Часть 1. Асимптоты функции

- Асимптота – это **линия** или **прямая**, к которым *неограниченно близко* приближается график функции при удалении его переменной точки в бесконечность.

- Вертикальная асимптота: $x = \mathrm{a}, \text{где} \lim_{x \to a} f(x) = \infty$. Иными словами, *а* – все те значения, которые не попали в область определения.

- Горизонтальная асимптота: $y = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

- Наклонная асимптота: $y = kx + b, \text{где}$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$$

- Пример 1. Исследовать на наличие асимптот функцию:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x + 7}.$$

Решение.

1) Для нахождения вертикальной асимптоты вычислим D(f):

$$2x + 7 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{3}{2} \Rightarrow D(f) = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Уравнение вертикальной асимптоты: $x = -\frac{3}{2}$, т.к. $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{4x^2-1}{2x+7} = \infty$.

2) Для нахождения горизонтальной асимптоты вычислим предел:

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 1}{2x + 7} = \infty.$$

Вывод: горизонтальная асимптота не определена (не существует).

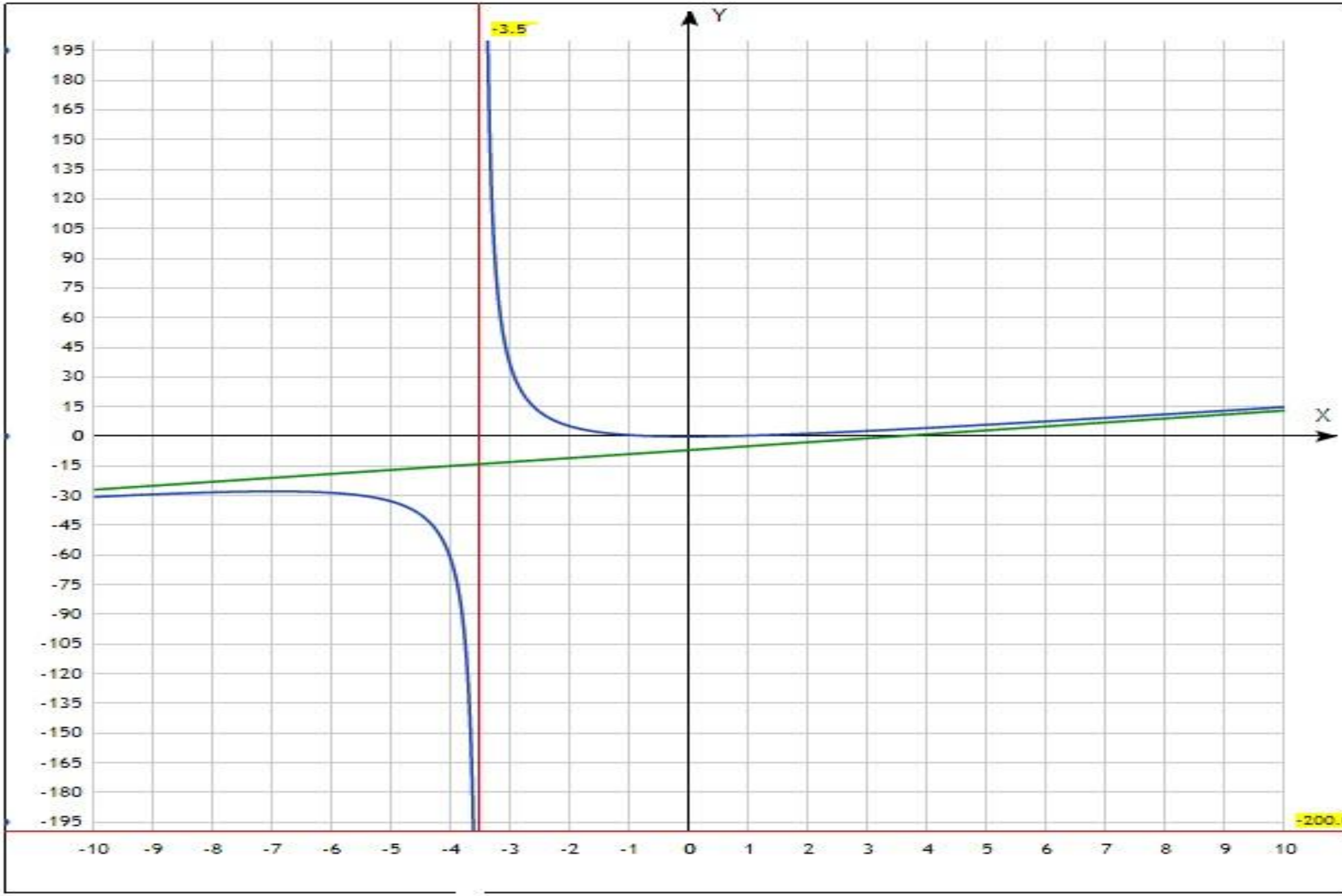
3) Для нахождения наклонной асимптоты вычислим пределы для расчета коэффициентов *a* и *b*:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\ k = \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-1}{2x^2+x} = 2.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)\ ;\ b = \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-1}{2x+7} - 2x = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{-1-14}\boldsymbol{x}}{2\boldsymbol{x}+7} = -7$$

Уравнение наклонной асимптоты: $y = 2x - 7$.

Вот и вся любовь ☺

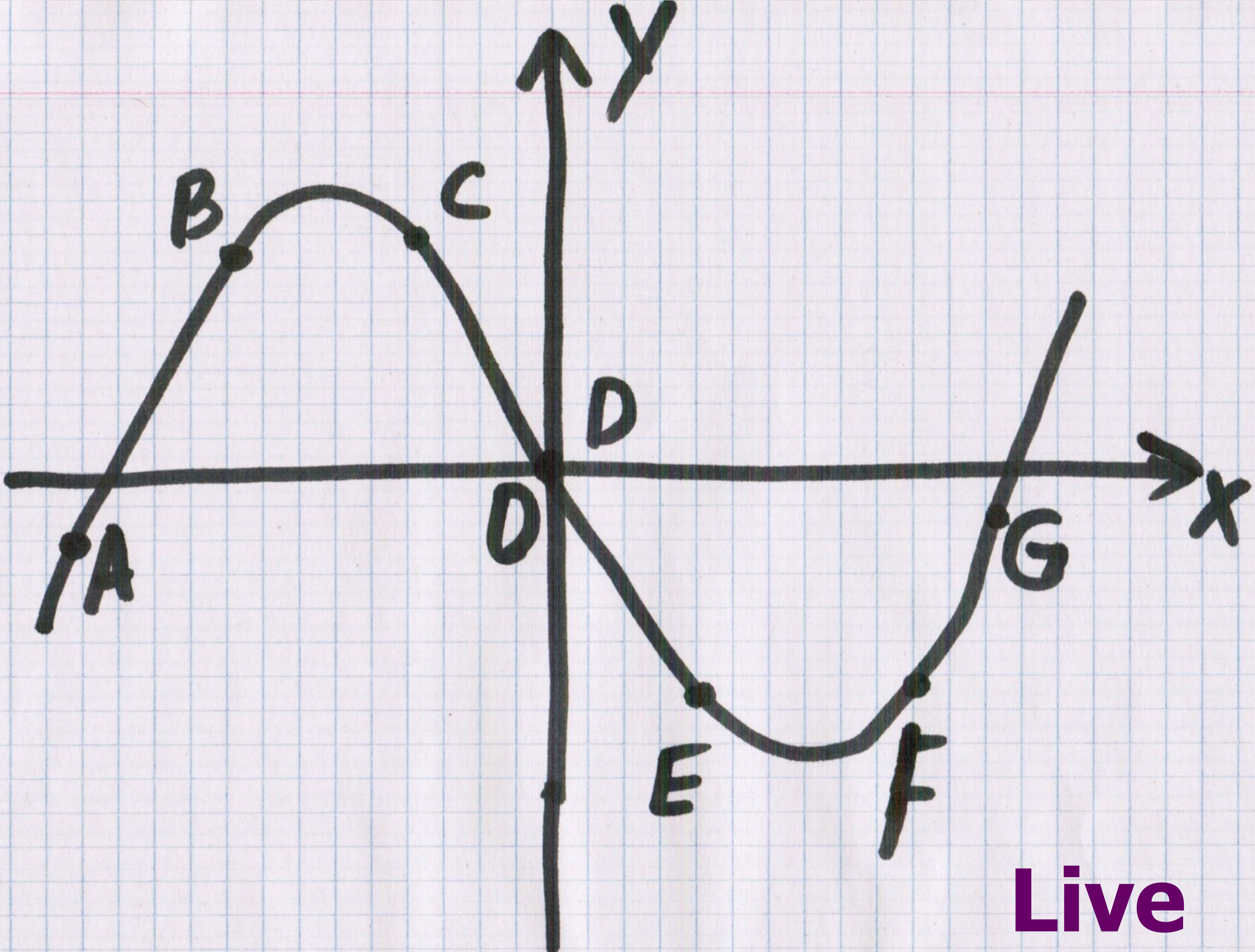


$y(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x + 7}$ Показать таблицу точек

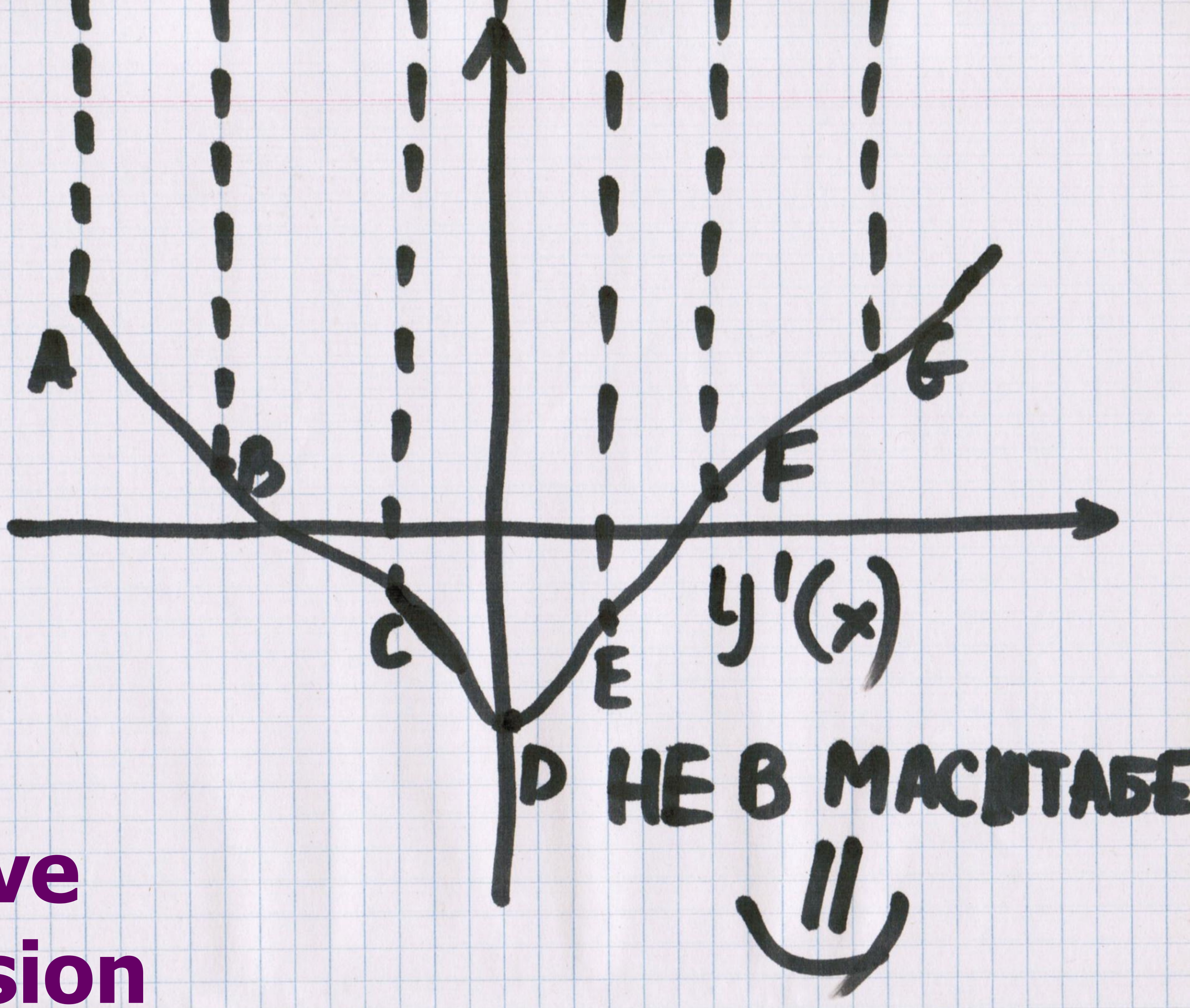
$y(x) = 2x - 7$ Показать таблицу точек

Часть 2.Производная функции

- Определение производной
- Геометрический смысл производной
- Связь между непрерывностью и дифференцируемостью
- Производные основных элементарных функций
- Правила дифференцирования
- Производная сложной функции
- Производная неявно заданной функции
- Логарифмическое дифференцирование



Live version



Live version

Определение производной

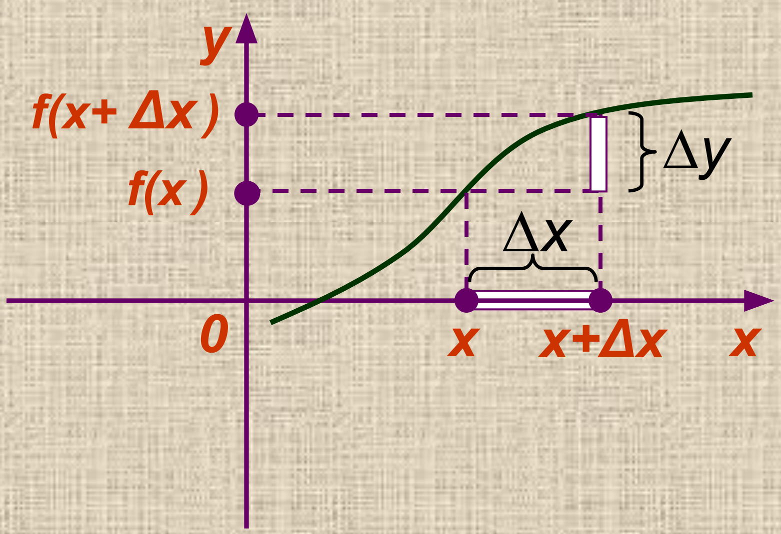
Пусть функция **y = f(x)** определена в некотором интервале **(a; b)**.

Аргументу *x* придадим некоторое приращение Δx:

$$x + \Delta x \in (a; b)$$

Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

то его называют производной функции **y = f(x)** и обозначают одним из символов:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}$$

Определение производной

Итак, по определению:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция ***y = f(x)*** , имеющая производную в каждой точке интервала ***(a; b)***, называется ***дифференцируемой*** в этом интервале; операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***.

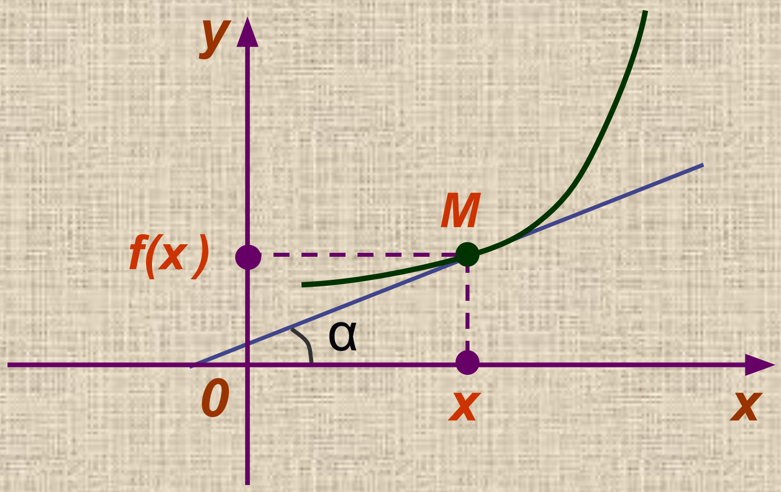
Значение производно функции ***y = f(x)*** в точке x_0 обозначается одним из символов:

$$y'(x_0); \quad f'(x_0); \quad y'\big|_{x_0}$$

Если функция ***y = f(x)*** описывает какой – либо физический процесс, то ***f ’(x)*** есть скорость протекания этого процесса – физический смысл производной.

Геометрический смысл производной

Возьмем на непрерывной кривой ***L*** две точки ***M*** и ***M₁***:



Через точки ***M*** и ***M₁*** проведем секущую и обозначим через ***φ*** угол наклона секущей.

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = $$

$$= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, поэтому точка ***M₁*** неограниченно приближается по кривой к точке ***M***, а секущая ***MM₁*** переходит в касательную.

$$\varphi \to \alpha \quad \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha \quad \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha$$

Геометрический смысл производной

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{y'} = tg\alpha = k \ = y'$$

Производная ***f ’(x)*** равна угловому коэффициенту касательной к графику функции ***y = f(x)*** в точке, абсцисса которой равна ***x***.

Если точка касания ***M*** имеет координаты ***(x$_0$; y$_0$),*** угловой коэффициент касательной есть ***k = f ’(x$_0$).***

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение касательной

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется ***нормалью*** к кривой.

$$k_{норм} = -\frac{1}{k_{кас}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Уравнение нормали

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема

Если функция *f(x)* дифференцируема в некоторой точке , то она непрерывна в ней.

Доказательство:

Пусть функция *y = f(x)* дифференцируема в некоторой точке *x*, следовательно существует предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x) \Rightarrow$$

$$\left(\text{где} \quad \alpha(x) \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0 \right)$$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \Rightarrow$$

Функция *y = f(x)* – непрерывна.

Обратное утверждение не верно: непрерывная функция может не иметь производной.

Производные основных элементарных функций

$1. C' = 0$

$11. (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$9. (\sin x)' = \cos x$

$19. (th\, x)' = \frac{1}{ch^2 x}$

$10. (\cos x)' = -\sin x$

$20. (cth\, x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

Правила дифференцирования

Пусть ***u(x)*** , ***v(x)*** и ***w(x)*** – дифференцируемые в некотором интервале ***(a; b)*** функции, ***C*** – постоянная.

- $$(u(v))' = u'(v) * v'$$
- $$(u \pm v)' = u' \pm v'$$
- $$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \Rightarrow \quad (C \cdot u)' = C \cdot u'$$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

- $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{C}{v}\right)' = \frac{-C \cdot v'}{v^2}$$

Пример

Вычислить производную функции $y=\dfrac{1+\sin x}{x^3\cdot\ln x}$

$$y'=\left(\frac{1+\sin x}{x^3\cdot\ln x}\right)'$$

$$=\frac{(1+\sin x)'\cdot(x^3\cdot\ln x)-(1+\sin x)\cdot(x^3\cdot\ln x)'}{\left(x^3\cdot\ln x\right)^2}$$

$$=\frac{(1'+(\sin x)')\cdot(x^3\cdot\ln x)-(1+\sin x)\cdot((x^3)'\cdot\ln x+x^3(\ln x)')}{\left(x^3\cdot\ln x\right)^2}$$

$$=\boxed{\frac{\cos x\cdot x^3\cdot\ln x-(1+\sin x)\cdot(3x^2\cdot\ln x+x^2\quad)}{\left(x^3\cdot\ln x\right)^2}}$$

Пример

Вычислить производную функции $y = \cos(\ln^{12} x)$

Данную функцию можно представить следующим образом:

$$y = \cos u; \quad u = v^{12}; \quad v = \ln x$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

$$y'_u = -\sin u = -\sin v^{12} = -\sin\left(\ln^{12} x\right)$$

$$u' = 12v^{11} = 12\ln^{11} x$$

$$v' = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{y' = -\sin\left(\ln^{12} x\right) \cdot 12\ln^{11} x \cdot \frac{1}{x}}$$

Коротко:

$$y' = (\cos(\ln^{12} x))' = -\sin(\ln^{12} x) \cdot (\ln^{12} x)'$$

$$= -\sin(\ln^{12} x) \cdot 12\ln^{11} x \cdot (\ln x)' =$$

Производная неявно заданной функции

Если функция задана уравнением **y = f(x)** , разрешенным относительно **y**, то говорят, что функция задана в ***явном виде***.

Под неявным заданием функции понимают задание функции в виде уравнения не разрешенного относительно **y**:

$$F(x;y)=0$$

Для нахождения производной неявно заданной функции необходимо продифференцировать уравнение по **x**, рассматривая при этом **y** как функцию от **x**, и полученное выражение разрешить относительно производной.

$$\left[x^3+y^3-3xy\right]'=\left[0\right]' \Longrightarrow (x^3)'+(y^3)'-3(xy)'=0 \Longrightarrow$$

$$\cancel{3}x^2+\cancel{3}y^2\cdot y'-\cancel{3}(x'y+xy')=0 \Longrightarrow$$

$$x^2+y^2\cdot y'-y-xy'=0 \Longrightarrow \boxed{y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}}$$

Производная функции, заданной параметрически

Если функция задана **параметрически:** $\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$, то её производная определяется **по формуле:**

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример. Найти производную функции: $\begin{cases} x = \sin\frac{t+4}{2} \\ y = \ln\cos t \end{cases}$.

Решение. $y'_t = \frac{1}{\cos t} \cdot (-\sin t) = -tg\, t.$

$$x'_t = \cos\left(\frac{t+4}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$y'_x = \frac{-2tgt}{\cos\left(\frac{t+4}{2}\right)}$$

Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала ***прологарифмировать***, а затем результат ***продифференцировать***.

Такую операцию называют ***логарифмическим дифференцированием.***

$$y=\frac{x^2\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(2x+5)^5}\Rightarrow \ln y=\ln\frac{x^2\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(2x+5)^5}\Rightarrow$$

$$(\ln y)'=\left[2\ln x+\frac{3}{4}\ln(x-1)+x-5\ln(2x+5)\right]'\Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}+\frac{3}{4}\cdot\frac{(x-1)'}{x-1}+1-5\frac{(2x+5)'}{2x+5}\Rightarrow$$

$$\boxed{y'=\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{4x-4}+1-\frac{10}{2x+5}\right)\cdot\frac{x^2\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(2x+5)^5}}$$

Логарифмическое дифференцирование

Пусть ***u = u(x)*** и ***v = v(x)*** – дифференцируемые функции.

Функция $y = u(x)^{v(x)}$ называется ***степенно – показательной***.

Производная такой функции находится только с помощью логарифмического дифференцирования.

$$y = (\sin x)^{x^2+1} \Rightarrow \ln y = \ln(\sin x)^{x^2+1} \Rightarrow$$

$$(\ln y)' = \left[(x^2+1)\cdot\ln(\sin x)\right]' \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = (x^2+1)'\cdot\ln(\sin x) + (x^2+1)\cdot(\ln(\sin x))' \Rightarrow$$

$$\boxed{y' = \left(2x\cdot\ln(\sin x) + (x^2+1)\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)\cdot(\sin x)^{x^2+1}}$$