ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ПРЕДЕЛЫ
И
НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

3.1. Предел функции в точке

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

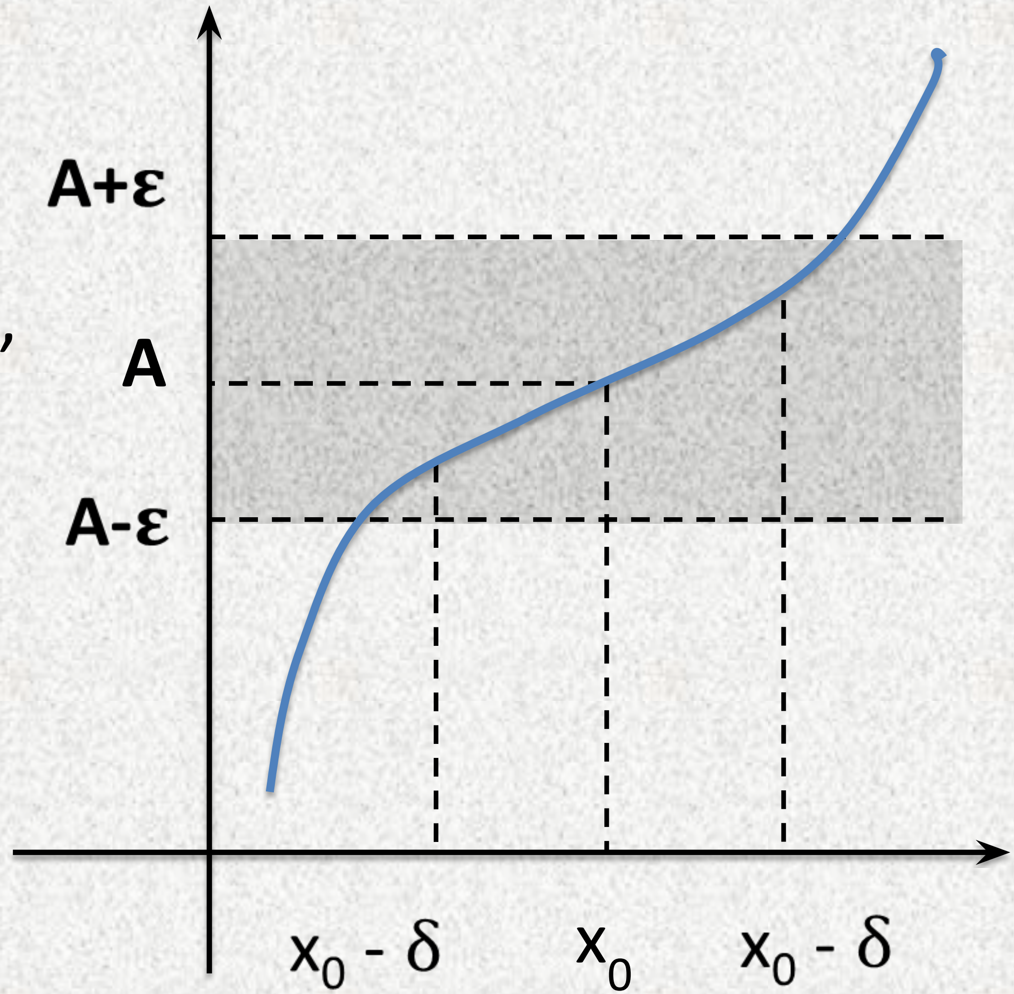
Число А называется пределом функции в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для все $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Этот предел функции обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Геометрический смысл предела функции:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Если для любой ε-окрестности точки А найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки А.

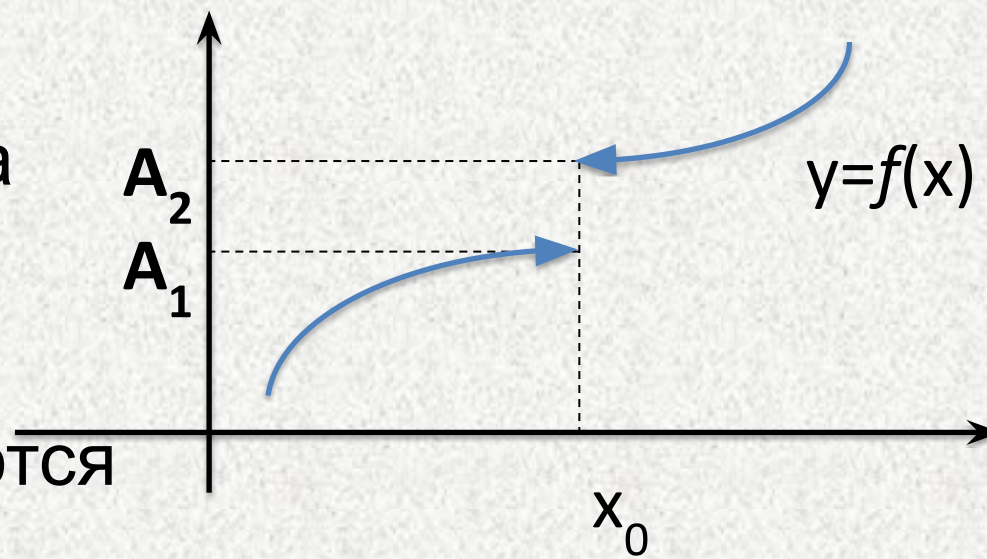


3.2. Односторонние пределы

► **Число A_1 называется пределом функции $y=f(x)$ слева** в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta=\delta(\varepsilon)> 0$ такое, что при $x \in (x_0-\delta;x_0)$, выполняется неравенство $|f(x)-A_1|<\varepsilon$.

Предел слева записывают так: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$

Аналогично определяется предел функции справа $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A_2$



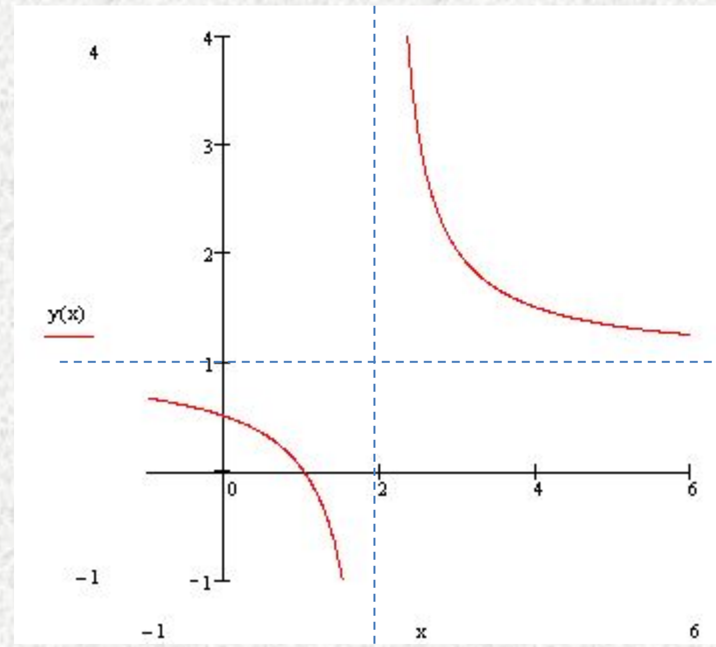
►Пределы функции слева и справа называются **односторонними**

3.3. Предел функции при x → ∞

Пусть функция y=ƒ(x) определена в промежутке (-∞;∞).

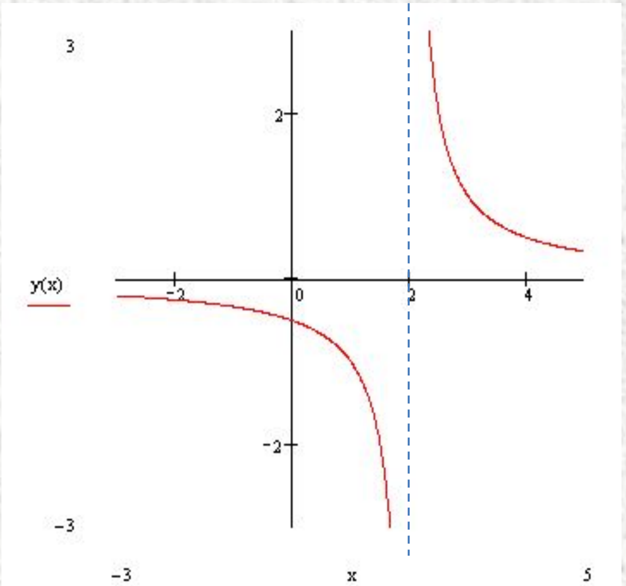
► Число А называется **пределом функции** ƒ(x) **при** x→**∞**, если для любого положительного числа ε существует такое число M=M(ε)>0, что при всех x, удовлетворяющих неравенству |x|>M выполняется неравенство |ƒ(x)-A|<ε.

$$\left(\lim_{x\to\infty} f(x) = A\right)$$

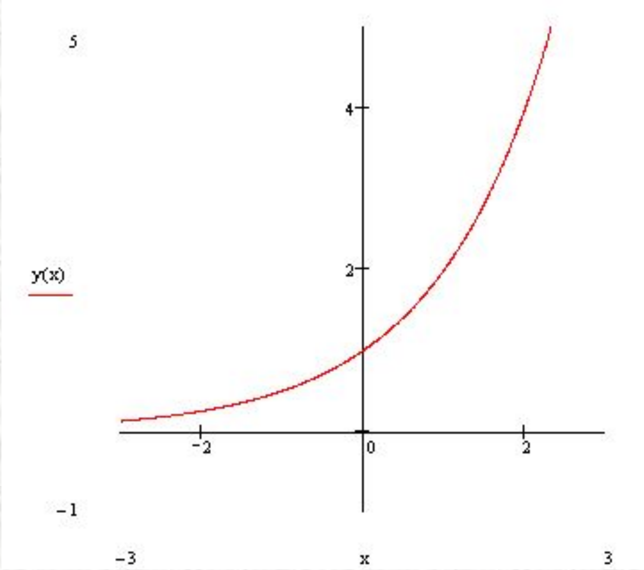


3.4. Бесконечно большая функция (б.б. ф.)

►Функция y=f(x) **называется бесконечно большой** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$



►Функция y=f(x), заданная на всей числовой прямой, **называется бесконечно большой** при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.



3.5. Бесконечно малая функция(б.м.ф)

3.5.1. Определения и основные теоремы

► Функция y=f(x) называется **бесконечно малой** при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Аналогично определяется б.м.ф. при $x \to x_0+0$, $x \to x_0-0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$: во всех этих случаях $\lim\limits_{x \to \cdots} f(x) = 0$.

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или бесконечно малыми. Обозначают б.м.ф. греческими буквами α, β и т. д.

Теорема 1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Теорема 2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.

Следствие 1. Так как всякая б.м.ф. ограничена, то из теоремы 2 вытекает: произведение двух б.м. ф. есть функция бесконечно малая.

Следствие 2. Произведение б.м.ф. на число есть функция бесконечно малая.

Теорема 3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая.

Теорема 4. Если функция α(x) — бесконечно малая (α ≠ 0), то функция 1/α(x) есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция *ƒ*(x)— бесконечно большая, то 1/*ƒ*(x) — бесконечно малая.

3.5.2. Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет при $x \to x_0$ ($x \to \infty$) предел, равный А, то ее можно представить как сумму числа А и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, т. е. если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$.(верна обратная теорема)

§4. Основные теоремы о пределах

Теорема.1. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Следствие. Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

Теорема.2. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x\to x_0} c \cdot g(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Теорема. 3. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю: $\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0}\frac{f(x)}{g(\mathrm{x})}=\frac{\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} f(x)}{\lim\limits_{\mathrm{x}\to\mathrm{x}_0} g(x)}$.

§5. Основные способы вычисления пределов.

При вычислении пределов появляются выражения, значение которых не определено. Такие выражения называют **неопределенностями**.

Алгоритм решения.

1. Подставить в выражение предельное значение аргумента.
2. Определить есть или нет неопределенность. Если нет неопределенности, дать ответ.
3. Если неопределенность есть, то по ее виду выбрать один из методов устранения этой неопределенности.
4. Преобразовать выражение согласно выбранному способу, и к новой форме предела применить данный алгоритм, начиная с п.1

Способ 1. **Применение формул**(нахождение корней квадратного уравнения, формулы сокращенного умножения, тригонометрические формулы).

Способ 4. Первый замечательный предел

Пример: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin4x}{5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4sin4x}{5x4}=\frac{4}{5}.$

Пример: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3sin3x}{2x\ 3\ cos3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{2cos3x}=\frac{3}{2}.$

Пример: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-cos3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[1-cosx=2sin^2\frac{x}{2}\right]=$

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2sin^2\frac{3x}{2}}=\lim\frac{x\cdot x}{\quad}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}\cdot x\cdot x\cdot\frac{3}{2}}{2sin\frac{3x}{2}sin\frac{3x}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{2}{9}.$$

Способ 5. Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Примеры:

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{5x+1}$
- $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{x}}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{2x}$

Задача о непрерывном начислении процентов

A_0 – первоначальный вклад в банк.

Банк выплачивает ежегодно p% годовых.

Найдем размер вклада A_1 через *t* лет.

Если начислять проценты % не раз в год, а n раз (n=2-полугодие, n=4- квартал, n=12- ежемесячно, n=365- ежедневно и т.д.).

Формула может быть использована при непрерывном вычислении процентов

§6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

6.1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

Определение 1 Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0,** если:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности;

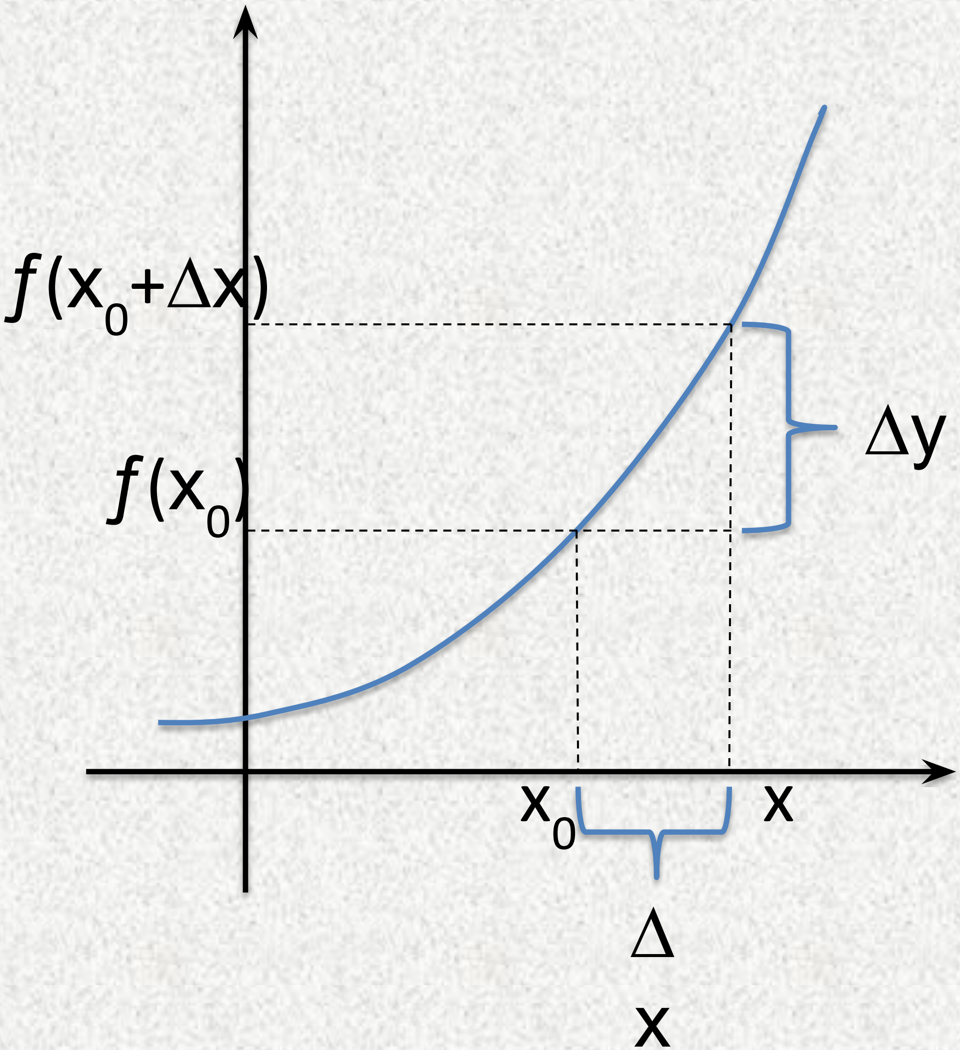
2) существуют **конечные** $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ в точке x_0;

3) $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$.

Функция будет разрывной, если не выполнено хотя бы одно условие.

Определение 2. Функция y=f(x) называется **непрерывной в точке x_0,** если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.



$\Delta x = x - x_0$

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

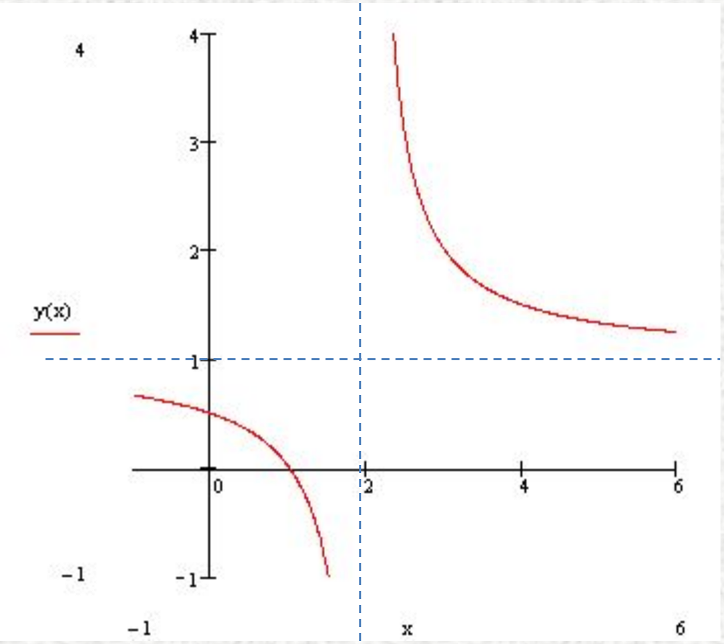
6.2. Точки разрыва функции и их классификация

►Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются **точками разрыва этой функции**.

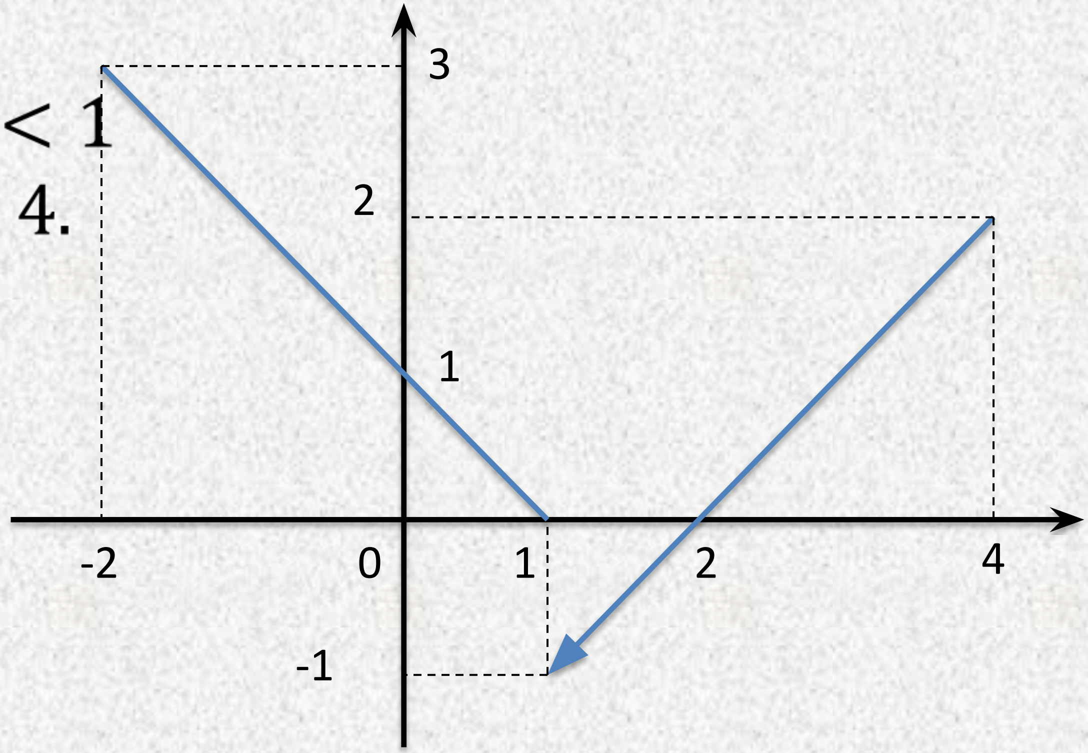
Если $x = x_0$ — точка разрыва функции $y=f(x)$, то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий первого определения непрерывности функции.

Примеры:

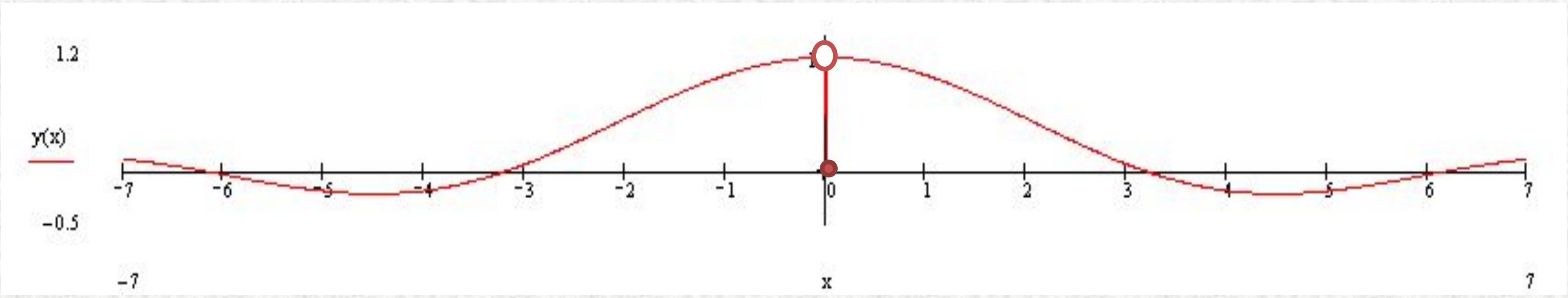
1) $y = \frac{1}{x-2} + 1$



2) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } -2 \le x < 1 \\ x - 2, & \text{если } 1 \le x < 4. \end{cases}$



3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \ne 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$



Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.

►Точка разрыва x_0 **называется точкой разрыва первого** рода функции y=ƒ(x), если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, т. е.

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = A_1 \text{ и } \lim_{x \to x_0-0} f(x) = A_2$$

а) если $A_1=A_2$, то точка x_0 называется точкой **устранимого разрыва**;

б) если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется точкой **конечного разрыва**.

►Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции y=ƒ(x), если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

Примеры: Исследовать функцию на непрерывность

- $f(x) = 2^{\frac{1}{2-x}}+1$
- $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$
- $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$
- $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \le 0, \\ 2x, & 0 \le x < 3, \\ x-1, & x \ge 3. \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ sin2x, & 0 \le x < \pi, \\ 3, & x \ge \pi. \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - \frac{1}{2}, & -2 \le x < 1, \\ x+1, & 1 < x \le 4, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$