

Системы линейных уравнений (СЛУ)



Вопросы по теме «Матрица»

СЛУ

Если система (1.1) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной*; система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных называются *эквивалентными*, если множества всех решений этих систем совпадают.

Если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то система называется *однородной*, в противном случае она называется *неоднородной*.

СЛУ

Систему (1.1) можно записать в матричной форме:

$$AX = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ —

столбец (или вектор-столбец) неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов.

СЛУ

Матрица $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$ называется *расширенной матрицей системы*.

Теорема 2.1 (Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений (1.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$r(A) = r(A|B).$$

СЛУ

Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместна она или нет, а для совместной системы — выяснить, определена она или нет. При этом возможны три варианта:

1) Если $r(A) < r(A|B)$, то система несовместна.

2) Если $r(A) = r(A|B) = n$ (где n — число неизвестных), то система совместна и определена.

3) Если $r(A) = r(A|B) < n$, то система совместна и неопределена.

Для исследования систем линейных уравнений и нахождения их решений можно использовать, например, *метод Гаусса*:

Метод Гаусса

Алгоритм:

1. Привести расширенную матрицу к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования;
2. Найти ранг и сделать вывод относительно совместности и определённости;
3. Записать СЛУ, соответствующую полученной расширенной матрице;
4. Найти значения неизвестных или выразить через свободные переменные (бесконечное число решений).

Метод Гаусса

Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

Метод Гаусса

Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 \quad \quad - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Метод Гаусса

Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 \quad \quad - 2x_3 = 3. \end{cases}$$



Обратная матрица. Формулы

Уравнение

Пусть система из n линейных уравнений с n неизвестными записана в матричной форме:

$$AX = B,$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица коэффициентов системы размера $n \times n$,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов.

Если D — определитель матрицы A — не равен нулю, то система совместна и определена, ее решение задается формулой:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$



Обратная матрица. Формулы Крамера.

Другую форму записи этого утверждения дают *формулы Крамера*:

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где D_k — определитель, получающийся из D заменой k -го столбца на столбец свободных членов.



Сириус
IT-Колледж

Обратная матрица. Формулы Крамера

Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью

обратной матрицы:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

Домашнее задание

Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12. \end{cases}$$

Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью

обратной матрицы:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$$

Спасибо за пару!

На следующей лекции контрольная работа по теме «Матрицы»

