§4. Несобственные интегралы.

1. **Определение**. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ и задана функция $f:(a,b) \to [-\infty, +\infty]$. Допустим, что для каждого $\beta \in (a,b)$ существует интеграл Лебега

$$\int_a^\beta f(x)dx \in [-\infty, +\infty]. \tag{1}$$

Допустим еще, что существует предел

$$\lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)dx \in [-\infty, +\infty].$$

Тогда он называется *несобственным интегралом* (*Лебега*) *с особенностью на правом конце промежутка* (a,b) и обозначается $\int_a^{\to b} f(x)dx$.

Итак, по определению

$$\int_a^{\to b} f(x)dx = \lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)dx \tag{2}$$

если предел в правой части имеет смысл и существует (конечный или равный $+\infty$ или $-\infty$).

Если несобственный интеграл (2) существует и конечен, т.е. $\neq \pm\infty$, то говорят, что он *сходится*. Во всех остальных случаях говорят, что интеграл (2) *расходится*. В частности, если

$$\int_a^{\to b} f(x)dx = +\infty \text{ или } \int_a^{\to b} f(x)dx = -\infty,$$

то говорят, что интеграл (1) *расходится* к $+\infty$ и соотв. к $-\infty$.

Если для каждого $\alpha \in (a,b)$ существует интеграл Лебега

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx \in [-\infty, +\infty]$$

то *несобственный интеграл* (*Лебега*) *с особенностью на левом конце промежутка* (a,b) определяется равенством

$$\int_{\to a}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha \to a+0} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx. \qquad (2')$$

«Обычный» интеграл Лебега, который мы изучали до сих пор, в случае надобности будет называться «*собственным*». Если из контекста ясно, о каком интеграле – собственном или несобственном – идет речь, то вместо $\int_{a}^{\to b}$ или $\int_{\to a}^{b}$ пишут $\int_{a}^{b}$.

Теорема 1. *Если собственный интеграл Лебега*

$$\int_a^b f(x)dx \in [-\infty, +\infty] \tag{3}$$

существует, то оба несобственных интеграла

$$\int_a^{\to b} f(x)dx = \lim_{\beta \to b-0} \int_a^{\beta} f(x)dx, \quad \int_{\to a}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha \to a+0} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx \tag{4}$$

существуют и совпадают с интегралом (3).

Доказательство. Пусть последовательность $(\beta_n) \subset (a,b)$ возрастает и $\beta_n \to b$ при $n \to \infty$. Обозначим еще $\beta_0 = a$ По теореме о счетной аддитивности интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\beta_{n-1}}^{\beta_n} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\beta_{k-1}}^{\beta_k} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^{\beta_n} f(x)dx.$$

По определению Гейне заключаем, что предел $\lim\limits_{\beta \to b-0} \int_a^{\beta} f(x)dx$, т.е. интеграл $\int_a^{\to b} f(x)dx$ существует и равен интегралу $\int_a^b f(x)dx$.

Первое из равенств (4) доказано. Второе доказывается аналогично. □

На несобственные интегралы вида (2) и (2′) переносятся многие свойства собственных интегралов.

Доказательства стандартны: Записывается соответствующее соотношение для собственного интеграла по отрезку (a,β) и затем производится предельный переход при $\beta \to b-0$.

Приведем некоторые из этих свойств.

(а) (Линейность несобственного интеграла). *Если несобственные интегралы*

$$\int_a^{\to b} f(x)\,dx, \quad \int_a^{\to b} g(x)\,dx$$

сходятся и $\alpha, \beta \in R$, *то несобственный интеграл*

$$\int_a^{\to b} [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx$$

сходится и справедливо равенство

$$\int_a^{\to b} [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^{\to b} f(x)\,dx + \beta \int_a^{\to b} g(x)\,dx. \tag{3}$$

Действительно, для каждого $\gamma \in (a,b)$ имеем

$$\int_a^{\gamma} [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^{\gamma} f(x)\,dx + \beta \int_a^{\gamma} g(x)\,dx. \tag{4}$$

Переходя здесь к пределу при $\gamma \to b-0$, получим равенство (3). □

(b) (Аддитивность несобственного интеграла). *Пусть* $c\in(a,b)$ *и для каждого* $\beta\in(a,b)$ *сходится* (*т.е. существует и конечен*) *интеграл Лебега* (1). *Если один из несобственных интегралов*

$$\int_a^{\to b} f(x)dx \text{ и } \int_c^{\to b} f(x)dx \tag{5}$$

существует, то существует другой и справедливо равенство

$$\int_a^{\to b} f(x)\,dx = \int_a^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\to b} f(x)\,dx. \tag{6}$$

Доказательство. Из существования интегралов (1), следует, что для всех $\gamma\in(c,b)$ существуют также интегралы

$$\int_c^{\gamma} f(x)\,dx \in [-\infty, +\infty].$$

Поэтому имеет смысл говорить также и об интеграле $\int_a^{\to b} f(x)dx$ об интеграле $\int_c^{\to b} f(x)dx$. По теореме о (счетной) аддитивности интеграла для каждого $\gamma\in(c,b)$ имеем

$$\int_a^{\gamma} f(x)dx = \int_a^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\gamma} f(x)\,dx. \tag{*}$$

По условию все интегралы (1) конечны. В частности, конечен интеграл $\int\limits_a^c f(x)\,dx$. Поэтому из предыдущего равенства следует, что справедливо также равенство

$$\int\limits_c^\gamma f(x)\,dx = \int\limits_a^\gamma f(x)\,dx - \int\limits_a^c f(x)\,dx. \qquad (**)$$

Если существует второй из интегралов (5), то переходя в равенстве (**) к пределу при $\gamma \to b-0$, получим, что существует второй интеграл также существует и справедливо равенство (6).

Если существует же существует первый из интегралов (5), то переходя в равенстве (**) к пределу при $\gamma \to b-0$, получим, что существует и второй интеграл. □

Замечание. В равенстве (6) один из несобственных интегралов может иметь бесконечное значение. В этом случае другой несобственный интеграл имеет то же значение. Однако собственный интеграл $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ в правой части должен быть конечным. Иначе из существования левого несобственного интеграла не вытекает даже существование правой части.

Рассмотрим, например, функцию $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ при $x > 0$. Для нее

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = +\infty \text{ и } \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty,$$

так что правая часть в равенстве

$$\int\limits_0^{\to+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx - \int\limits_1^{\to+\infty} f(x)\,dx \qquad (+)$$

не имеет смысла. Но с другой стороны,

$$\int\limits_0^{\to+\infty} f(x)\,dx = +\infty, \text{ так как } \int\limits_0^{\gamma} f(x)\,dx = +\infty \text{ для любого } \gamma > 0.$$

Отметим, что в этом случае собственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ не существует, так как

$$\int\limits_0^{+\infty} f^+(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1-x}{x}\,dx = +\infty \text{ и } \int\limits_0^{+\infty} f^-(x)\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x-1}{x}\,dx = +\infty.$$

Если в равенстве (+) взять функцию $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$, то интеграл $\int\limits_0^{\to+\infty} f(x)\,dx$ снова существует и равен $+\infty$, а несобственный интеграл $\int\limits_1^{\to+\infty} f(x)\,dx$ вообще не существует.

(c) (Формула Ньютона – Лейбница). *Пусть* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, *функция* $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ *непрерывна и* $F:[a,b) \to \mathbb{R}$ *– первообразная для функции* f. *Если в равенстве*

$$\int\limits_a^{\to b} f(x)\,dx = F(b-0) - F(a)$$

имеет смысл одна часть, то имеет смысл другая часть и это равенство справедливо.

Аналогичный факт имеет место и для интеграла $\int\limits_{\to a}^{b} f(x)\,dx$.

(e) (Замена переменного). *Пусть* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, $-\infty < \alpha < \beta \leqslant +\infty$ *и – возрастающая биекция, причем обе биекции* $\varphi:[a,b) \to [\alpha,\beta)$ $\varphi:[a,b) \to [\alpha,\beta)$ *и* $\varphi:[a,b) \to [\alpha,\beta)$ *непрерывно дифференцируемы. Если в равенстве*

$$\int\limits_a^{\to b} f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^{\to \beta} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

один из несобственных интегралов сходится, то сходится другой и равенство справедливо.

(Аналогичный факт для убывающей биекции, два факта – для $\int\limits_{\to a}^{b} f(x)\,dx$.)

(e) (Правило интегрирования по частям). Сформулировать и доказать самостоятельно.

(f) *Если несобственный интеграл* $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ *сходится и функция* $f:(a,b)\to R$ *неотрицательна, то существует собственный интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$.

2. Пример. Рассмотрим интеграл (см. рис. 1)

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{7}$$

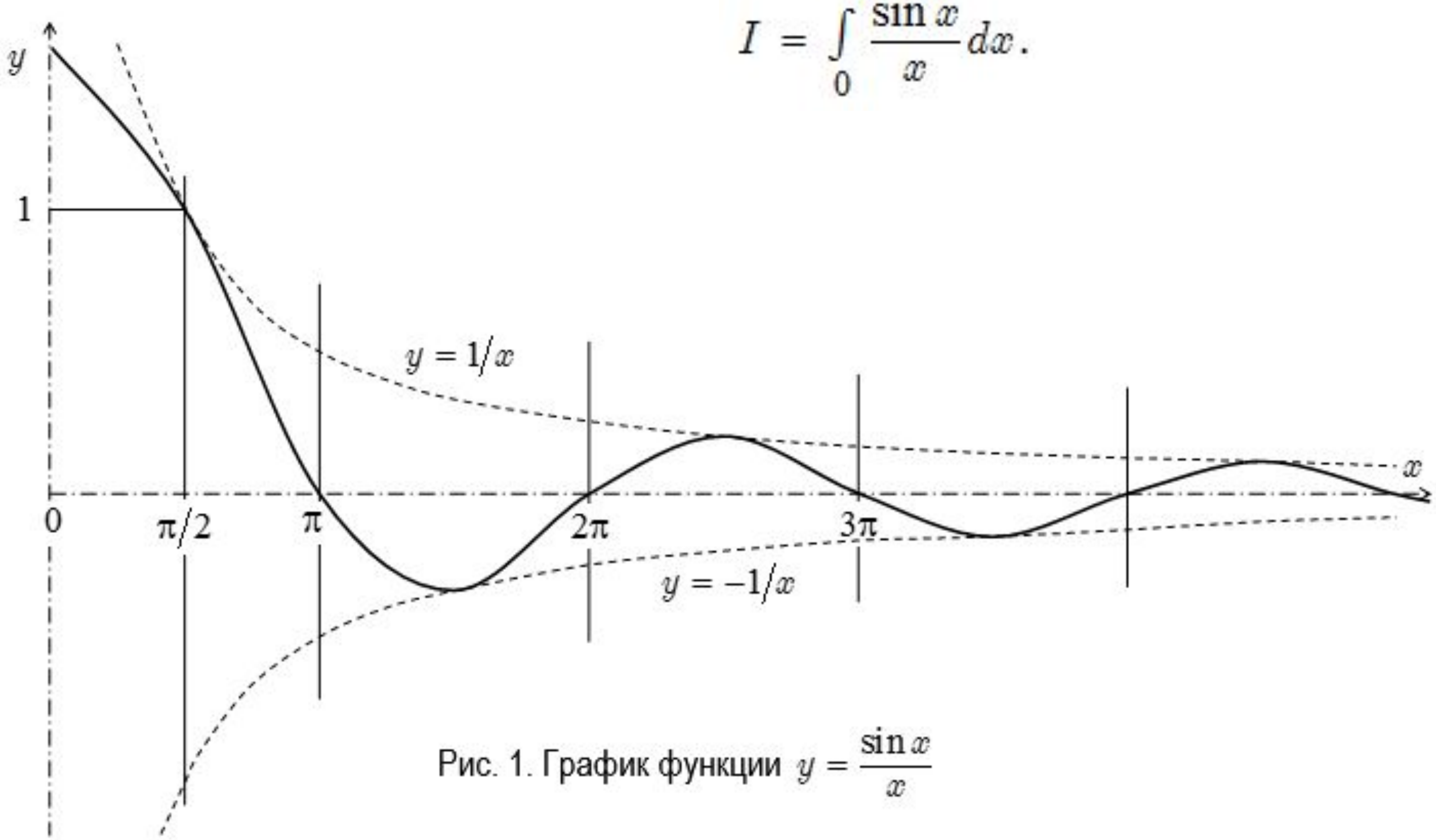

Рис. 1. График функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$

По определению собственного интеграла

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x}\right]^+ dx - \int\limits_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x}\right]^- dx. \tag{7'}$$

Для каждого $k \in R$ имеем

$$\int\limits_{k\pi-\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geqslant \int\limits_{k\pi-\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi} dx = \frac{1}{k\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{2}{k\pi}.$$

Отсюда и из теоремы о счетной аддитивности интеграла следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x}\right]^+ dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin x}{x} dx \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \geqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty,$$

так как гармонический ряд расходится. Таким образом,

$$\int\limits_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x}\right]^+ dx = +\infty \text{ и аналогично } \int\limits_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x}\right]^- dx = +\infty.$$

Поэтому как собственный интеграл (7) не существует.

Докажем, что как несобственный этот интеграл сходится. Заметим, что подынтегральная функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ на полуоси $(0, +\infty)$ непрерывна и ограниченна. Следовательно, она суммируема на любом интервале $(0, \beta), \beta > 0$, и поэтому имеет смысл говорить об интеграле (7) в несобственном смысле.

Поскольку функция f суммируема на интервале $(0, \pi)$, то согласно свойству (b) для доказательства сходимости интеграла (7) как несобственного достаточно доказать, что сходится интеграл

$$I_1 = \int_{\pi}^{\to +\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Фиксируем произвольное β, $\pi < \beta < \infty$. Интегрируя по частям, имеем

$$\int_{\pi}^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx = -\int_{\pi}^{\beta} \frac{1}{x} d(\cos x) = -\frac{\cos x}{x}\Big|_{x=\pi}^{x=\beta} - \int_{\pi}^{\beta} \cos x \frac{dx}{x^2}.$$

Следовательно,

$$I_1 = \int_{\pi}^{\to +\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_{\pi}^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx =$$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} \left(-\frac{\cos x}{x}\Big|_{x=\pi}^{x=\beta} \right) - \lim_{\beta \to +\infty} \int_{\pi}^{\beta} \cos x \frac{dx}{x^2} \Bigg) = -\frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{+\infty} \cos x \frac{dx}{x^2}. \qquad (8)$$

Поскольку $|\cos x| \leqslant 1$ для всех $x \in R$ и

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \to +\infty} \int\limits_{\pi}^{\beta} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \Big|_{x=\pi}^{x=\beta} \right) = \frac{1}{\pi} - \lim_{\beta \to +\infty} \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi},$$

то ясно, что интегралы

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ и } \int\limits_{\pi}^{+\infty} |\cos x| \frac{dx}{x^2}, \text{ а значит, и } \int\limits_{\pi}^{+\infty} \cos x \frac{dx}{x^2}$$

существуют и конечны как собственные интегралы Лебега. Отсюда и из равенства (8) следует, что несобственный интеграл (7) сходится.

3. Пример. Пусть график функции $f:[0,+\infty) \to R$ – ломаная с вершинами (см. рис 2).

$$(n-1, 0) \text{ и } \left(n - \frac{1}{2}, (-1)^n \frac{1}{n} \right),\ n \in \mathbb{N}.$$

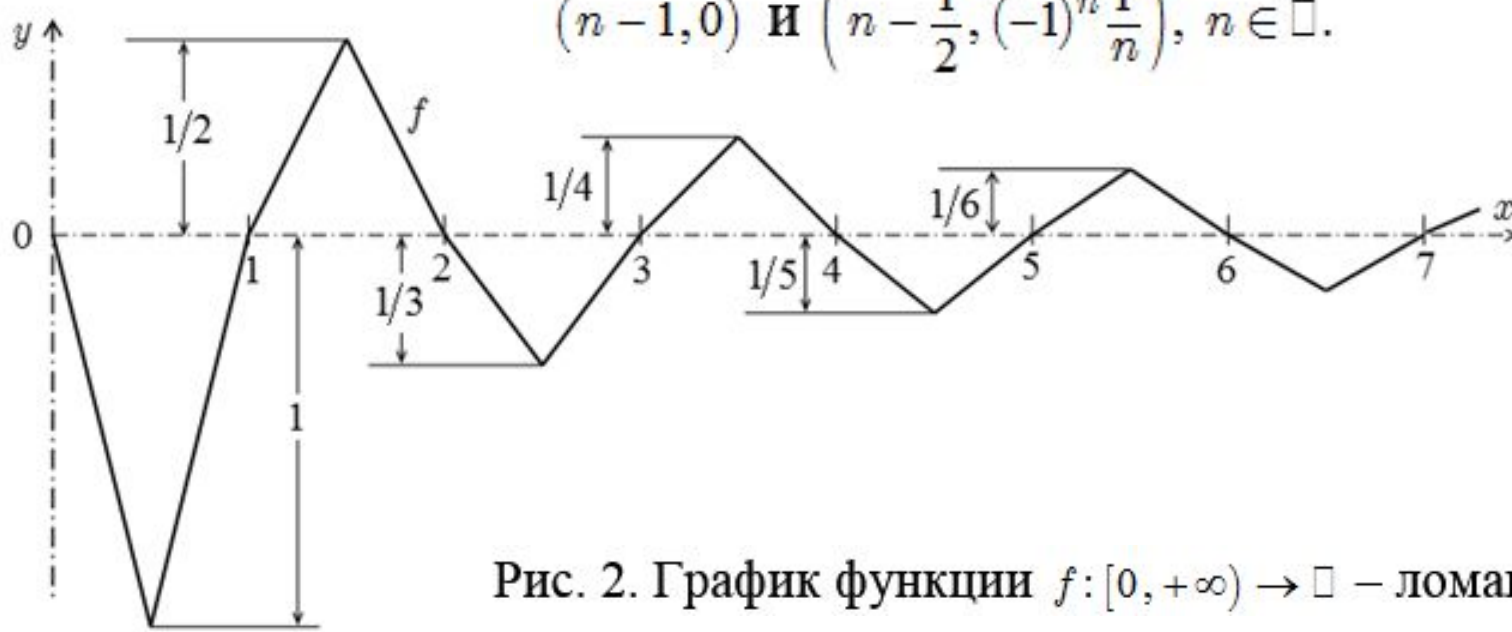

Рис. 2. График функции $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ – ломаная линия.

В этом случае

$$\int_0^{+\infty} f^+(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots\right) = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\right) = +\infty,$$

$$\int_0^{+\infty} f^-(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots\right) = +\infty.$$

Поэтому собственный интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ не существует. Но как несобственный этот интеграл сходится:

$$\int_0^{\to+\infty} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \ldots + \int_0^n f(x)dx\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\ldots+(-1)\frac{1}{2n}\right) = -\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right) = -\ln 2$$

(последнее равенство мы вывели из 2-й теоремы Абеля).

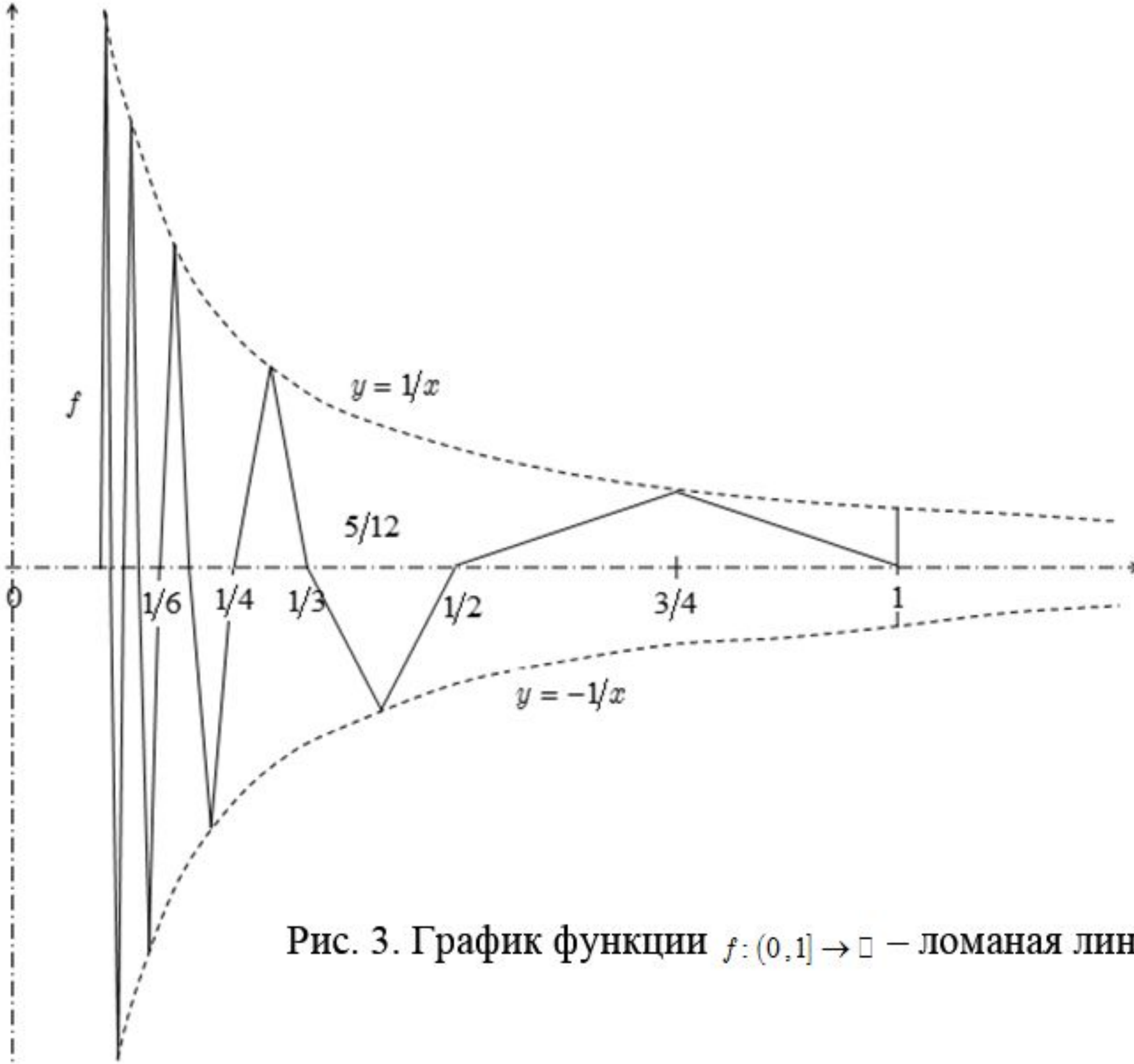

Рис. 3. График функции $f:(0,1]\to\square$ – ломаная линия

4. Пример. Пусть график функции $f:(0,1]\to R$ – ломаная с вершинами

$$(1,0),\ \left(\frac{3}{4},\frac{4}{3}\right),\ \left(\frac{1}{2},0\right),\ \left(\frac{5}{12},-\frac{12}{5}\right),\ \left(\frac{1}{3},0\right),\ \left(\frac{7}{12},\frac{12}{7}\right),\ \left(\frac{1}{4},0\right),\ \left(\frac{9}{40},-\frac{40}{9}\right),\ \left(\frac{1}{5},0\right),\ \left(\frac{13}{84},\frac{84}{13}\right),\ \ldots,$$

лежащими на оси абсцисс и на графиках функций $y=\pm 1/x$, см. рис. 2. Аналогично предыдущему нетрудно доказать, что, что собственный интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ не существует, однако

$$\int\limits_{\to 0}^{1} f(x)\,dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{-1}\frac{1}{2n+1}\in\left(\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right).$$

5. Замечание. Иногда приходится рассматривать интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, в котором подынтегральная функция имеет несколько особенностей. Тогда промежуток (a,b) разбивают на несколько частей точками $a=a_0<a_1<\ldots a_n=b$ так, чтобы в каждом интеграле $\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx$ была только одна особенность – на правом или на левом конце, и полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx.$$

Если в этой сумме все слагаемый конечны, то проблем обычно не возникает (хотя слагаемые правой части не всегда можно считать собственными). Но если имеются слагаемые, равные $\pm\infty$, да еще разных знаков, то дело обычно плохо. Впрочем и в этом случае иногда применяют какие-либо методы регуляризации интегралов, например, полагают

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_{-\beta}^{+\beta} f(x)\,dx$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\,dx \right]$$

(*главное значение интеграла в смысле Коши*). Но теперь уже трудно применять мощные средства, установленные для собственных интегралов.