10 класс

«Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия»

Оглавление слайда

Определение:

Геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$, где $b_1 \neq 0$, что для всех натуральных чисел n выполняется равенство $b_n = b_{n-1} \cdot q$, где $q \neq 0$.

Примеры:

1. $1, 3, 9, 27, \dots, 3^n, \dots, (b_1 = 1, q = 3)$
2. $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \dots, \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}, \dots \ \left(b_1 = 1, q = \frac{1}{5}\right)$
3. $2, -4, 8, \dots, -(-2)^n, \dots \ (b_1 = 2, q = -2)$
4. $-5, -10, \dots, -5 \cdot 2^{n-1}, \dots \ (b_1 = -5, q = 2)$

Сумма n-членов геометрической прогрессии.

Из курса алгебри 8-класса известно что сумма n-членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} \quad (1)$$

Примеры:

1. $b_1 = 4, q = 2$. Найти сумму 10-членов геометрической прогрессии.

Решение: Подставялем заданные значение b_1 и q формулу (1), получаем

$$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{4\cdot(2^{10}-1)}{2-1} = 4092$$

Определение:

Геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей, если модуль его знаменателя меньше единицы. Последовательность $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots,$ где $b_1 \neq 0$, что для всех натуральных чисел n выполняется равенство $b_n = b_{n-1} \cdot q$, где $q \neq 0$ и $|q| > 1$

Примеры:

1. $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \dots, \left(b_1 = 1, q = -\frac{1}{3}\right)$
2. $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \dots, \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}, \dots \ (b_1 = 1, q = \frac{1}{5})$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Выведем формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с помощью формулы $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Запишем её так $S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1 \cdot q^n}{1-q}$. Так как $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_1 \cdot q^n}{1-q} = 0$ и поэтому

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$. Таким образом ,сумма бесконечно убывающей прогрессии вычисляется по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$

Примеры:

1.Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots$

Решение: Так как $b_1 = \frac{1}{2}, q = -\frac{1}{3}$ и по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ получим $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{8}$

2. 1.Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии если $b_3 = -1$ и $q = \frac{1}{7}$. Применяя формулу $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ и вставляя данные по условии задачи находим $b_1 = -49$. По формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ находим $S = -57\frac{6}{1}$.

Задачи для самостоятельной работы.

1.Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

1) $q = -\frac{1}{2}, b_1 = \frac{1}{8}$ 2) $q = \frac{1}{3}, b_5 = \frac{1}{81}$

3) $q = -\frac{1}{3}, b_1 = 9$ 4) $q = -\frac{1}{2}, b_4 = \frac{1}{8}$

2.Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

1) $6, 1, \frac{1}{6}, \ldots$ 2) $-25, -5, -1, \ldots$