

Часть 1. Асимптоты функции

- ◆ Асимптота – это линия или прямая, к которым *неограниченно близко* приближается график функции при удалении его переменной точки в бесконечность.
- ◆ Вертикальная асимптота: $x = a$, где $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. Иными словами, a – все те значения, которые не попали в область определения.
- ◆ Горизонтальная асимптота: $y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- ◆ Наклонная асимптота: $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

◆ Пример 1. Исследовать на наличие асимптот функцию:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x + 7}.$$

Решение.

1) Для нахождения вертикальной асимптоты вычислим $D(f)$:

$$2x + 7 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{3}{2} \Rightarrow D(f) = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Уравнение вертикальной асимптоты: $x = -\frac{3}{2}$, т.к. $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x + 7} = \infty$.

2) Для нахождения горизонтальной асимптоты вычислим предел:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 1}{2x + 7} = \infty.$$

Вывод: горизонтальная асимптота не определена (не существует).

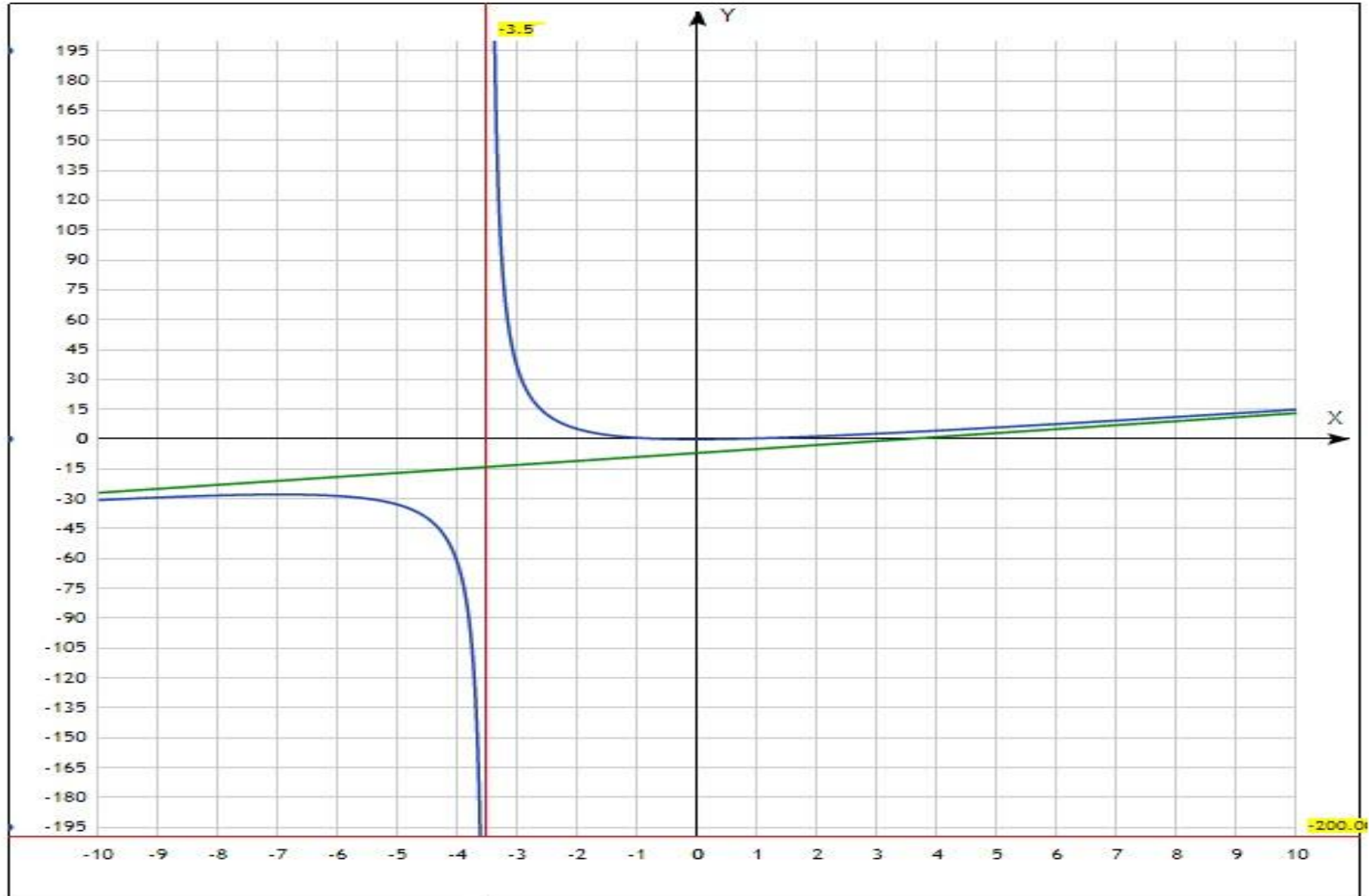
3) Для нахождения наклонной асимптоты вычислим пределы для расчета коэффициентов a и b :

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 1}{2x^2 + x} = 2.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx); b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 1}{2x + 7} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - 14x}{2x + 7} = -7$$

Уравнение наклонной асимптоты: $y = 2x - 7$.

Вот и вся любовь 😊

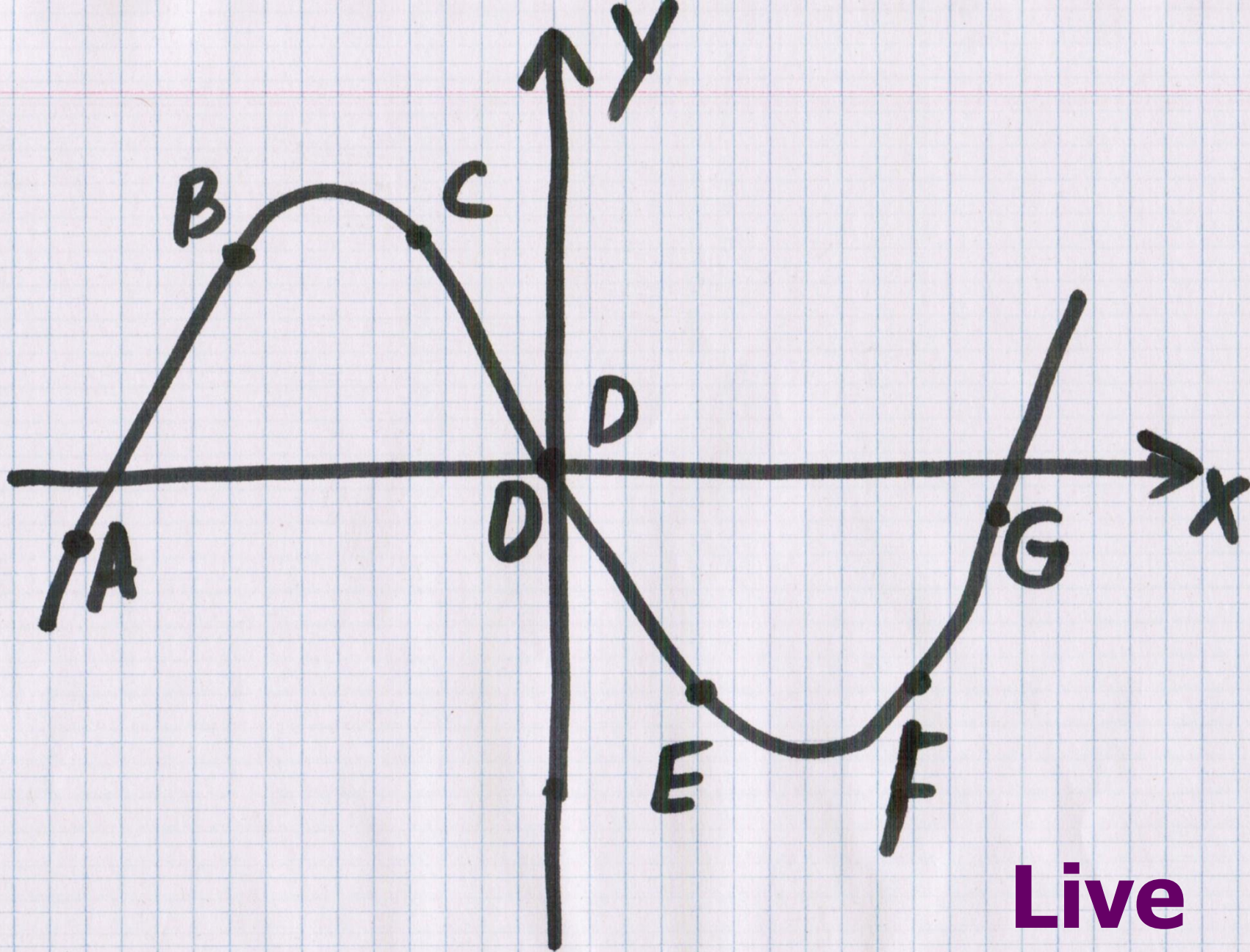


■ $y(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x + 7}$ [Показать таблицу точек](#)

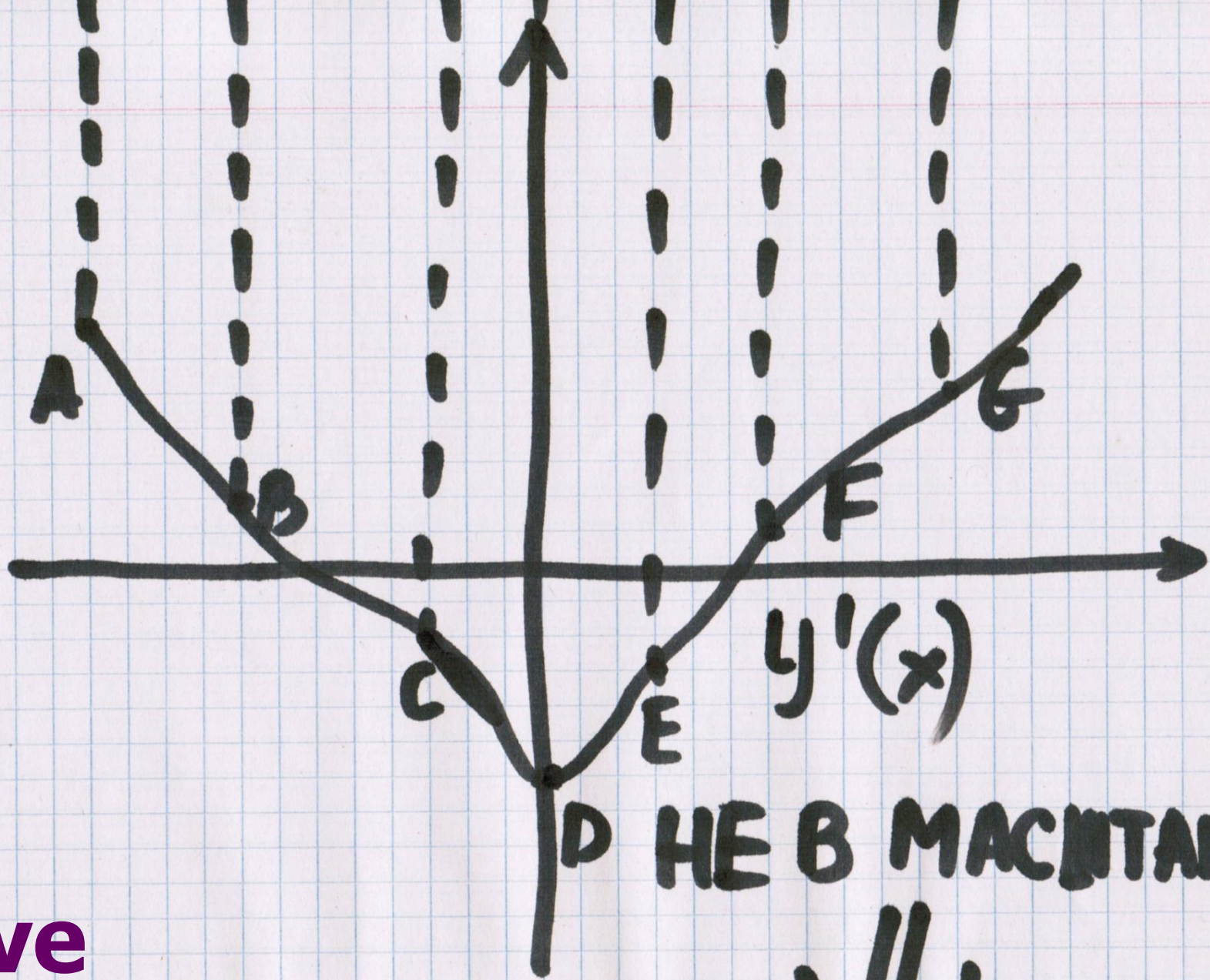
■ $y(x) = 2x - 7$ [Показать таблицу точек](#)

Часть 2. Производная функции

- Определение производной
- Геометрический смысл производной
- Связь между непрерывностью и дифференцируемостью
- Производные основных элементарных функций
- Правила дифференцирования
- Производная сложной функции
- Производная неявно заданной функции
- Логарифмическое дифференцирование



**Live
version**



НЕ В МАСШТАБЕ



Live
version

Определение производной

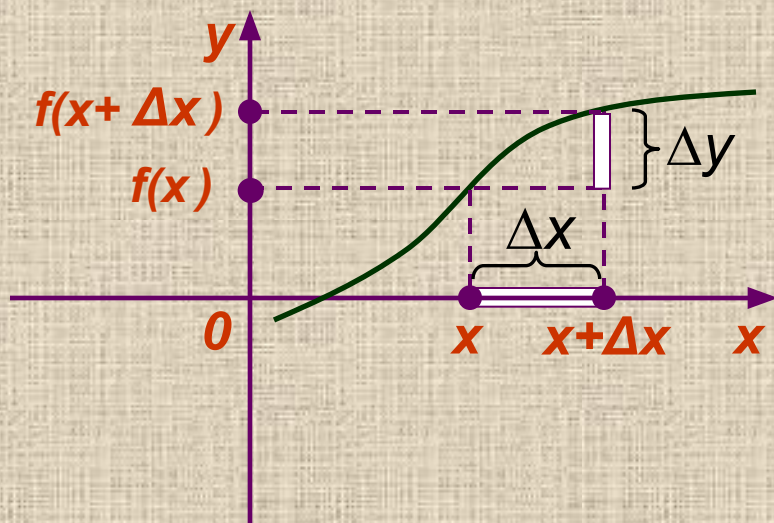
Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a; b)$.

Аргументу x придадим некоторое приращение Δx :

$$x + \Delta x \in (a; b)$$

Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



Если существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

то его называют производной функции $y = f(x)$ и обозначают одним из символов:

$$y'; \quad f'(x); \quad \frac{dy}{dx}$$

Определение производной

Итак, по определению:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется *дифференцируемой* в этом интервале; операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*.

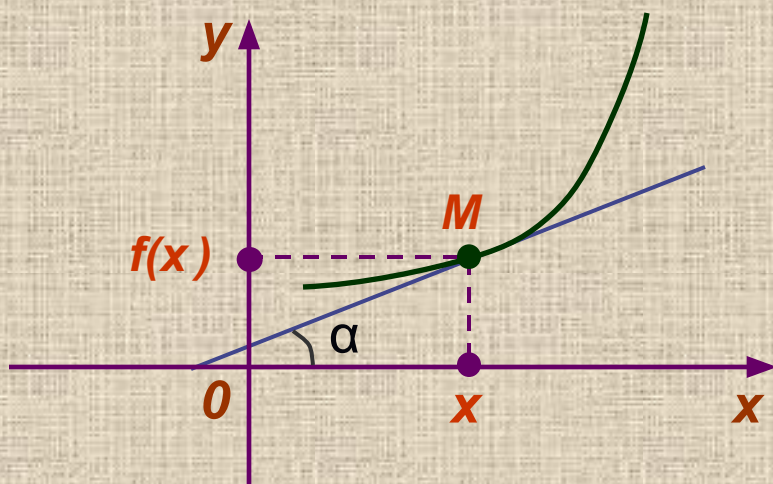
Значение производно функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается одним из символов:

$$y'(x_0); \quad f'(x_0); \quad y' \Big|_{x_0}$$

Если функция $y = f(x)$ описывает какой – либо физический процесс, то $f'(x)$ есть скорость протекания этого процесса – физический смысл производной.

Геометрический смысл производной

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 :



Через точки M и M_1 проведем секущую и обозначим через φ угол наклона секущей.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ в силу непрерывности функции Δy также стремится к нулю, поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M , а секущая MM_1 переходит в касательную.

$$\varphi \rightarrow \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi = \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$$

Геометрический смысл производной

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k = y'$$

Производная $f'(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x .

Если точка касания M имеет координаты $(x_0; y_0)$, угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Уравнение касательной
Уравнение нормали

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется **нормалью** к кривой.

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k_{\text{кас}}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

Доказательство:

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x , следовательно существует предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x) \Rightarrow$$

[где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$]

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \Rightarrow$$

По теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции

Функция $y = f(x)$ – непрерывна.

Обратное утверждение не верно: непрерывная функция может не иметь производной.

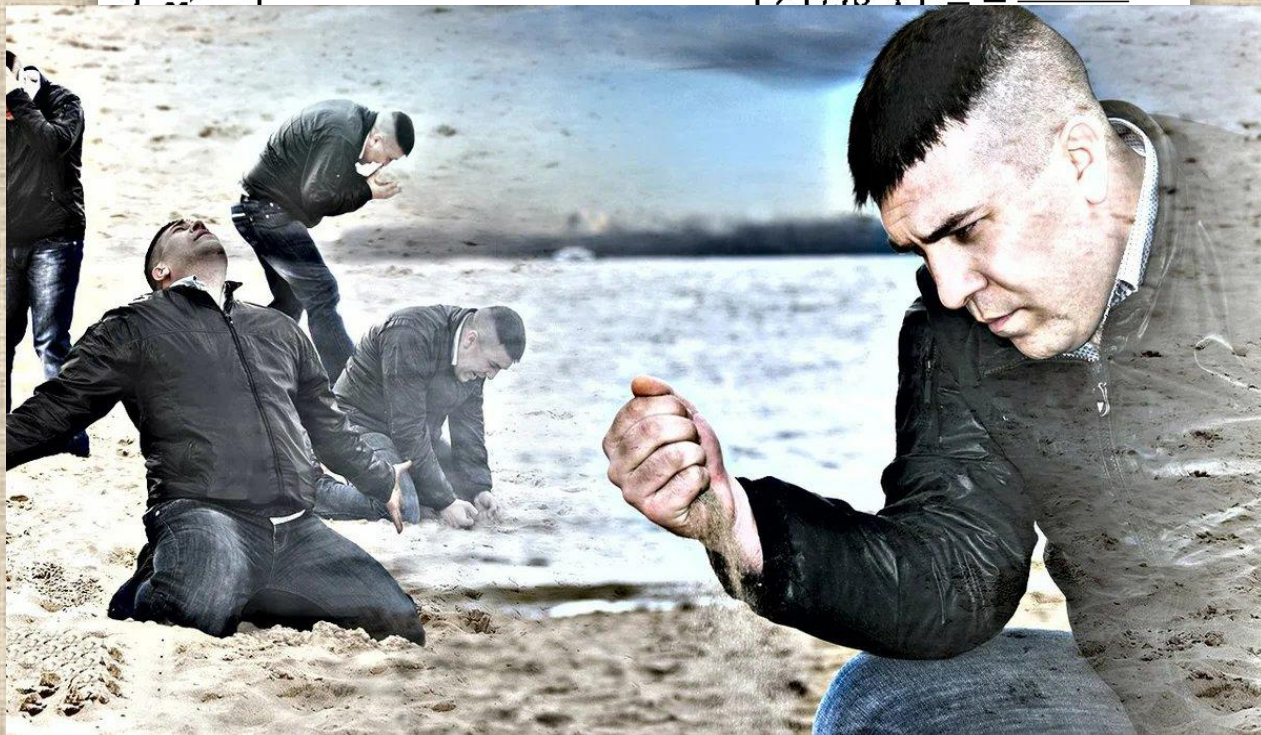
Производные основных элементарных функций

$$1. C' = 0$$

$$2. x' = 1$$

$$11. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$12. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$



$$9. (\sin x)' = \cos x$$

$$10. (\cos x)' = -\sin x$$

$$19. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$20. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Правила дифференцирования

Пусть $u(x)$, $v(x)$ и $w(x)$ – дифференцируемые в некотором интервале $(a; b)$ функции, C – постоянная.

- $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$

- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Rightarrow (C \cdot u)' = C \cdot u'$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{C}{v}\right)' = \frac{-C \cdot v'}{v^2}$

Пример

Вычислить производную функции $y = \frac{1 + \sin x}{x^3 \cdot \ln x}$

$$y' = \left(\frac{1 + \sin x}{x^3 \cdot \ln x} \right)'$$

$$= \frac{(1 + \sin x)' \cdot (x^3 \cdot \ln x) - (1 + \sin x) \cdot (x^3 \cdot \ln x)'}{(x^3 \cdot \ln x)^2}$$

$$= \frac{(1' + (\sin x)') \cdot (x^3 \cdot \ln x) - (1 + \sin x) \cdot ((x^3)' \cdot \ln x + x^3 (\ln x)')}{(x^3 \cdot \ln x)^2}$$

$$= \frac{\cos x \cdot x^3 \cdot \ln x - (1 + \sin x) \cdot (3x^2 \cdot \ln x + x^2)}{(x^3 \cdot \ln x)^2}$$

Пример

Вычислить производную функции $y = \cos(\ln^{12} x)$

Данную функцию можно представить следующим образом:

$$y = \cos u; \quad u = v^{12}; \quad v = \ln x$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

$$y'_u = -\sin u = -\sin v^{12} = -\sin(\ln^{12} x)$$

$$u' = 12v^{11} = 12\ln^{11} x$$

$$v' = \frac{1}{x}$$

$$y' = -\sin(\ln^{12} x) \cdot 12\ln^{11} x \cdot \frac{1}{x}$$

Коротко:

$$y' = (\cos(\ln^{12} x))' = -\sin(\ln^{12} x) \cdot (\ln^{12} x)'$$

$$= -\sin(\ln^{12} x) \cdot 12\ln^{11} x \cdot (\ln x)' =$$

Производная неявно заданной функции

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешенным относительно y , то говорят, что функция задана в **явном виде**.

Под неявным заданием функции понимают задание функции в виде уравнения не разрешенного относительно y :

$$F(x; y) = 0$$

Для нахождения производной неявно заданной функции необходимо продифференцировать уравнение по x , рассматривая при этом y как функцию от x , и полученное выражение разрешить относительно производной.

$$[x^3 + y^3 - 3xy]' = [0]' \Rightarrow (x^3)' + (y^3)' - 3(xy)' = 0 \Rightarrow$$

$$\cancel{3}x^2 + \cancel{3}y^2 \cdot y' - \cancel{3}(x'y + xy') = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 \cdot y' - y - xy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

Производная функции, заданной параметрически

Если функция задана параметрически: $\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$, то её производная определяется по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример. Найти производную функции: $\begin{cases} x = \sin \frac{t+4}{2} \\ y = \ln \cos t \end{cases}$.

Решение. $y'_t = \frac{1}{\cos t} \cdot (-\sin t) = -tg t.$

$$x'_t = \cos \left(\frac{t+4}{2} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$y'_x = \frac{-2tgt}{\cos \left(\frac{t+4}{2} \right)}$$

Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала **прологарифмировать**, а затем результат **продифференцировать**.

Такую операцию называют **логарифмическим дифференцированием**.

$$y = \frac{x^2 \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(2x+5)^5} \Rightarrow \ln y = \ln \frac{x^2 \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(2x+5)^5} \Rightarrow$$

$$[\ln y]' = \left[2 \ln x + \frac{3}{4} \ln(x-1) + x - 5 \ln(2x+5) \right]' \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(x-1)'}{x-1} + 1 - 5 \frac{(2x+5)'}{2x+5} \Rightarrow$$

$$y' = \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{4x-4} + 1 - \frac{10}{2x+5} \right) \cdot \frac{x^2 \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(2x+5)^5}$$

Логарифмическое дифференцирование

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции.

Функция $y = u(x)^{v(x)}$ называется **степенно – показательной**.

Производная такой функции находится только с помощью логарифмического дифференцирования.

$$y = (\sin x)^{x^2+1} \Rightarrow \ln y = \ln(\sin x)^{x^2+1} \Rightarrow$$

$$(\ln y)' = [(x^2 + 1) \cdot \ln(\sin x)]' \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = (x^2 + 1)' \cdot \ln(\sin x) + (x^2 + 1) \cdot (\ln(\sin x))' \Rightarrow$$

$$y' = \left(2x \cdot \ln(\sin x) + (x^2 + 1) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right) \cdot (\sin x)^{x^2+1}$$