27.05.20

Производная

Домашняя работа.

N 39.34 а)

Дано: $y=2x-3$; $x_0=3$; $x_1=3{,}2$

Найти: прираш. ф-ции.

Решение: $\Delta y=y(x_1)-y(x_0) \Rightarrow \Delta y=(2\cdot 3{,}2-3)-$

$-(2\cdot 3-3)=3{,}4-3=0{,}4$

Ответ: $\Delta y=0{,}4$

№ 39.34

а) $y=2x-3$

$x_0=3$ $\quad \Delta f=f(x_1)-f(x_0)$

$x_1=3{,}2$

1) $3{,}2\cdot 2-3=3{,}4$

2) $3\cdot 2-3=3$

3) $\Delta f=3{,}4-3=0{,}4$

N 39.35а) $y=x^2+2x$

$x_0=-2$; $x_1=-1{,}9$

$\Delta y=y_1-y_0=x_1^2+2x_1-x_0^2-2x_0=$

$=3{,}61-3{,}8-\cancel{4}+\cancel{4}=-0{,}19$

№ 39.36 а)

а) $y=\sin x$; $x_0=0$; $x_1=\frac{\pi}{6}$

$f(x_1)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$f(x_0)=\sin 0=0$

$\Delta f=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}=0{,}5$

N39.37

а) Дано: $y=2\sin x\cdot\cos x$, $x_0=0$, $x_1=-\frac{\pi}{8}$

Найти: Δy

Решение. 1) $2\sin x\cos x=\sin 2x \Rightarrow y=\sin 2x$. $\Delta y=y(x_1)-y(x_0)$

2) $\Delta y=\sin 2\cdot\left(-\frac{\pi}{8}\right)-\sin 2\cdot 0=-\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0=-\frac{\sqrt{2}}{2}-0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

№ 39.43 вг

Дано: $y=f(x)$ $\quad x \to x+\Delta x \quad$ в) $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad$ г) $f(x)=\sqrt{x}$

Найти: Δf

Решение: $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$

в) $\Delta f = \frac{1^{\,x}}{x+\Delta x} - \frac{1^{\,\Delta x + x}}{x} = \frac{\cancel{x}-\cancel{x}-\Delta x}{x(x+\Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

г) $\Delta f = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$

№ 39.44 вг

Дано: $y=f(x)$ $\quad x \to x+\Delta x \quad$ в) $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad$ г) $f(x)=\sqrt{x}$

Найти: $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

Решение: в) 1) Найдем Δf (см 39.43 в)

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{\cancel{\Delta x}}{x(x+\Delta x)\cdot\cancel{\Delta x}} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}$

г) 1) Найдём Δf (см 39.43 г)

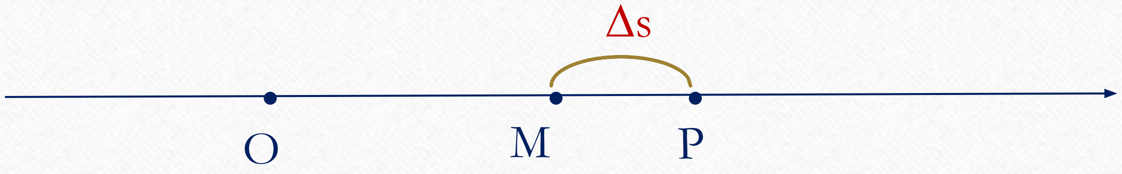
2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})\cdot\cancel{\Delta x}} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$

II. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача 1. О скорости движения

Пусть вдоль некоторой прямой движется тело по закону s= s(t), где s- пройденный путь, t- время, и необходимо найти скорость движения тела в момент t .

Пусть в момент времени t тело находится в точке M, пройденный путь будет OM = s(t).



Тогда в момент времени (t +Δt) тело переместится в точку P; путь OP = s(t +Δt). Получается, что за Δt тело прошло путь MP = OP – OM = s(t +Δt) - s(t) = Δs.

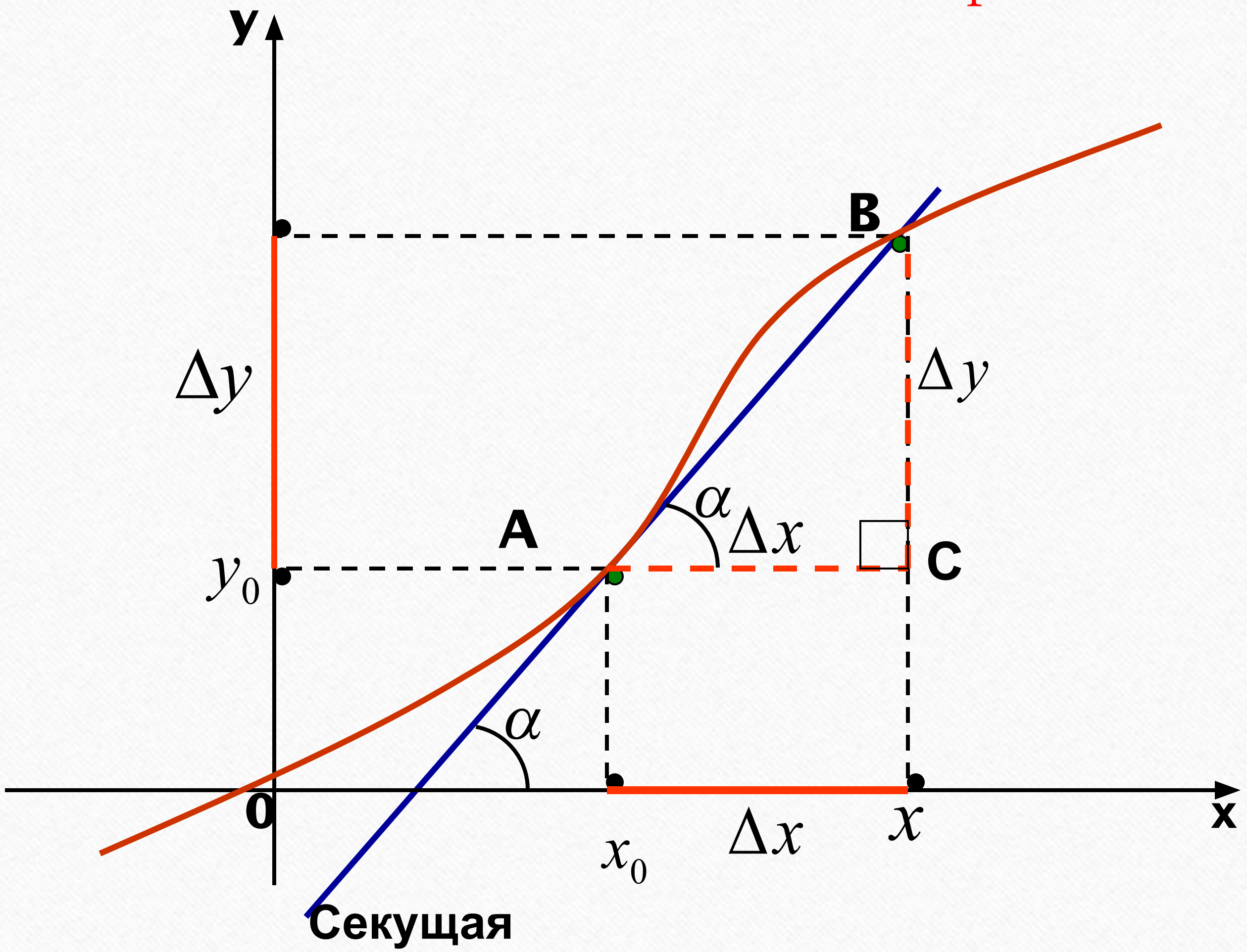
Тогда за промежуток Δt средняя скорость будет $v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Когда $\Delta t \to 0$, $P \to M$ и $v_{ср.} \to v_{мгн.}$

Мгновенная скорость ($v_{мгн.}$, скорость в момент времени t) - это предел средней скорости за промежуток времени Δt при условии, что $\Delta t \to 0$.

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.}$$

II. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача 2. О касательной



Геометрический смысл приращения функции

$$y = kx + b$$

k – угловой коэффициент прямой (секущей)

Знаем: $k = tg\,\alpha$

$$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

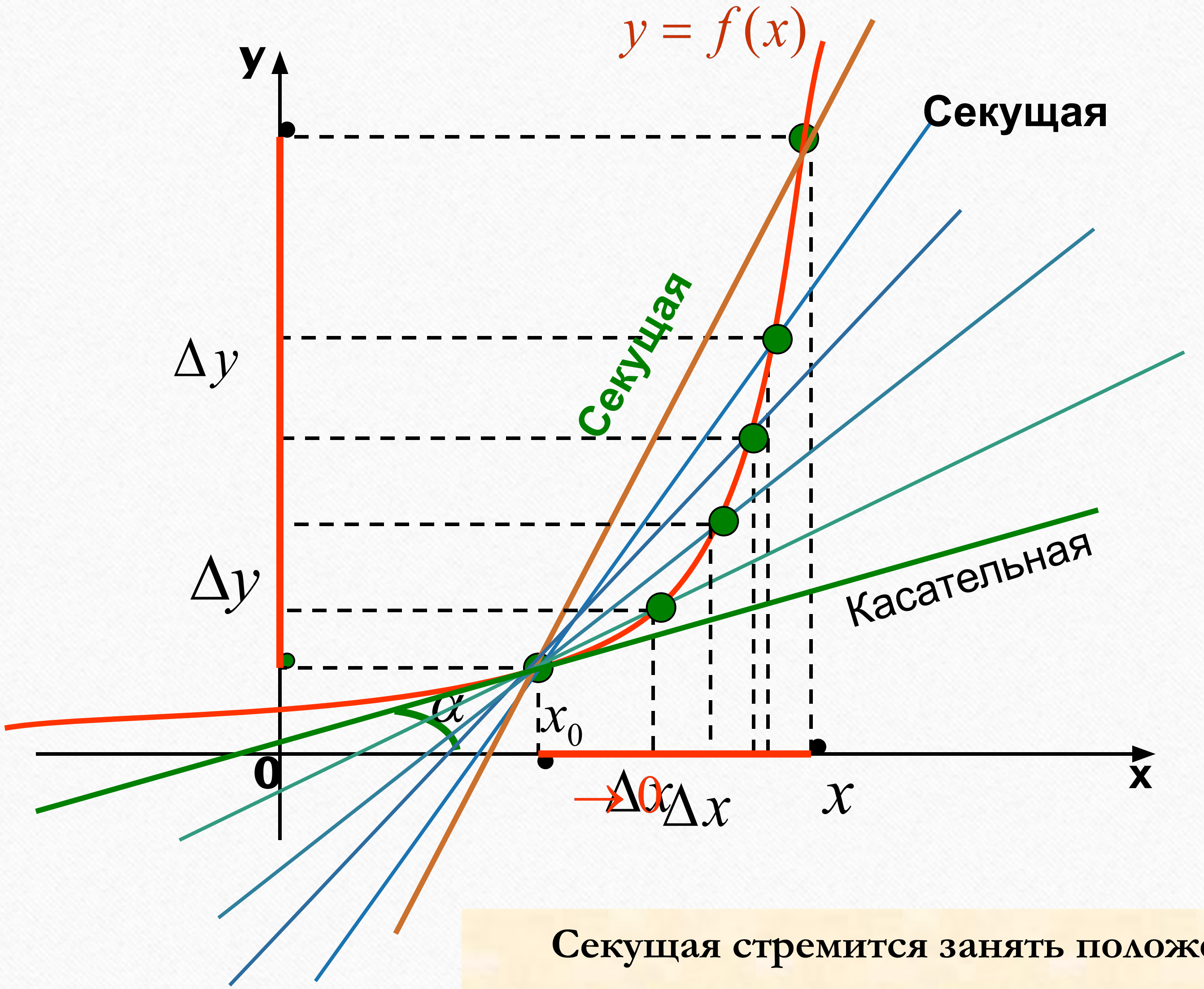
Таким образом,

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = k}$$

Отношение приращения функции к приращению аргумента равно тангенсу угла наклона секущей к положительному направлению оси ОХ.

II. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача 2. О касательной

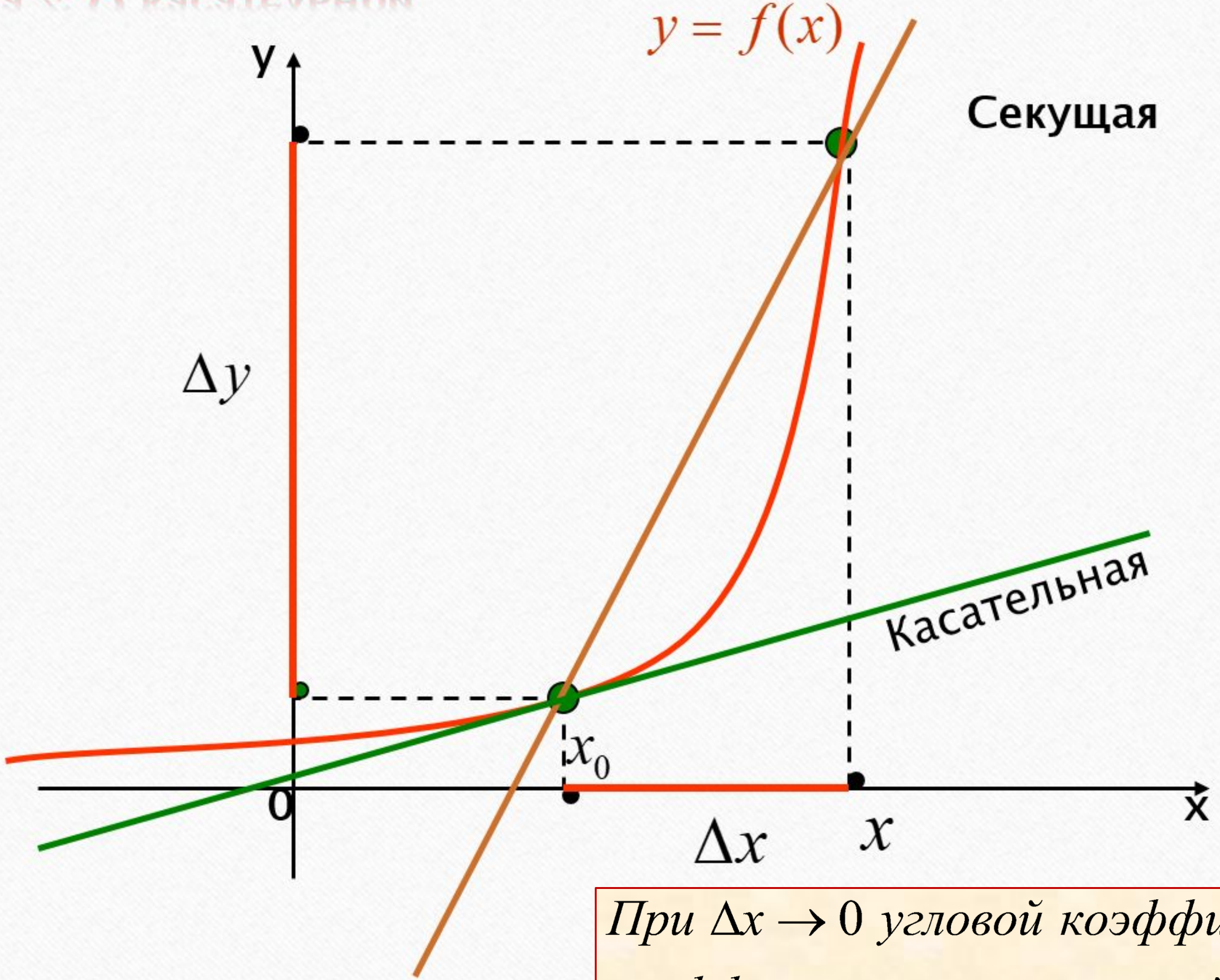


Этот рисунок в тетради по теории можно не рисовать, просто посмотреть движение секущей к положению касательной.

Секущая стремится занять положение касательной. То есть, касательная есть предельное положение секущей.

II. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача 2: О касательной



$y = kx + b$

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = k}$$

При $\Delta x \to 0$ $k_{кас} \to k_{сек}$

$$\boxed{k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{сек} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

При $\Delta x \to 0$ угловой коэффициент секущей $\to$ к угловому коэффициенту касательной.

II. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача 3. О скорости химической реакции

Пусть некоторое вещество вступает в химическую реакцию. Количество этого вещества Q изменяется в течение реакции в зависимости от времени t и является функцией от времени.

Пусть за время Δt количество вещества изменяется на ΔQ , тогда отношение $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ будет выражать среднюю скорость химической реакции за время Δt.

Предел этого отношения $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ - это скорость химической реакции в данный момент времени t.

Задача 4. О скорости радиоактивного распада

Если m - масса радиоактивного вещества и t - время, то явление радиоактивного распада в момент времени t при условии, что масса радиоактивного вещества с течением времени уменьшается, характеризуется функцией m= m(t).

Средняя скорость распада за время Δt выражается отношением $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t}$,

а мгновенная скорость распада в момент времени t - $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$

.

III. Определение производной

Вышеприведенные задачи приводят к одному и тому же выводу – пределу отношения приращения функции к приращению аргумента, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

$$\text{[illegible]} = \lim_{\Delta\text{[illegible]}\,0} \text{[illegible]}_{ср} = \lim_{\Delta\text{[illegible]}\,0} \frac{\Delta\text{[illegible]}}{\Delta\text{[illegible]}}.$$

$$k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{сек} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{[illegible]} = \lim_{\Delta\text{[illegible]}\,0} \frac{\Delta\text{[illegible]}}{\Delta\text{[illegible]}}$$

$$\text{[illegible]} = \lim_{\Delta\text{[illegible]}\,0} \frac{\Delta\text{[illegible]}}{\Delta\text{[illegible]}}$$

1) Пусть y = f(x) определена в точке x и некоторой ее окрестности.
Производной функции y = f(x) в точке x называется предел отношения приращения функции Δy (**Δf**) в этой точке к приращению аргумента Δx, при стремлении приращения аргумента к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2) Обозначение. Производную функции y = f(x) обозначают f '(x), или y '(x), или y ' (говорят: «эф штрих от икс», «игрек штрих от икс»).

3) y ' = f '(x) – это новая функция, связанная с функцией y = f(x), определенная во всех точках, в которых существует указанный предел.

III. Определение производной

4) Если f(x) имеет производную в точке x, то функцию называют **дифференцируемой** в этой точке. Процесс нахождения производной называется **дифференцированием**.

5) Алгоритм вычисления производной f '(x)

1. Найти приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.
2. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
3. Найти предел этого отношения при $\Delta x \to 0$ (если этот предел существует).

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Примеры.

1. Дано: $\mathbf{y = kx + b}$.

Найти: **y '**.

Решение: (см. пример 6 из предыдущей лекции)

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$

2) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} k = k.$

$\boxed{(kx + b)' = k}$

2. Дано: $\mathbf{y = x^3}$.

Найти: **y '**.

Решение: (см. пример 5 из предыдущей лекции)

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$

2) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + \underset{0}{3x\Delta x} + \underset{0}{\Delta x^2}) = 3x^2$

$\boxed{(x^3)' = 3x^2}$

III. Определение производной

Пример 3. $(kx + b)' = k$

$(2x + 3)' = 2$
$(4x - 1)' = 4$
$(x + 5)' = 1$
$(3 - x)' = -1$
$(-2 - 5x)' = -5$

$(7x)' = 7$
$(-0{,}3x)' = -0{,}3$
$\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}$
$(x)' = 1$
$(-x)' = -1$

$(x)' = 1$
$(-x)' = -1$

5. Дано: $\mathbf{y = C}$.
Найти: $\mathbf{y'}$.
Решение: 1) Найдем Δy: $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$
$\Delta y = C - C = 0$

2) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$

$C' = 0$
$(2)' = 0$, $(-1{,}5)' = 0$

Пример 4.

4. Дано: $\mathbf{y = x^2}$.
Найти: $\mathbf{y'}$.
Решение: 1) Найдем Δy: $\Delta y = y_1 - y_0 = y(x+\Delta x) - y(x)$
$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 =$
$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x + \Delta x)$

2) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$

$(x^2)' = 2x$

6. Дано: $\mathbf{y} = \frac{1}{x}$.
Найти: $\mathbf{y'}$.
Решение: 1) Воспользуемся № 39.44 в (дом.)

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{1}{x(x+\Delta x)}\right) = -\frac{1}{x^2}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

III. Определение производной

7. Дано: $\mathbf{y = \sqrt{x}}$.

Найти: **y '**.

Решение: 1) Воспользуемся № 39.44 г (дом.)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

IV. Таблица производных

f (x)	C	x	kx + b		x^3	x^n			…
f '(x)	**0**	**1**	**k**	**2x**		nx^{n-1}			**…**