Лекция

Электромагнитные колебания

Имеется много случаев, когда мгновенные значения тока оказываются практически одинаковыми на всех участках цепи.

Ток называют квазистационарным, если все изменения во времени происходят настолько медленно, что распространение электромагнитных возмущений можно считать мгновенным.

Если l — длина цепи, то на прохождение длины l электромагнитное возмущение затрачивает время порядка

$$\tau = \frac{l}{c}$$

Для периодически изменяющихся токов условие квазистационарности выполняется при

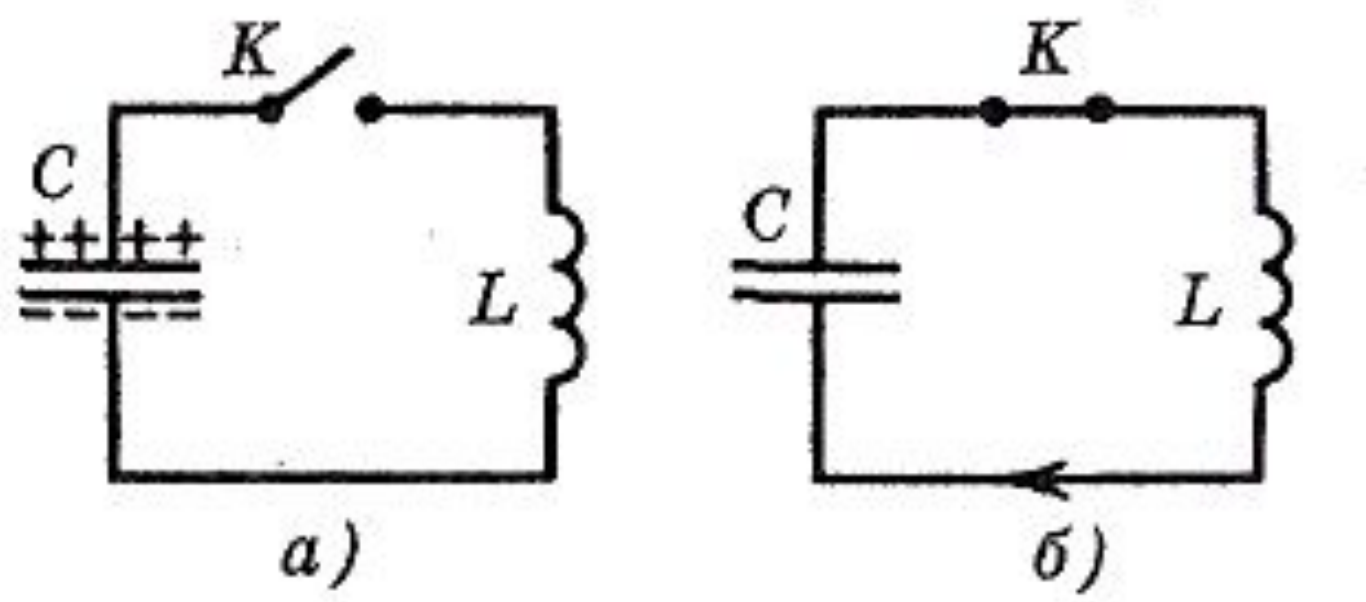
$$\tau = l/c \ll T,$$

T — период изменений.

Например, для цепи длиной $l = 3$ м время $\tau = 10$ с токи можно считать квазистационарными вплоть до частот 10 Гц (это соответствует $T = 10$ с).

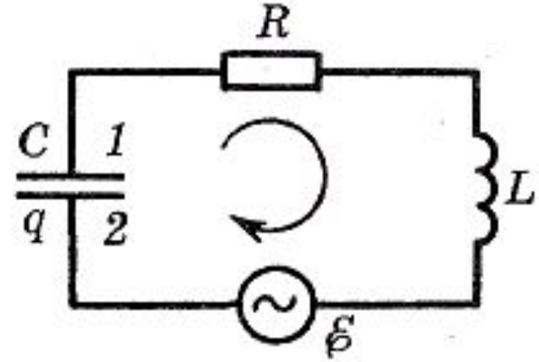
В рассматриваемых нами случаях условие квазистационарности выполняется, и токи будем считать квазистационарными.

Колебательный контур



1.Уравнение колебательного контура.

Мгновенные значения квазистационарных токов подчиняются закону Ома



Согласно закону Ома для участка цепи $1RL2$

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_s + \mathcal{E},$$

$$\mathcal{E}_s = -L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t, \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = q/C$$

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI + \frac{q}{C} = \mathcal{E},$$ или

$$\boxed{L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}.}$$

Уравнению колебательного контура можно придать иной вид:

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0{}^2 q = \mathcal{E}/L,} \qquad 2\beta = R/L, \quad \omega_0^2 = 1/LC.$$

2.*Свободные электрические колебания*

Свободные незатухающие колебания.

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$q = q_m \cos\left(\omega_0 t + \alpha\right),$$

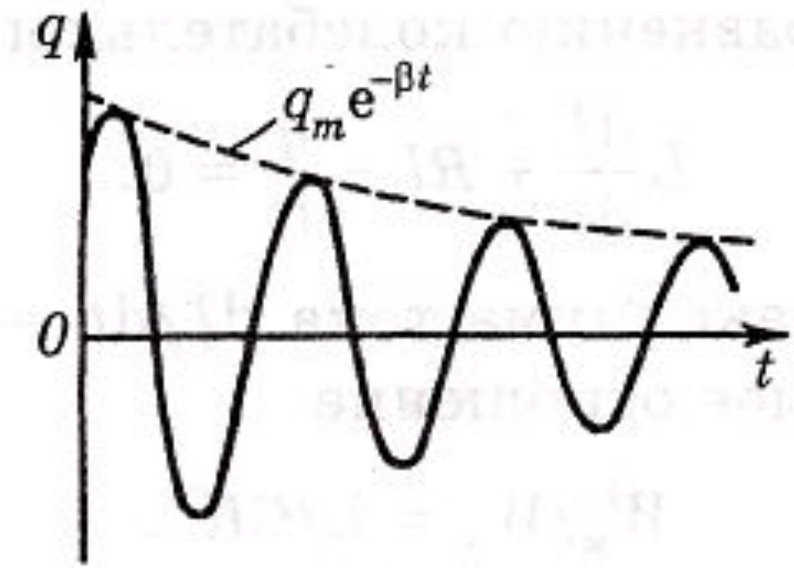
q_m — амплитудное значение заряда на обкладке

$$W/\omega = \text{const}. \qquad \omega_0 = 1/\sqrt{LC},$$

3. *Свободные затухающие колебания*

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \qquad q = q_m e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha),$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2},$$



$q_m e^{-\beta t}$ — амплитуда затухающих колебаний.

Напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha).$$

Ток в контуре

$$I = \frac{dq}{dt} = q_m e^{-\beta t} \left[-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha) \right].$$

или

$$I = \omega q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \delta).$$

Величины, характеризующие затухание

1.Коэффициент затухания β и время релаксации τ — время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

$$\tau = 1/\beta .$$

2.Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T ,$$

или

$$\lambda = 1/N_{e} ,$$

Если затухание мало,т.е. $(\beta \ll \omega_0)$,

$$\lambda \approx \beta \cdot 2\pi/\omega_0 = \pi R\sqrt{C/L}. \qquad \omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

3.Добротность колебательного контура $-$ Q

$$Q = \pi/\lambda = \pi N_e ,$$

Чем меньше затухание, тем больше добротность Q

При слабом затухании $Q \approx \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}.$

или

$$Q \approx 2\pi \frac{W}{\delta W},$$

W — энергия, запасенная в контуре, δW — уменьшение этой энергии за период колебания T.

При $\beta \geq \omega_0$ вместо колебаний будет происходить апериодический разряд конденсатора.

Активное сопротивление контура, при котором наступает апериодический процесс, называют критическим:

$$R_{кр} = 2\sqrt{L/C}.$$

Вынужденные электромагнитные колебания

В контур включена внешняя переменная э. д. с.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega t.$$

Уравнение колебаний в RCL контуре

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_m \cos\omega t,$$

или

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \left(\mathcal{E}_m / L\right)\cos\omega t.$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi),$$

q_m — амплитуда заряда на конденсаторе ; ψ — разность фаз между колебаниями заряда и внешней э. д. с.

Дифференцируя q_m по t, получаем

$$I = -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = \omega q_m \cos(\omega t - \psi + \pi/2).$$

или

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

I_m — амплитуда тока, φ — сдвиг по фазе между током и внешней э. д. с. ,

$$I_m = \omega q_m, \quad \varphi = \psi - \pi/2.$$

Определим I_m и φ.

Для этого представим исходное уравнение в виде

$$U_L + U_R + U_C = \mathcal{E}_m \cos\omega t,$$

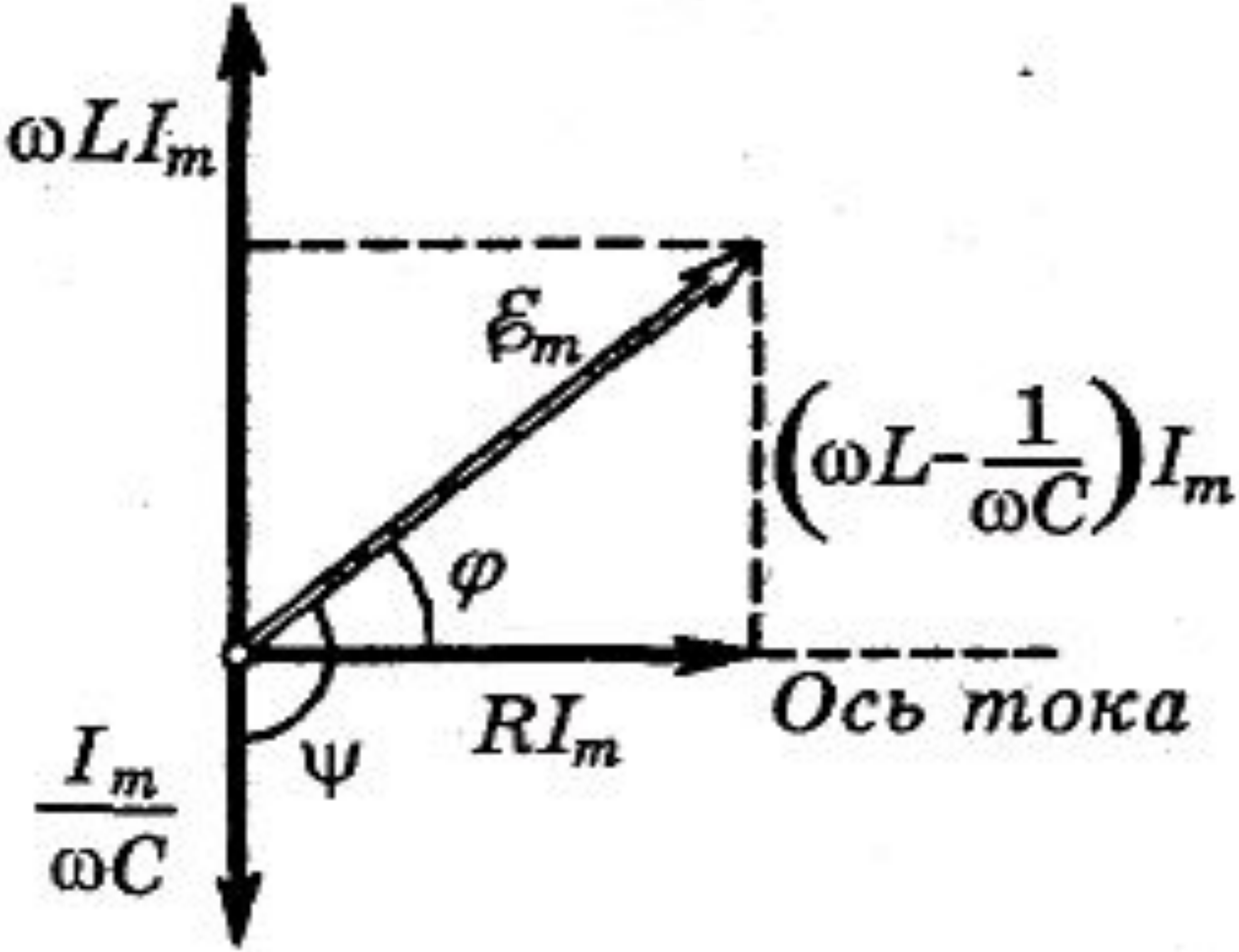
$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega t - \psi) = \frac{I_m}{\omega C}\cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U_L = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\omega L I_m \sin(\omega t - \varphi) = \omega L I_m \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

С помощью векторной диаграммы изобразим амплитуды напряжений как векторы, модули которых

$$U_{Rm} = RI_m, \quad U_{Cm} = I_m/\omega C, \quad U_{Lm} = \omega L I_m$$

и найдем их векторную сумму, равную вектору величины $\mathcal{E}_m$



$\omega L I_m$
$\mathcal{E}_m$
$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m$
φ
ψ
$R I_m$
Ось тока
$\frac{I_m}{\omega C}$

Из прямоугольного треугольника этой диаграммы следуют выражения для

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}},$$

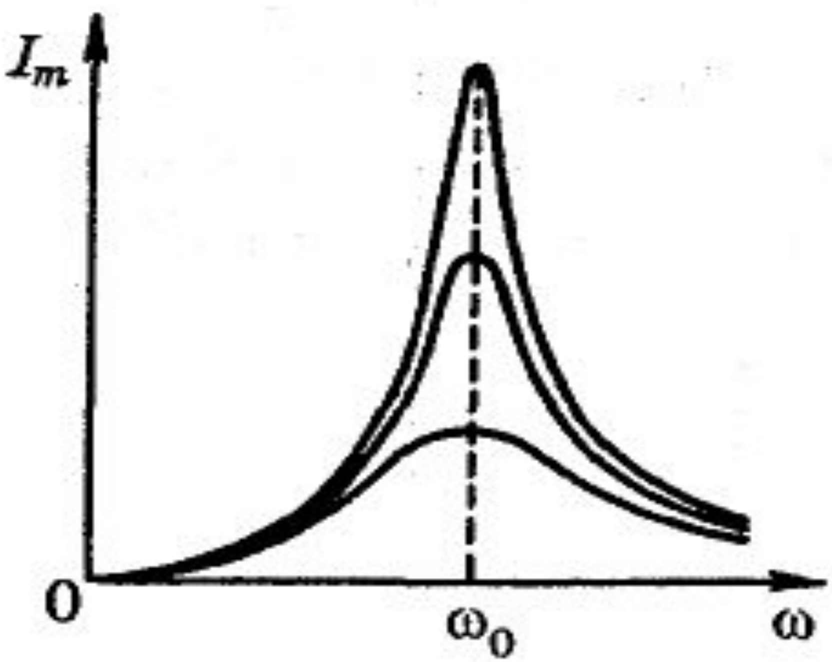
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

Резонансные кривые

Амплитуда силы тока имеет максимальное значение при

$$\omega L - 1/\omega C = 0.$$

Резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура:

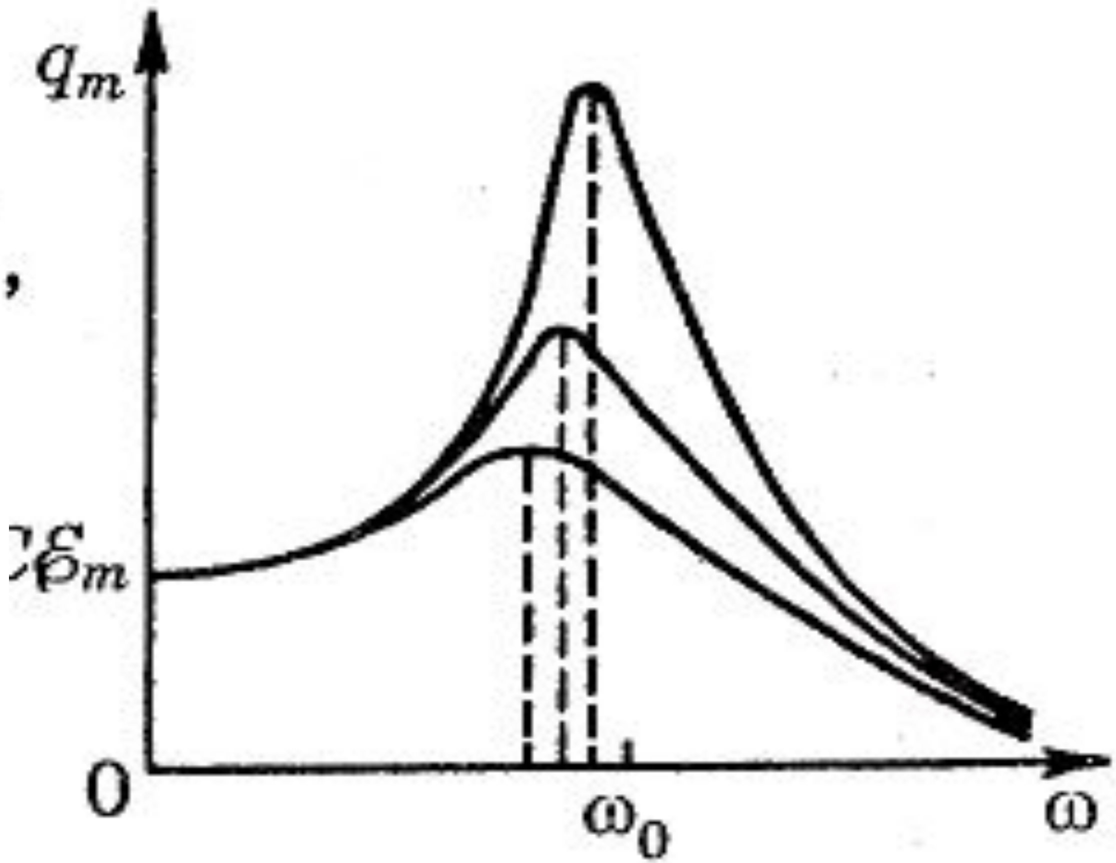


$$\omega_{I\text{рез}} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Резонансные кривые для заряда на конденсаторе

Максимум амплитуды заряда достигается при резонансной частоте

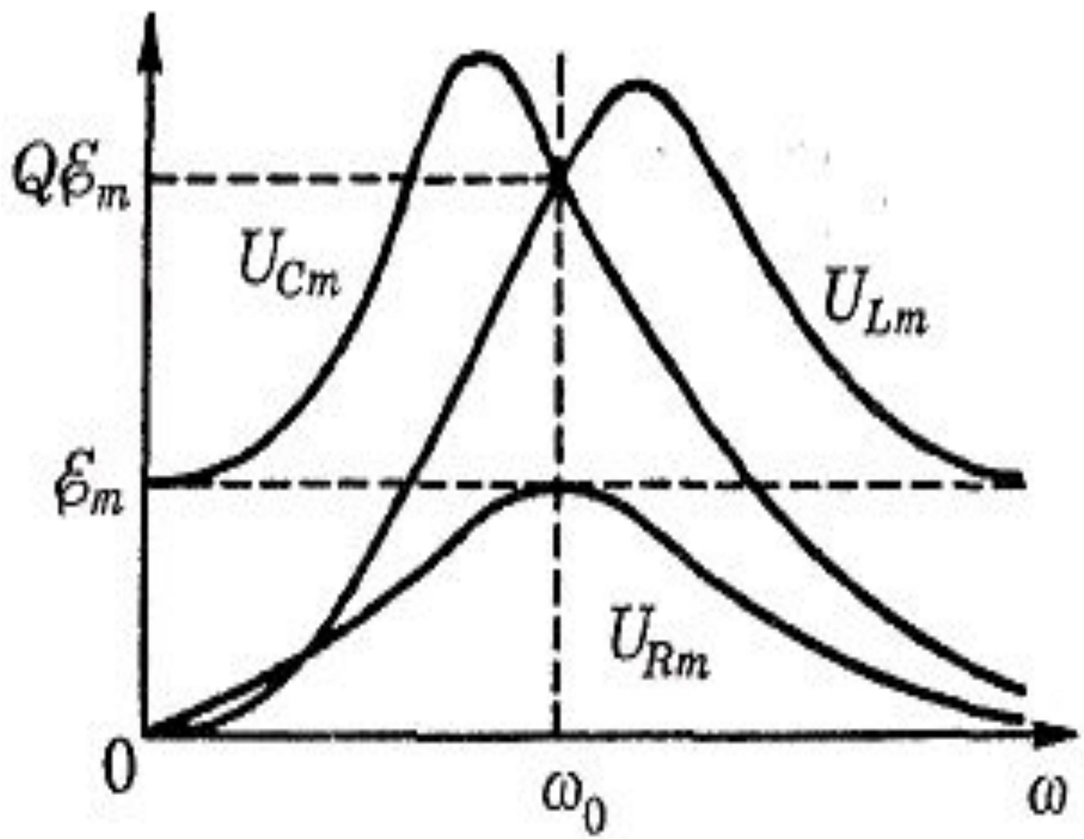
$$\omega_{q\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$



Резонансные частоты и кривые при резонансе напряжения для R, C, и L

$$\omega_{R\,\text{рез}} = \omega_0\,,$$

$$\omega_{L\,\text{рез}} = \omega_0/\sqrt{1-2\left(\beta/\omega_0\right)^2}\,. \quad \omega_{C\,\text{рез}} = \omega_0\sqrt{1-2\left(\beta/\omega_0\right)^2}\,;$$



.

Резонансные кривые и добротность Q.

Слабое затухание, т. е. $\beta \ll \omega_0$ В этом случае $U_{C\,\text{рез}}/\mathcal{E}_m = Q$

Добротность контура показывает во сколько раз максимальное значение амплитуды напряжения на конденсаторе (и на индуктивности) превышает амплитуду внешней э. д. с.

Добротность контура связана и с другой важной характеристикой резонансной кривой — ее шириной.

При $\beta \ll \omega_0$ $Q = \omega_0/\delta\omega$,

ω_0 — резонансная частота; $\delta\omega$ — ширина резонансной кривой на «высоте», равной 0,7 от максимальной, т. е. в резонансе.

Явление резонанса — это возбуждение сильных колебаний при частоте внешней э. д. с. или напряжения, равной или близкой к собственной частоте колебательного контура.

Резонанс используют для выделения из сложного напряжения нужной составляющей.На этом основана вся техника радиоприема.