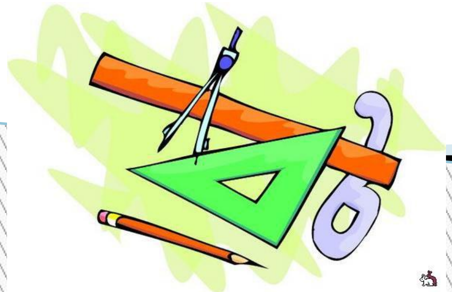
Эквивалентные преобразования матриц. Ранг матрицы.

Лекция



Преподаватель математики
Абибуллаева А.С.

Эквивалентные преобразования

1. умножение строки на ненулевое число
2. перестановка двух строк
3. прибавление к одной строке матрицы другой ее строки, умноженной на некоторое ненулевое число
4. вычеркивание нулевой строки
5. при транспонировании матрицы

Эквивалентные преобразования еще называют элементарными.

Две матрицы называются *эквивалентными*,

если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Записывается: A~B.

употребляется знаки: ~; ⇔ ; ↔

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы матрицы равны нулю. Такую матрицу называют *канонической*.

Рассмотрим пример эквивалентных преобразований

Пусть задана матраца $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

1) **Умножим первую строку** матрицы на два, то есть каждый элемент первой строки умножаем на двойку

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} 1\ 2 & 3\ 2 & 3\ 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

Получили матрицу $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ такую, что $A \Leftrightarrow B$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ 1

эквивалентные преобразования

Пусть задана матраца $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

2) **Поменяем первую и вторую** строки матрицы местами

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Получили матрицу $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ такую, что $B \Leftrightarrow C$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ 2

эквивалентные преобразования

Пусть задана матраца $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

3) **От первой строки матрицы отнимем вторую строку**, получаем эквивалентную матрицу D

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow D = \begin{pmatrix} 3-2 & 2-6 & 2-6 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Получили матрицу $D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ такую, что $C \Leftrightarrow D$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ 3

эквивалентные преобразования

Пусть задана матраца $D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

4) **Проведём транспонирование матрицы** D, получаем эквивалентную матрицу F

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \Leftrightarrow F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 6 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

Вывод: Матрицы **A ⇔ F** ,

так как от одной из них перешли к другой при помощи эквивалентных преобразований над строками.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ 4

№	Преобразование	Характеристика изменения
1	Транспонирование матрицы	Определитель не меняется
2	Перестановка двух строк (столбцов)	Определитель меняет знак
3	Сложение одной строки с другой строкой, умноженной на число	Определитель не меняется
4	Умножение одной строки на число	Определитель умножается на это число
5	Вычеркивание нулевой строки	Меняется размер матрицы

Определение:

Ранг матрицы равен числу ненулевых строк матрицы, приведенной к треугольному виду.

Обозначают rang(A) или r(A)

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&5&4\\-1&7&6\end{pmatrix}\overset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&5&4\\0&10&8\end{pmatrix}\overset{\mathrm{III}+\mathrm{II}\times(-2)}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&5&4\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

Ответ: rang(A)=2

Свойства ранга матрицы:

- При транспонировании ранг матрицы не меняется.
- Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
- Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Метод элементарных преобразований

Задание.

Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 4 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение.

Шаг 1. Из третий строчки вычтем вторую, умножив её на число два (преобразование 3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 4 \\ \boxed{10 \quad 18 \quad 40 \quad 17} \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 4 \\ \boxed{10\text{-}4\ 2} & \boxed{18\text{-}8\ 2} & \boxed{40\text{-}18\ 2} & \boxed{17\text{-}7\ 2} \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ 3

Шаг 2. От второй строки отнимаем четвертую, умноженную на число четыре (преобразование 3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4-1\ 4 & 8-7\ 4 & 18-17\ 4 & 4-3\ 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Шаг 3. От третий строки отнимаем четвертую, умноженную на число два (преобразование 3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 2-1\ 2 & 2-7\ 2 & 4-17\ 2 & 3-3\ 2 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ 3

Шаг 4. К второй строки прибавим первую, умноженную на число пять (преобразование 3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ \boxed{0 \quad -20 \quad -50 \quad -5} \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ \boxed{0-0\ 5} & \boxed{-20+4\ 5} & \boxed{-50+10\ 5} & \boxed{-5+1\ 5} \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Шаг 5. К третий строки прибавим первую, умноженную на число три (преобразование 3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0 \quad -12 \quad -30 \quad -3} \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0+0\ 3} & \boxed{-12+\ 4\ 3} & \boxed{-30+10\ 3} & \boxed{-3+1\ 3} \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ 3

Шаг 6. Меняем местами первую и вторую строчки. Далее четвертую и первую строки

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

С помощью элементарных преобразований над строками матрицу A привели к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}_{4 \times 4} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 4} \Rightarrow \quad \text{rang}(A) = 2$$

Ответ: rang (A) = 2

Пример вычисления ранга матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \times 3 \\ + \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \times 2 \\ \\ + \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ :2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \times 11 \\ + \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \times(-5) \\ + \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r = \operatorname{rang} A = 2;$$