

§4. Несобственные интегралы.

1. **Определение.** Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ и задана функция $f : (a, b) \rightarrow [-\infty, +\infty]$.

Допустим, что для каждого $\beta \in (a, b)$ существует интеграл Лебега

$$\int_a^{\beta} f(x) dx \in [-\infty, +\infty]. \quad (1)$$

Допустим еще, что существует предел

$$\lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^{\beta} f(x) dx \in [-\infty, +\infty].$$

Тогда он называется *несобственным интегралом (Лебега) с особенностью*

на правом конце промежутка (a, b) и обозначается $\int_a^b f(x) dx$.

Итак, по определению

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^{\beta} f(x) dx \quad (2)$$

если предел в правой части имеет смысл и существует (конечный или равный $+\infty$ или $-\infty$).

Если несобственный интеграл (2) существует и конечен, т.е. $\neq \pm\infty$, то говорят, что он *сходится*. Во всех остальных случаях говорят, что интеграл (2) *расходится*. В частности, если $\int_a^b f(x) dx = +\infty$ или $\int_a^b f(x) dx = -\infty$,

то говорят, что интеграл (1) *расходится* к $+\infty$ и соотв. к $-\infty$.

Если для каждого $\alpha \in (a, b)$ существует интеграл Лебега

$$\int_a^b f(x) dx \in [-\infty, +\infty]$$

то *несобственный интеграл (Лебега) с особенностью на левом конце промежутка (a, b)* определяется равенством

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_\alpha^b f(x) dx. \quad (2')$$

«Обычный» интеграл Лебега, который мы изучали до сих пор, в случае надобности будет называться «*собственным*». Если из контекста ясно, о каком интеграле – собственном или несобственном – идет речь, то вместо \int_a^b или $\int_{\rightarrow a}^b$ пишут \int_a^b .

Теорема 1. Если собственный интеграл Лебега

$$\int_a^b f(x)dx \in [-\infty, +\infty] \quad (3)$$

существует, то оба несобственных интеграла

$$\int_a^{\rightarrow b} f(x)dx = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^{\beta} f(x)dx, \quad \int_{\rightarrow a}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow a+0} \int_a^b f(x)dx \quad (4)$$

существуют и совпадают с интегралом (3).

Доказательство. Пусть последовательность $(\beta_n) \subset (a, b)$ возрастает и $\beta_n \rightarrow b$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим еще $\beta_0 = a$. По теореме о счетной аддитивности интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\beta_{n-1}}^{\beta_n} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\beta_{k-1}}^{\beta_k} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{\beta_n} f(x)dx.$$

По определению Гейне заключаем, что предел $\lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^{\beta} f(x)dx$, т.е. интеграл

$$\int_a^{\rightarrow b} f(x)dx \text{ существует и равен интегралу } \int_a^b f(x)dx.$$

Первое из равенств (4) доказано. Второе доказывается аналогично. \square

На несобственные интегралы вида (2) и (2') переносятся многие свойства собственных интегралов.

Доказательства стандартны: Записывается соответствующее соотношение для собственного интеграла по отрезку (a, β) и затем производится предельный переход при $\beta \rightarrow b - 0$.

Приведем некоторые из этих свойств.

(а) (Линейность несобственного интеграла). *Если несобственные интегралы*

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b g(x) dx$$

сходятся и $\alpha, \beta \in R$, то несобственный интеграл

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx$$

сходится и справедливо равенство

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \quad (3)$$

Действительно, для каждого $\gamma \in (a, b)$ имеем

$$\int_a^\gamma [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^\gamma f(x) dx + \beta \int_a^\gamma g(x) dx. \quad (4)$$

Переходя здесь к пределу при $\gamma \rightarrow b - 0$, получим равенство (3). \square

(б) (Аддитивность несобственного интеграла). Пусть $c \in (a, b)$ и для каждого $\beta \in (a, b)$ сходится (т.е. существует и конечен) интеграл Лебега (1). Если один из несобственных интегралов

$$\int_a^b f(x) dx \text{ и } \int_c^b f(x) dx \quad (5)$$

существует, то существует другой и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (6)$$

Доказательство. Из существования интегралов (1), следует, что для всех $\gamma \in (c, b)$ существуют также интегралы

$$\int_c^\gamma f(x) dx \in [-\infty, +\infty].$$

Поэтому имеет смысл говорить также и об интеграле $\int_a^b f(x) dx$ об интеграле $\int_c^b f(x) dx$. По теореме о (счетной) аддитивности интеграла для каждого $\gamma \in (c, b)$ имеем

$$\int_a^\gamma f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^\gamma f(x) dx. \quad (*)$$

По условию все интегралы (1) конечны. В частности, конечен интеграл $\int_a^c f(x) dx$.

Поэтому из предыдущего равенства следует, что справедливо также равенство

$$\int_c^\gamma f(x) dx = \int_a^\gamma f(x) dx - \int_a^c f(x) dx. \quad (**)$$

Если существует второй из интегралов (5), то переходя в равенстве (**) к пределу при $\gamma \rightarrow b^-0$, получим, что существует второй интеграл также существует и справедливо равенство (6).

Если существует же существует первый из интегралов (5), то переходя в равенстве (**) к пределу при $\gamma \rightarrow b^-0$, получим, что существует и второй интеграл. \square

Замечание. В равенстве (6) один из несобственных интегралов может иметь бесконечное значение. В этом случае другой несобственный интеграл имеет то же значение. Однако собственный интеграл $\int_a^c f(x) dx$ в правой части должен быть конечным. Иначе из существования левого несобственного интеграла не вытекает даже существование правой части.

Рассмотрим, например, функцию $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ при $x > 0$. Для нее

$$\int_0^1 f(x) dx = +\infty \text{ и } \int_1^{+\infty} f(x) dx = -\infty,$$

так что правая часть в равенстве

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^{+\infty} f(x) dx \quad (+)$$

не имеет смысла. Но с другой стороны,

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty, \text{ так как } \int_0^\gamma f(x) dx = +\infty \text{ для любого } \gamma > 0.$$

Отметим, что в этом случае собственный интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ не существует,

так как

$$\int_0^{+\infty} f^+(x) dx = \int_0^1 \frac{1-x}{x} dx = +\infty \text{ и } \int_0^{+\infty} f^-(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x} dx = +\infty.$$

Если в равенстве (+) взять функцию $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$, то интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$

снова существует и равен $+\infty$, а несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ вообще не существует.

(с) (Формула Ньютона – Лейбница). Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$, функция $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывна и $F:[a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ – первообразная для функции f . Если в равенстве

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

имеет смысл одна часть, то имеет смысл другая часть и это равенство справедливо.

Аналогичный факт имеет место и для интеграла $\int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} f(x) dx$.

(е) (Замена переменного). Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$, $-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$ и – возрастающая биекция, причем обе биекции $\phi:[a,b] \rightarrow [\alpha,\beta]$ $\phi:[a,b] \rightarrow [\alpha,\beta]$ и $\phi:[a,b] \rightarrow [\alpha,\beta]$ непрерывно дифференцируемы. Если в равенстве

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\phi(t)] \phi'(t) dt$$

один из несобственных интегралов сходится, то сходится другой и равенство справедливо.

(Аналогичный факт для убывающей биекции, два факта – для $\int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} f(x) dx$.)

(e) (Правило интегрирования по частям). Сформулировать и доказать самостоятельно.

(f) Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится и функция $f:(a,b) \rightarrow R$

неотрицательна, то существует собственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

2. Пример. Рассмотрим интеграл (см. рис. 1)

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (7)$$

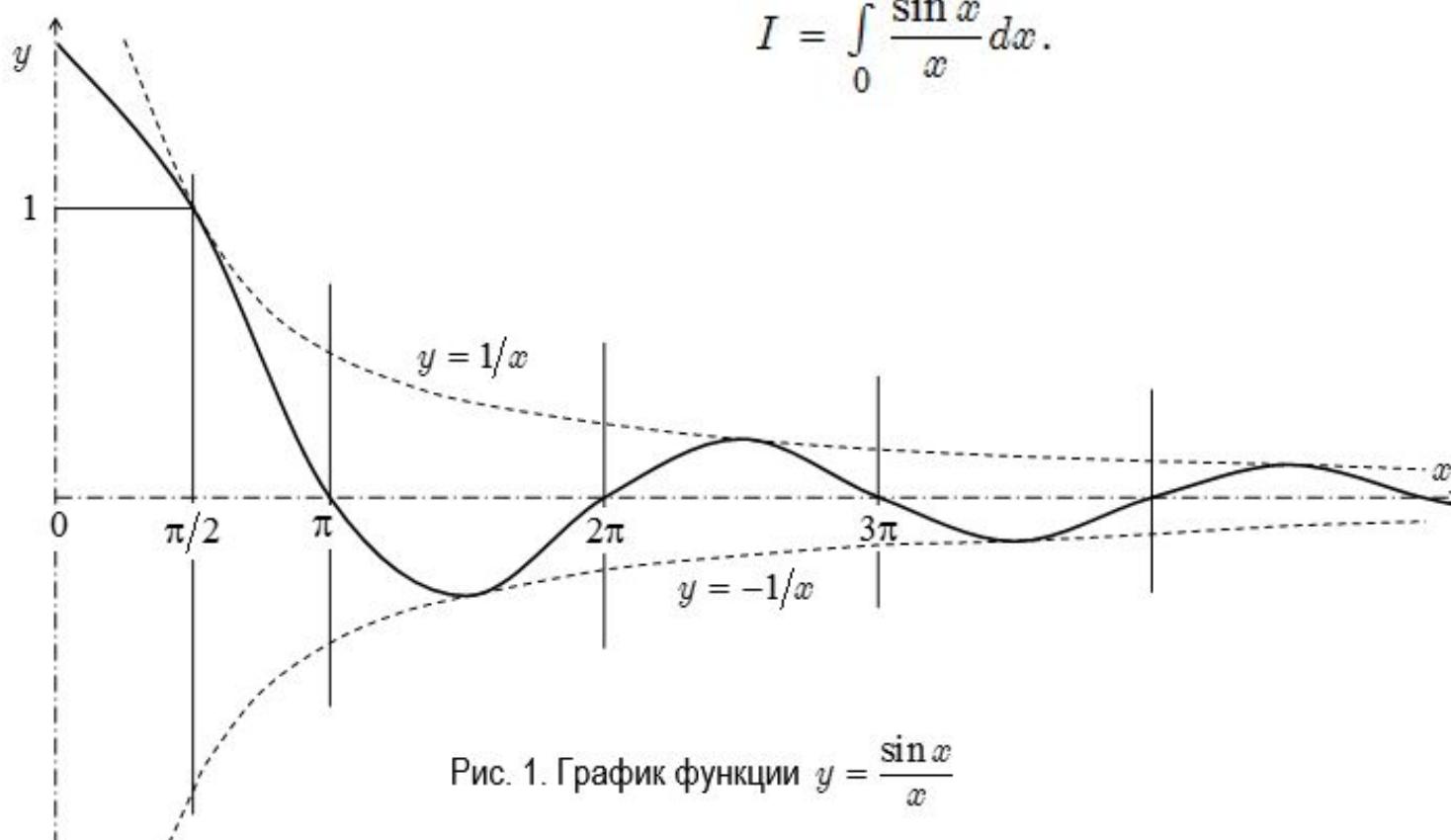


Рис. 1. График функции $y = \frac{\sin x}{x}$

По определению собственного интеграла

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x} \right]^+ dx - \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x} \right]^- dx. \quad (7')$$

Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\int_{k\pi-\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \int_{k\pi-\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi} dx = \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{k\pi}.$$

Отсюда и из теоремы о счетной аддитивности интеграла следует, что

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x} \right]^+ dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty,$$

так как гармонический ряд расходится. Таким образом,

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x} \right]^+ dx = +\infty \text{ и аналогично } \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x} \right]^- dx = +\infty.$$

Поэтому как собственный интеграл (7) не существует.

Докажем, что как несобственный этот интеграл сходится. Заметим, что подынтегральная функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ на полуоси $(0, +\infty)$ непрерывна и ограничена. Следовательно, она суммируема на любом интервале $(0, \beta)$, $\beta > 0$, и поэтому имеет смысл говорить об интеграле (7) в несобственном смысле.

Поскольку функция f суммируема на интервале $(0, \pi)$, то согласно свойству (b) для доказательства сходимости интеграла (7) как несобственного достаточно доказать, что сходится интеграл

$$I_1 = \int_{\pi}^{\rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Фиксируем произвольное β , $\pi < \beta < \infty$. Интегрируя по частям, имеем

$$\int_{\pi}^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx = - \int_{\pi}^{\beta} \frac{1}{x} d(\cos x) = - \frac{\cos x}{x} \Big|_{x=\pi}^{x=\beta} - \int_{\pi}^{\beta} \cos x \frac{dx}{x^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\pi}^{\rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^{\beta} \frac{\sin x}{x} dx = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(- \frac{\cos x}{x} \Big|_{x=\pi}^{x=\beta} - \int_{\pi}^{\beta} \cos x \frac{dx}{x^2} \right) = -\frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{+\infty} \cos x \frac{dx}{x^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку $|\cos x| \leq 1$ для всех $x \in R$ и

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^{\beta} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \Big|_{x=\pi}^{x=\beta} \right) = \frac{1}{\pi} - \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\pi},$$

то ясно, что интегралы

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ и } \int_{\pi}^{+\infty} |\cos x| \frac{dx}{x^2}, \text{ а значит, и } \int_{\pi}^{+\infty} \cos x \frac{dx}{x^2}$$

существуют и конечны как собственные интегралы Лебега. Отсюда и из равенства (8) следует, что несобственный интеграл (7) сходится.

3. Пример. Пусть график функции $f: [0, +\infty) \rightarrow R$ – ломаная с вершинами (см. рис 2).

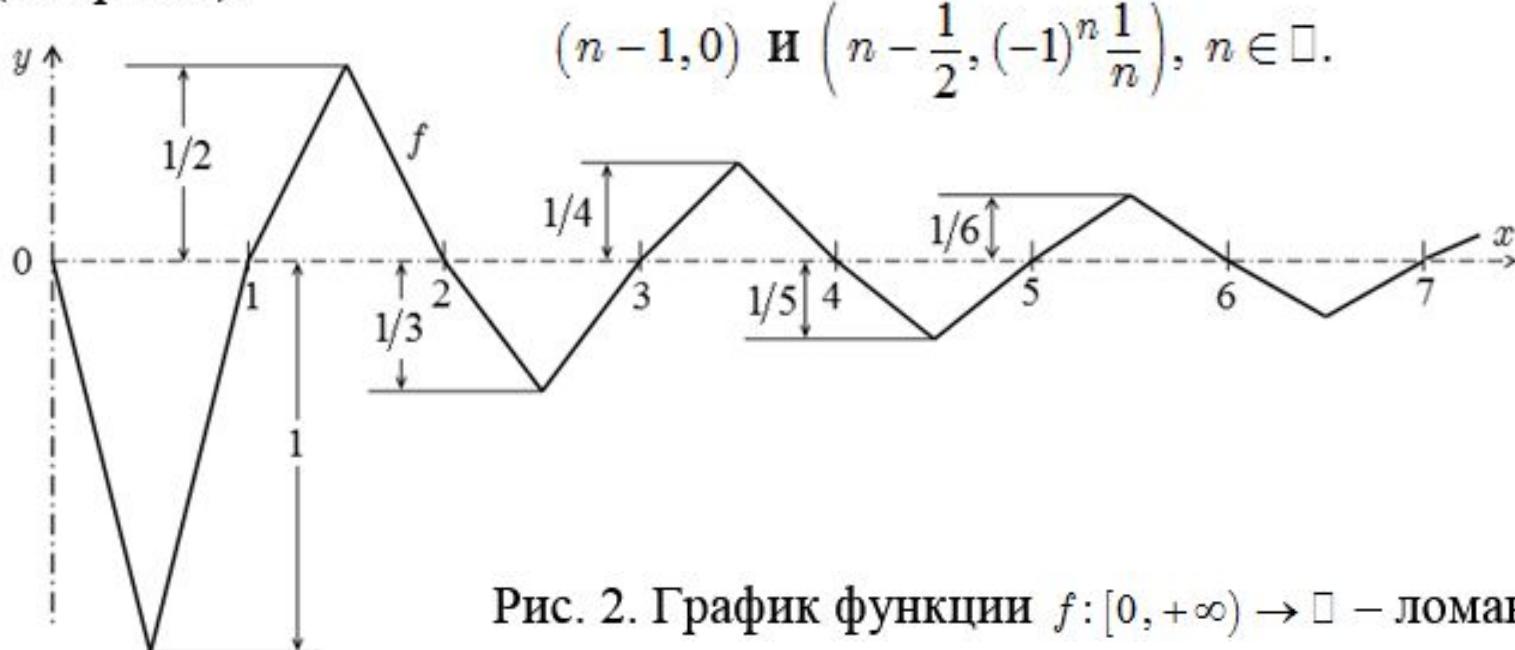


Рис. 2. График функции $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – ломаная линия.

В этом случае

$$\int_0^{+\infty} f^+(x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots \right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) = +\infty,$$

$$\int_0^{+\infty} f^-(x) dx = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \right) = +\infty.$$

Поэтому собственный интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ не существует. Но как несобственный этот интеграл сходится:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_0^n f(x) dx \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \dots + (-1) \frac{1}{2n} \right) = -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = -\ln 2 \end{aligned}$$

(последнее равенство мы вывели из 2-й теоремы Абеля).

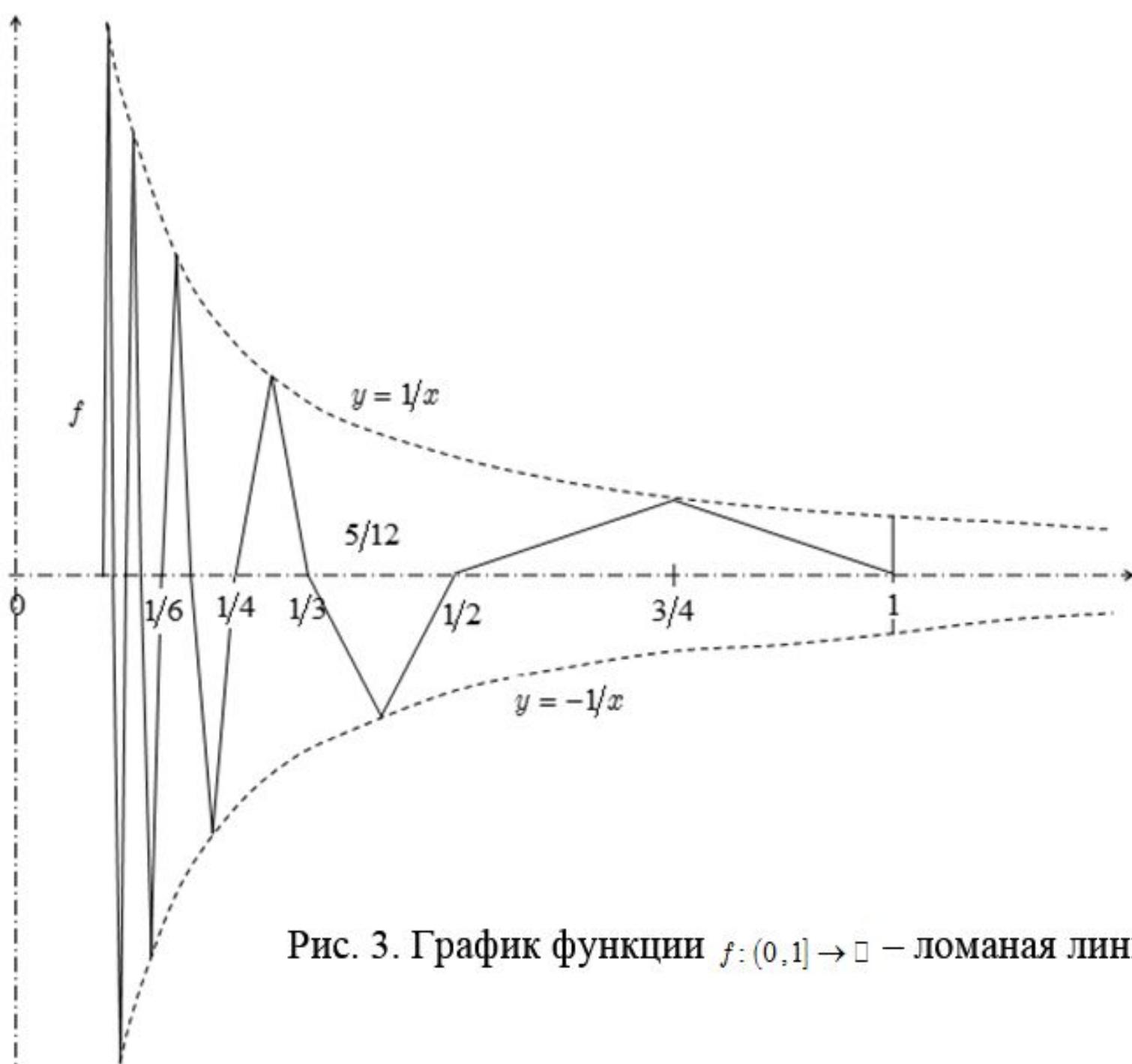


Рис. 3. График функции $f: (0,1] \rightarrow \square$ — ломаная линия

4. Пример. Пусть график функции $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – ломаная с вершинами

$$(1, 0), \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{5}{12}, -\frac{12}{5}\right), \left(\frac{1}{3}, 0\right), \left(\frac{7}{12}, \frac{12}{7}\right), \left(\frac{1}{4}, 0\right), \left(\frac{9}{40}, -\frac{40}{9}\right), \left(\frac{1}{5}, 0\right), \left(\frac{13}{84}, \frac{84}{13}\right), \dots,$$

лежащими на оси абсцисс и на графиках функций $y = \pm 1/x$, см. рис. 2. Аналогично предыдущему нетрудно доказать, что, что собственный интеграл $\int_0^1 f(x) dx$ не существует, однако

$$\int_{\rightarrow 0}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n+1} \in \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right).$$

5. Замечание. Иногда приходится рассматривать интеграл $\int_a^b f(x) dx$, в

котором подынтегральная функция имеет несколько особенностей. Тогда промежуток (a, b) разбивают на несколько частей точками $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$

так, чтобы в каждом интеграле $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx$ была только одна особенность – на

правом или на левом конце, и полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx.$$

Если в этой сумме все слагаемый конечны, то проблем обычно не возникает (хотя слагаемые правой части не всегда можно считать собственными). Но если имеются слагаемые, равные $\pm\infty$, да еще разных знаков, то дело обычно плохо. Впрочем и в этом случае иногда применяют какие-либо методы регуляризации интегралов, например, полагают

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{-\beta}^{+\beta} f(x) dx$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x) dx \right]$$

(главное значение интеграла в смысле Коши). Но теперь уже трудно применять мощные средства, установленные для собственных интегралов.