Дискретная математика

МОДУЛЬ

Основы математической логики

ЛЕКЦИЯ №3

Равносильность формул логики. Законы логики.

Лекция №3

План

- 1. Понятие равносильности формул логики высказываний.
- 2. Основные равносильности формул логики высказываний.

Понятие равносильности формул

Рассмотрим две формулы логики высказываний: $F_1 = \overline{A \vee B}$, $F_2 = \bar{A} \wedge \bar{B}$.

Составим для них таблицы истинности.

A	B	$A \vee B$	F_1
0	0	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	1	**0**
1	1	1	**0**

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	F_2
0	0	1	1	**1**
0	1	1	0	**0**
1	0	0	1	**0**
1	1	0	0	**0**

Что вы можете сказать о значениях этих формул?

Понятие равносильности формул

Определение. Формулы F_1 и F_2 называются равносильными, если они принимают одинаковые истинностные значения при любом наборе значений переменных, входящих в эти формулы. Обозначают: $F_1 \equiv F_2$.

Теорема. Формулы F_1 и F_2 являются равносильными, если формула $F_1 \leftrightarrow F_2$ является тождественно истинной (тавтологией).

Справедливость утверждения непосредственно следует из определения

Основные равносильности формул (законы логики)

Одной из задач логики является установление равносильности логических формул или их упрощение. Построение таблиц истинности в этом случае может оказаться очень громоздким или вообще не давать нужный результат. В таких случаях целесообразно осуществить равносильные преобразования формул.

Рассмотрим основные равносильности формул логики (законы логики) и правила преобразований формул логики.

Основные равносильности формул (законы логики)

1. Законы коммутативности:

$A \vee B \equiv B \vee A;$ $\quad$ $A \wedge B \equiv B \wedge A.$

2. Законы ассоциативности:

$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C);$ $\quad$ $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C).$

3. Законы дистрибутивности:

$(A \vee B) \wedge C \equiv$
$\equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C);$

$(A \wedge B) \vee C \equiv$
$\equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C).$

Основные равносильности формул (законы логики)

4. Законы нуля:

$A \vee 0 \equiv A; \quad A \wedge 0 = 0.$

5. Законы единицы:

$A \vee 1 \equiv 1; \quad A \wedge 1 \equiv A.$

6. Закон исключённого третьего:

$A \vee \overline{A} \equiv 1$

7. Закон противоречия:

$A \wedge \overline{A} \equiv 0.$

8. Закон двойного отрицания:

$\overline{\overline{A}} \equiv A.$

Основные равносильности формул (законы логики)

9. Законы идемпотентности:

$A \vee A \equiv A$; $\qquad A \wedge A \equiv A$.

10. Законы де Моргана:

$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$; $\qquad \overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$.

11. Законы поглощения:

$(A \vee B) \wedge A \equiv A$; $\qquad (A \wedge B) \vee A \equiv A$.

Основные равносильности формул (законы логики)

При упрощении логических формул, как правило, исключают операции импликации, эквиваленции, штрих Шеффера, стрелку Пирса и сложение по модулю 2, и осуществляют переход к стандартному базису логических функций, содержащему операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. При этом добиваются, чтобы отрицания стояли только над отдельными переменными, а сами переменные или их отрицания связывались операциями дизъюнкции и конъюнкции.

12. Замена импликации:

$$A \to B \equiv \overline{A} \vee B.$$

13. Замена эквиваленции:

$$A \leftrightarrow B \equiv$$
$$\equiv (A \to B) \wedge (B \to A).$$

14. Замена штриха Шеффера

$$A \mid B \equiv \overline{A \wedge B}$$

15. Замена стрелки Пирса

$$A \downarrow B \equiv \overline{A \vee B}$$

16. Замена сложения по модулю 2

$$A \oplus B \equiv \overline{A \leftrightarrow B}$$

Основные равносильности формул (законы логики)

При выполнении равносильных преобразований логических формул наряду с перечисленными выше законами логики используют следующие правила преобразований:

Правило подстановки. Пусть F_1 и F_2 - равносильные формулы, содержащие некоторую формулу F. Если формулу F заменить в формулах F_1 и F_2 на формулу G, то формулы G_1 и G_2 также будут равносильными: $G_1 \equiv G_2$.

.

Основные равносильности формул (законы логики)

Так, согласно правилу подстановки, например, из равносильности формул

$$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$$

вытекает равносильность формул

$$\overline{(A \to C) \vee B} \equiv \overline{A \to C} \wedge \overline{B}$$

В данном случае в исходные формулы вместо формулы A мы подставили формулу $A \to C$, при этом новые формулы также равносильны.

Основные равносильности формул (законы логики)

При выполнении равносильных преобразований логических формул наряду с перечисленными выше законами логики используют следующие правила преобразований:

Правило замены. Пусть в формуле F_1 выделена формула F и G - равносильная ей формула: $F \equiv G$. Если формулу F в формуле F_1 заменить на формулу G, то полученная формула G_1 будет равносильна формуле F_1 : $F_1 \equiv G_1$.

.

Основные равносильности формул (законы логики)

Рассмотрим, к примеру, формулу $\overline{\overline{P \vee Q} \to R}$.

Согласно закону де Моргана, $\overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

Выполним замену формулы $\overline{P \vee Q}$ ей равносильной $\overline{P} \wedge \overline{Q}$

Тогда по правилу замены формулы $\overline{\overline{P \vee Q} \to R}$ и $\overline{(\overline{P} \wedge \overline{Q}) \to R}$ будут равносильными.

Заметим, что правило подстановки и правило замены позволяют применять законы логики не только к отдельным переменным, а и к другим формулам.