Сириус
IT-Колледж

Системы линейных уравнений (СЛУ)

Вопросы по теме «Матрица»

Сириус
IT-Колледж

СЛУ

Пусть задана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

где числа a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ называются *коэффициентами системы*, а числа $b_1, \ldots, b_m$ — *свободными членами*.

Решением системы (1.1) называется такой набор чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных (c_1 вместо x_1, …, c_n вместо x_n) каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Сириус
IT-Колледж

СЛУ

Если система (1.1) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной*; система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных называются *эквивалентными*, если множества всех решений этих систем совпадают.

Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система называется *однородной*, в противном случае она называется *неоднородной*.

СЛУ

Систему (1.1) можно записать в матричной форме:

$$AX = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — *матрица системы*, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — *столбец* (или вектор-столбец) *неизвестных*, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — *столбец свободных членов*.

Сириус
IT-Колледж

СЛУ

Матрица $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называется *расширенной матрицей системы.*

Теорема 2.1 (Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений (1.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$r(A) = r(A|B).$$

СЛУ

Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместна она или нет, а для совместной системы — выяснить, определенна она или нет. При этом возможны три варианта:

1) Если $r(A) < r(A|B)$, то система несовместна.

2) Если $r(A) = r(A|B) = n$ (где n — число неизвестных), то система совместна и определенна.

3) Если $r(A) = r(A|B) < n$, то система совместна и неопределенна.

Для исследования систем линейных уравнений и нахождения их решений можно использовать, например, *метод Гаусса*:

Сириус
IT-Колледж

Метод Гаусса

Алгоритм:

1. Привести расширенную матрицу к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования;
2. Найти ранг и сделать вывод относительно совместности и определённости;
3. Записать СЛУ, соответствующую полученной расширенной матрице;
4. Найти значения неизвестных или выразить через свободные переменные (бесконечное число решений).

Сириус
IT-Колледж

Метод Гаусса

Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

Сириус
IT-Колледж

Метод Гаусса

Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

Метод Гаусса

Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Обратная матрица. Формулы Крамера

Пусть система из n линейных уравнений с n неизвестными записана в матричной форме:

$$AX = B,$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица коэффициентов системы размера $n \times n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов.

Если D — определитель матрицы A — не равен нулю, то система совместна и определенна, ее решение задается формулой:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Обратная матрица. Формулы Крамера.

Другую форму записи этого утверждения дают *формулы Крамера*:

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где D_k — определитель, получающийся из D заменой k-го столбца на столбец свободных членов.

Обратная матрица. Формулы Крамера.

Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$

Домашнее задание

Исследовать систему линейных уравнений; если она совместна, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12. \end{cases}$$

Решить систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 \qquad = -6. \end{cases}$$

Спасибо за пару!

На следующей лекции контрольная работа по теме «Матрицы»