – большая полуось; b – малая полуось.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a , b и c связаны между собой равенствами:

$$a^2 - b^2 = c^2 \text{ (или } b^2 - a^2 = c^2).$$

$$a^2 - b^2 = c^2 \text{ (или } b^2 - a^2 = c^2).$$

Форма эллипса определяется характеристикой, которая является отношением фокусного расстояния к длине большей оси и называется *эксцентриситетом*.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \text{ или } \varepsilon = \frac{c}{b}$$

Т.к. по определению $2a > 2c$, то эксцентриситет всегда выражается правильной дробью, т.е. $0 \leq \varepsilon < 1$.

Величина $k = b/a$ называется *коэффициентом сжатия* эллипса, а величина $1 - k = (a - b)/a$ называется *сжатием* эллипса.

Коэффициент сжатия и эксцентриситет связаны соотношением: $k^2 = 1 - \varepsilon^2$.

Если $a = b$ ($c = 0$, $\varepsilon = 0$, фокусы сливаются), то эллипс вырождается в окружность.

Пример. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

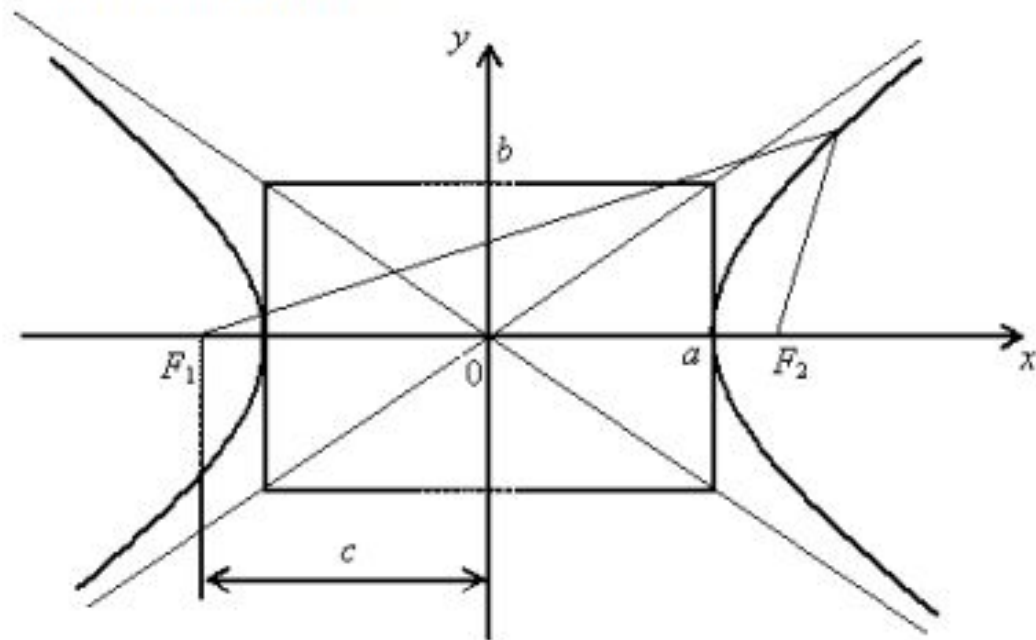
Расстояние между фокусами: $2c = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$, таким образом, $a^2 - b^2 = c^2 = \frac{1}{2}$

по условию $2a = 2$, следовательно, $a = 1$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2$.

Итого: $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1/2} = 1$.

Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух заданных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.



Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ или } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

где a , b и c связаны между собой равенством $a^2 + b^2 = c^2$.

Гипербола симметрична относительно середины отрезка, соединяющего фокусы и относительно осей координат.

Фокусы обозначаются буквами F_1, F_2 , расстояние между фокусами – $2c$, разность расстояний от любой точки гиперболы до фокусов – $2a$ ($2a < 2c$). Ось $2a$ называется действительной осью гиперболы, ось $2b$ – мнимой осью гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к длине действительной оси:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \text{ или } \varepsilon = \frac{c}{b}.$$

Т.к. по определению $2a < 2c$, то эксцентриситет гиперболы всегда выражается неправильной дробью, т.е. $\varepsilon > 1$.

Если длина действительной оси равна длине мнимой оси, т.е. $a = b$, $\varepsilon = \sqrt{2}$, то гипербола называется **равнобочной (равносторонней)**.

Пример. Составить каноническое уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен

2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 - 9 = 16$.

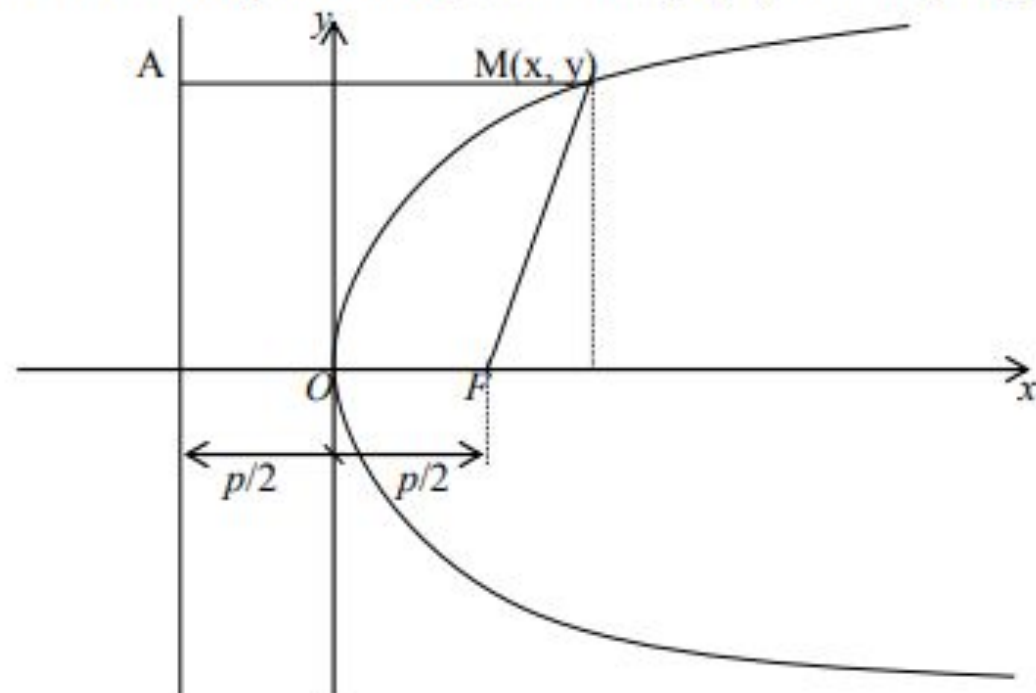
Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $\varepsilon = c/a = 2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$; $b^2 = 16 - 4 = 12$.

Тогда $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ - искомое уравнение гиперболы.

Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой **фокусом**, и данной прямой, называемой **директрисой**.

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



Фокус параболы обозначается буквой F , директриса – d , расстояние от фокуса до директрисы – p .

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси абсцисс, имеет вид:

$$y^2 = 2px \text{ или } y^2 = -2px$$

Уравнения директрис соответственно $x = -p/2$, $x = p/2$

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси ординат, имеет вид:

$$x^2 = 2py \text{ или } x^2 = -2py$$

Уравнения директрис соответственно $y = -p/2$, $y = p/2$

Пример. На параболе $y^2 = 8x$ найти точки, расстояние которой от директрисы равно 4.

Из уравнения параболы получаем, что $p = 4$. $r = x + p/2 = 4$; следовательно:
 $x = 2$; $y^2 = 16$; $y = \pm 4$. Искомые точки: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.

Векторное и смешанное произведения векторов

Упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется правой, если при совмещении их начал кратчайший поворот от вектора \vec{a} к вектору \vec{b} виден из конца вектора \vec{c} как поворот против часовой стрелки (рис.2.6).

Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор \vec{c} , обозначаемый $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ и удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;
- 2) вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} ;
- 3) тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая.

Основные свойства векторного произведения:

- 1) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$;
- 2) $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$;
- 3) $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$;
- 4) $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ и \vec{b} коллинеарны.

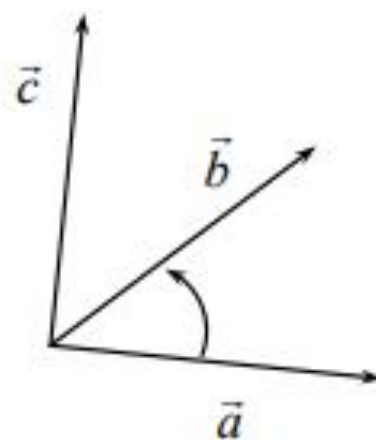


Рис.2.6

Если векторы $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ заданы координатами в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \quad (2.12)$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , может быть найдена по формуле

$$S = |[\vec{a}, \vec{b}]|. \quad (2.13)$$

Пример 2.8. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2;-1;4)$, $B(3;1;6)$, $C(6;2;9)$.

Решение. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}(1;2;2)$ и $\overline{AC}(4;3;5)$, поэтому, согласно (2.13),

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]|.$$

По формуле (2.12)

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 3^2 + (-5)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, обозначаемое $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и равное скалярному произведению вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$ на вектор \vec{c} , т.е. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

Основные свойства смешанного произведения:

- 1) $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$;
- 2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$;
- 3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны;
- 4) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0 \Leftrightarrow$ тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая.

Если векторы $\vec{a}(x_1; y_1; z_1), \vec{b}(x_2; y_2; z_2), \vec{c}(x_3; y_3; z_3)$ заданы координатами в ортонормированном базисе, то

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (2.14)$$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, может быть найден по формуле

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|. \quad (2.15)$$

Пример 2.9. Доказать, что точки $A(1;2;3)$, $B(2;4;1)$, $C(1;-3;6)$ и $D(4;-2;3)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{AB}(1;2;-2)$, $\overline{AC}(0;-5;3)$ и $\overline{AD}(3;-4;0)$ компланарны, а

значит, по свойству 3) смешанного произведения, $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = 0$. По формуле (2.14) находим

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2.10. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(3; -1; 5)$, $B(5; 2; 6)$, $C(-1; 3; 4)$ и $D(7; 3; -1)$.

Решение. Объем пирамиды $ABCD$ равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}(2; 3; 1)$, $\overline{AC}(-4; 4; -1)$, $\overline{AD}(4; 4; -6)$, поэтому, согласно (2.15),

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|.$$

Находим смешанное произведение:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -156,$$

следовательно, $V_{ABCD} = \frac{156}{6} = 26$.

Задачи для самостоятельного решения

2.47. Найти $|[\vec{a}, \vec{b}]|$, если $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 8, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

2.48. Найти $|[\vec{a}, \vec{b}]|$, если $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 10, (\vec{a}, \vec{b}) = 8$.

2.49. Найти и построить вектор $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, если:

а) $\vec{a} = 2\vec{i}, \vec{b} = 3\vec{k}$; б) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$; в) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}, \vec{b} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

2.50. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$.

2.51. Доказать равенство: $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}]$.

2.52. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, где $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

2.53. Известно, что $|\vec{p}|=|\vec{q}|=5$, и $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$. Найти площадь треугольни-

ка, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$.

2.54. Дан параллелограмм $ABCD$. Известно, что $\overline{AC} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\overline{BD} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$, где $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$, и $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$. Найти площадь параллелограмма.

2.55. Даны вершины $A(1; -2; 8)$, $B(0; 0; 4)$, $C(6; 2; 0)$ треугольника. Найти длину высоты треугольника, проведенной из вершины B .

2.56. Даны вершины $A(3; -1; 4)$, $B(2; 4; 5)$, $C(4; 4; 5)$ треугольника. Найти его площадь.

2.57. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{c} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$.

2.58. Установить, компланарны ли векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . В случае некомпланарности определить, правой или левой является тройка \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} :

а) $\vec{a}(1; -1; 3)$, $\vec{b}(2; 3; -1)$, $\vec{c}(1; 9; -11)$;

б) $\vec{a}(3; -1; 2)$, $\vec{b}(2; 1; -1)$, $\vec{c}(3; -2; 1)$;

в) $\vec{a}(4; 1; 1)$, $\vec{b}(2; 0; 3)$, $\vec{c}(-6; 2; -4)$.

2.59. При каком значении α векторы $\vec{a}(7; \alpha; -13)$, $\vec{b}(1; -2; 1)$ и $\vec{c}(3; 1; -2)$ компланарны?

2.60. Определить, лежат ли точки $A(1; 2; -1)$, $B(4; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ и $D(2; 1; 3)$ в одной плоскости.