

# ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

МОДУЛЬ

Основы математической  
логики

ЛЕКЦИЯ №3

Равносильность формул логики.  
Законы логики.

# Лекция №3

## План

- ▣ 1. Понятие равносильности формул логики высказываний.
- ▣ 2. Основные равносильности формул логики высказываний.

# Понятие равносильности формул

Рассмотрим две формулы логики

$$F_1 = \overline{A \vee B} \quad F_2 = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

Составим таблицу истинности.

$A$	$B$	$A \vee B$	$F_1$	$A$	$B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$F_2$
0	0	0	<b>1</b>	0	0	1	1	<b>1</b>
0	1	1	<b>0</b>	0	1	1	0	<b>0</b>
1	0	1	<b>0</b>	1	0	0	1	<b>0</b>
1	1	1	<b>0</b>	1	1	0	0	<b>0</b>

Что вы можете сказать о значениях этих формул?

# Понятие равносильности формул

**Определение.** Формулы  $F_1$  и  $F_2$  называются **равносильными**, если они принимают одинаковые истинностные значения при любом наборе значений переменных, входящих в эти формулы. Обозначают:  $F_1 \equiv F_2$ .

**Теорема.** Формулы  $F_1$  и  $F_2$  являются равносильными, если формула  $F_1 \leftrightarrow F_2$  является тождественно истинной (тавтологией).

Справедливость утверждения непосредственно следует из определения

# Основные равносильности формул (законы логики)

Одной из задач логики является установление равносильности логических формул или их упрощение. Построение таблиц истинности в этом случае может оказаться очень громоздким или вообще не давать нужный результат. В таких случаях целесообразно осуществить равносильные преобразования формул.

Рассмотрим основные равносильности формул логики (законы логики) и правила преобразований формул логики.

# Основные равносильности формул (законы логики)

## 1. Законы коммутативности:

$$A \vee B \equiv B \vee A; \quad A \wedge B \equiv B \wedge A.$$

## 2. Законы ассоциативности:

$$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C); \quad (A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C).$$

## 3. Законы дистрибутивности:

$$\begin{aligned} (A \vee B) \wedge C &\equiv & (A \wedge B) \vee C &\equiv \\ &\equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C); & &\equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C). \end{aligned}$$

# Основные равносильности формул (законы логики)

4. Законы нуля:

$$A \vee 0 \equiv A; \quad A \wedge 0 = 0.$$

5. Законы единицы:

$$A \vee 1 \equiv 1; \quad A \wedge 1 \equiv A.$$

6. Закон исключённого третьего:

$$A \vee \bar{A} \equiv 1$$

7. Закон противоречия:

$$A \wedge \bar{A} \equiv 0.$$

8. Закон двойного отрицания:

$$\bar{\bar{A}} \equiv A.$$

# Основные равносильности формул (законы логики)

## 9. Законы идемпотентности:

$$A \vee A \equiv A;$$

$$A \wedge A \equiv A.$$

## 10. Законы де Моргана:

$$\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B};$$

$$\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}.$$

## 11. Законы поглощения:

$$(A \vee B) \wedge A \equiv A;$$

$$(A \wedge B) \vee A \equiv A.$$



# Основные равносильности формул (законы логики)

При упрощении логических формул, как правило, исключают операции импликации, эквиваленции, штрих Шеффера, стрелку Пирса и сложение по модулю 2, и осуществляют переход к стандартному базису логических функций, содержащему операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. При этом добиваются, чтобы отрицания стояли только над отдельными переменными, а сами переменные или их отрицания связывались операциями дизъюнкции и конъюнкции.

## 12. Замена

ИМПЛИКАЦИИ:

$$A \rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B.$$

## 13. Замена

ЭКВИВАЛЕНЦИИ:

$$\begin{aligned} A \leftrightarrow B &\equiv \\ &\equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A). \end{aligned}$$

## 14. Замена штриха

ШЕФФЕРА

$$A | B \equiv \overline{A \wedge B}$$

## 15. Замена стрелки

ПИРСА

$$A \downarrow B \equiv \overline{A \vee B}$$

## 16. Замена сложения

ПО МОДУЛЮ 2

$$A \oplus B \equiv \overline{A \leftrightarrow B}$$

# Основные равносильности формул (законы логики)

При выполнении равносильных преобразований логических формул наряду с перечисленными выше законами логики используют следующие правила преобразований:

**Правило подстановки.** Пусть  $F_1$  и  $F_2$  - равносильные формулы, содержащие некоторую формулу  $F$ . Если формулу  $F$  заменить в формулах  $F_1$  и  $F_2$  на формулу  $G$ , то формулы  $G_1$  и  $G_2$  также будут равносильными:  $G_1 \equiv G_2$ .

.

# Основные равносильности формул (законы логики)

Так, согласно правилу подстановки,  
например, из равносильности формул

$$\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$$

вытекает равносильность формул

$$\overline{(A \rightarrow C) \vee B} \equiv \overline{A \rightarrow C} \wedge \bar{B}$$

В данном случае в исходные формулы  
вместо формулы  $A$  мы подставили формулу  
 $A \rightarrow C$ , при этом новые формулы также  
равносильны.

# Основные равносильности формул (законы логики)

При выполнении равносильных преобразований логических формул наряду с перечисленными выше законами логики используют следующие правила преобразований:

**Правило замены.** Пусть в формуле  $F_1$  выделена формула  $F$  и  $G$  - равносильная ей формула:  $F \equiv G$ . Если формулу  $F$  в формуле  $F_1$  заменить на формулу  $G$ , то полученная формула  $G_1$  будет равносильна формуле  $F_1$ :  $F_1 \equiv G_1$ .

# Основные равносильности формул (законы логики)

Рассмотрим, к примеру, формулу  $\overline{\overline{P \vee Q}} \rightarrow R$ .

Согласно закону де Моргана  $\overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}$ .

Выполним замену формулы  $\overline{P \vee Q}$  ей равносильной  $\overline{P} \wedge \overline{Q}$ .

Тогда по правилу замены формулы  $\overline{\overline{P \vee Q}} \rightarrow R$

и  $\overline{(\overline{P} \wedge \overline{Q})} \rightarrow R$  будут равносильными.

Заметим, что правило подстановки и правило замены позволяют применять законы логики не только к отдельным переменным, а и к другим формулам.