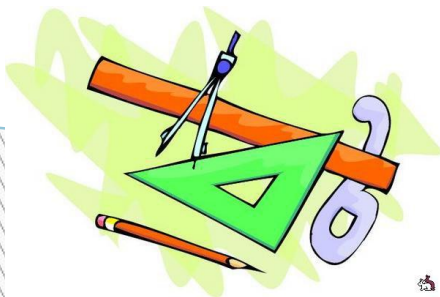


# Эквивалентные преобразования матриц. Ранг матрицы.

Лекция



Преподаватель математики  
Абибуллаева А.С.

# Эквивалентные преобразования

1

умножение строки на ненулевое число



2

перестановка двух строк



3

прибавление к одной строке матрицы другой ее строки, умноженной на некоторое ненулевое число



4

вычеркивание нулевой строки



5

при транспонировании матрицы



**Эквивалентные преобразования еще называют элементарными.**

Две матрицы называются эквивалентными,

если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается:  $A \sim B$ .

употребляются знаки:  $\sim$ ;  $\Leftrightarrow$  ;  $\leftrightarrow$

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы матрицы равны нулю. Такую матрицу называют канонической.

# Рассмотрим пример эквивалентных преобразований

Пусть задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

1) **Умножим первую строку** матрицы на два, то есть каждый элемент первой строки умножаем на двойку

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & & 2 & & 2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

Получили матрицу  $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  такую, что  $A \Leftrightarrow B$

# эквивалентные преобразования

Пусть задана матрица

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

2) Поменяем первую и вторую строки матрицы местами

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Получили матрицу  $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$  такую, что  $B \Leftrightarrow C$

# эквивалентные преобразования

Пусть задана матрица  $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

3) От первой строки матрицы отнимем вторую строку, получаем эквивалентную матрицу D

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow D = \begin{pmatrix} 3-2 & 2-6 & 2-6 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

Получили матрицу  $D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$  такую, что  $C \Leftrightarrow D$

# эквивалентные преобразования

Пусть задана матрица  $D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

4) Проведём транспонирование матрицы  $D$ , получаем эквивалентную матрицу  $F$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \Leftrightarrow F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 6 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

**Вывод:** Матрицы  $A \Leftrightarrow F$ ,  
так как от одной из них перешли к другой при помощи эквивалентных преобразований над строками.

<b>№</b>	<b>Преобразование</b>	<b>Характеристика изменения</b>
1	Транспонирование матрицы	Определитель не меняется
2	Перестановка двух строк (столбцов)	Определитель меняет знак
3	Сложение одной строки с другой строкой, умноженной на число	Определитель не меняется
4	Умножение одной строки на число	Определитель умножается на это число
5	Вычеркивание нулевой строки	Меняется размер матрицы



# Определение:

Ранг матрицы равен числу ненулевых строк матрицы, приведенной к треугольному виду.

Обозначают  $\text{rang}(A)$  или  $r(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+I} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+\text{II} \times (-2)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Ответ:  $\text{rang}(A)=2$

## Свойства ранга матрицы:

- При транспонировании ранг матрицы не меняется.
- Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
- Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

# Метод элементарных преобразований

**Задание.**

Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 4 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

**Решение.**

Шаг 1. Из третьей строчки вычтем вторую, умножив её на число два ( преобразование 3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 4 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 4 \\ 10-4 \cdot 2 & 18-8 \cdot 2 & 40-18 \cdot 2 & 17-7 \cdot 2 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Шаг 2. От второй строки отнимаем четвертую, умноженную на число четыре ( преобразование 3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4-1 \cdot 4 & 8-7 \cdot 4 & 18-17 \cdot 4 & 4-3 \cdot 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Шаг 3. От третьей строки отнимаем четвертую, умноженную на число два ( преобразование 3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 2-1 \cdot 2 & 2-7 \cdot 2 & 4-17 \cdot 2 & 3-3 \cdot 2 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Шаг 4. К второй строки прибавим первую, умноженную на число пять ( преобразование 3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0-0 \ 5 & -20+4 \ 5 & -50+10 \ 5 & -5+1 \ 5 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Шаг 5. К третьей строки прибавим первую, умноженную на число три ( преобразование 3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0+0 \ 3 & -12+4 \ 3 & -30+10 \ 3 & -3+1 \ 3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Шаг 6. Меняем местами первую и вторую строки.  
 Далее четвертую и первую строки

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

С помощью элементарных преобразований над строками матрицу A привели к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 4} \rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

**Ответ:** rang (A) = 2

# Пример вычисления ранга матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 2 \\ + \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : 2 \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 11 \\ + \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times (-5) \\ + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r = \text{rang } A = 2;$$