

# Системы линейных уравнений (СЛУ)



# Вопросы по теме «Матрица»



# СЛУ

Если система (1.1) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной*; система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных называются *эквивалентными*, если множества всех решений этих систем совпадают.

Если  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ , то система называется *однородной*, в противном случае она называется *неоднородной*.

# СЛУ

Систему (1.1) можно записать в матричной форме:

$$AX = B,$$

где  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  — матрица системы,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  —

столбец (или вектор-столбец) неизвестных,  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  — столбец свободных членов.

# СЛУ

Матрица  $(A|B) = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$  называется *расширенной матрицей системы*.

**Теорема 2.1 (Кронекера-Капелли).** Система линейных уравнений (1.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$r(A) = r(A|B).$$



# СЛУ

Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместна она или нет, а для совместной системы — выяснить, определена она или нет. При этом возможны три варианта:

1) Если  $r(A) < r(A|B)$ , то система несовместна.

2) Если  $r(A) = r(A|B) = n$  (где  $n$  — число неизвестных), то система совместна и определена.

3) Если  $r(A) = r(A|B) < n$ , то система совместна и неопределена.

Для исследования систем линейных уравнений и нахождения их решений можно использовать, например, *метод Гаусса*:

# Метод Гаусса

Алгоритм:

1. Привести расширенную матрицу к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования;
2. Найти ранг и сделать вывод относительно совместности и определённости;
3. Записать СЛУ, соответствующую полученной расширенной матрице;
4. Найти значения неизвестных или выразить через свободные переменные (бесконечное число решений).



# Метод Гаусса

Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

# Метод Гаусса

Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 \quad \quad - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

# Метод Гаусса

Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 \quad \quad - 2x_3 = 3. \end{cases}$$



# Обратная матрица. Формулы

## Уравнение

Пусть система из  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными записана в матричной форме:

$$AX = B,$$

где  $A = (a_{ij})$  — матрица коэффициентов системы размера  $n \times n$ ,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  — столбец неизвестных,  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  — столбец свободных членов.

Если  $D$  — определитель матрицы  $A$  — не равен нулю, то система совместна и определена, ее решение задается формулой:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$



# Обратная матрица. Формулы Крамера.

Другую форму записи этого утверждения дают *формулы Крамера*:

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где  $D_k$  — определитель, получающийся из  $D$  заменой  $k$ -го столбца на столбец свободных членов.



Сириус  
IT-Колледж

# Обратная матрица. Формулы Крамера

Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью

обратной матрицы: 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

# Домашнее задание

Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12. \end{cases}$$

Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью

обратной матрицы: 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$$



# Спасибо за пару!

На следующей лекции контрольная работа по теме «Матрицы»

