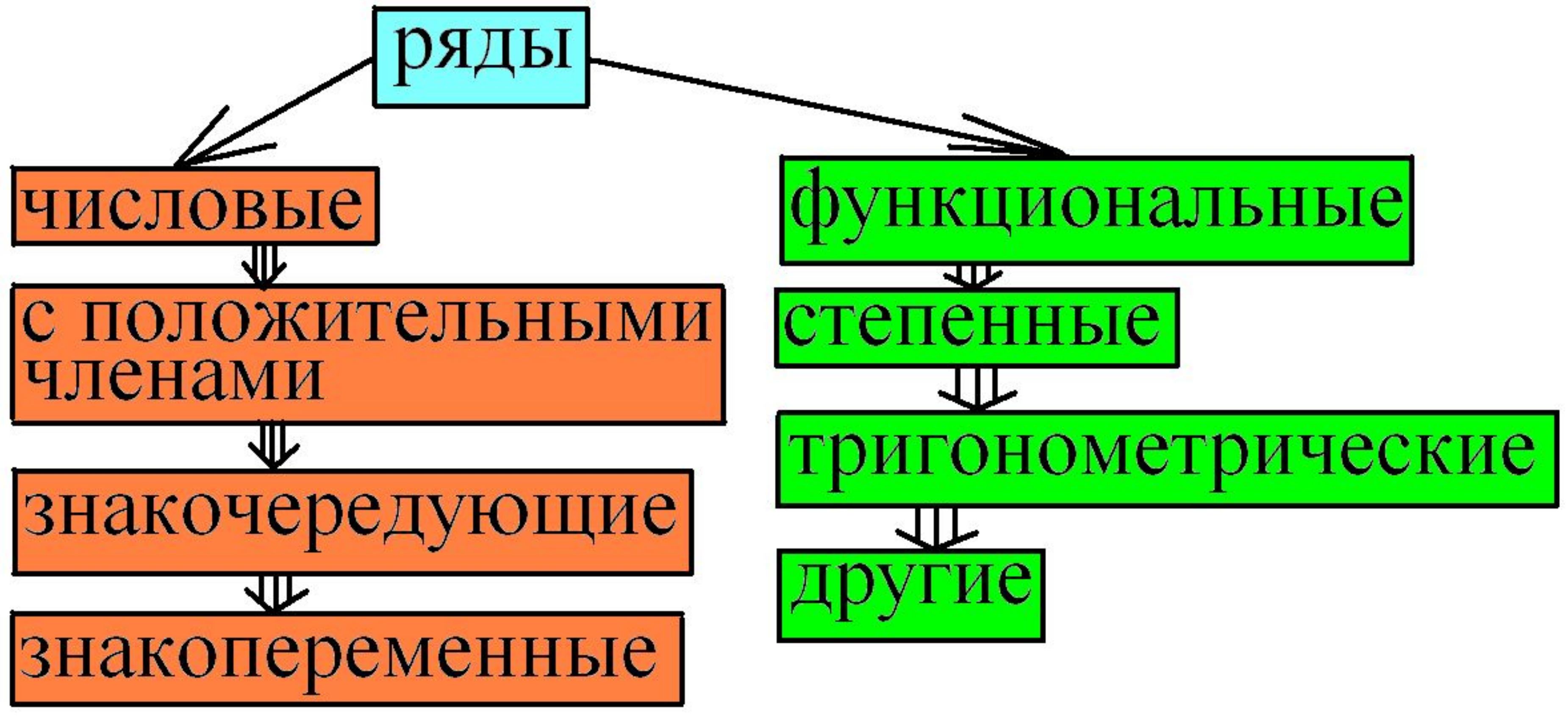
Лекция № 7

РЯДЫ

Новая математическая конструкция: сложение бесконечного числа слагаемых. Использует идею предела.

Много приложений, т.к. можно решить почти любую математическую задачу.



ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Из бесконечной последовательности чисел – членов ряда

$$u_1, u_2, ..., u_n, ...$$

Строится новая последовательность: **частичных сумм** ряда

$$
\begin{aligned}
&S_1 = u_1\ ;\\
&S_2 = u_1 + u_2\ ;\\
&S_3 = u_1 + u_2 + u_3\ ;\\
&\cdots\\
&S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n\ ;\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

Определение. Если существует конечный предел частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

то он называется суммой бесконечного числового ряда

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

и в этом случае говорят, что ряд **сходится.**

Определение. Если у частичных сумм предел равен бесконечности или не существует, то говорят, что бесконечный ряд

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

расходится.

Пример 1. Геометрическая прогрессия с

$$u_1 = a\ ,\ \ u_2 = qu_1 = aq\ ,\ \ u_3 = qu_2 = aq^2\ , ...,\ \ u_n = qu_{n-1} = aq^{n-1}$$

Сумма бесконечного числа членов геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + ... + aq^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

$$\begin{array}{rcl} & S_n & = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + ... + aq^{n-1} \\ - & & \\ & qS_n & = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + ... + aq^{n-1} + aq^n \\ \hline \end{array}$$

$$(1-q)S_n = a - aq^n$$

Если $q \neq 1$, то

$$S_n = a\frac{(1-q^n)}{(1-q)}\ ; \quad \lim_{n\to\infty} S_n = a\frac{(1-\lim_{n\to\infty} q^n)}{(1-q)}$$

Если $|q| < 1$ то ряд из членов геометрической прогрессии **сходится**

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = a\frac{(1-\lim_{n\to\infty} q^n)}{(1-q)} = a\frac{(1-0)}{(1-q)} = \frac{a}{1-q}$$

Если $|q| > 1$ то ряд из членов геометрической прогрессии **расходится**

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty \implies \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

Самостоятельно случай $q = \pm 1$.

Пример 2. Гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ ; \quad u_n=\frac{1}{n}$$

расходится, т.к. у него

$$S_n \approx \ln n\ ; \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

Простейшие свойства числовых рядов

1. Добавление или отбрасывание конечного числа членов ряда не изменяет характер сходимости: расходящийся ряд остается расходящимся, сходящийся – сходящимся, но сумма сходящегося ряда при этом меняется.

2. Необходимый признак сходимости рядов. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

сходится, то его общее слагаемое стремится к нулю

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Обратное неверно: есть ряды, у которых $u_n \to 0$ при $n \to \infty$, но они расходятся.

Например, **гармонический ряд расходится,** хотя

$$u_n = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Доказательство необходимого признака: $S_n = S_{n-1} + u_n$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_{n-1} + u_n) = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} + \lim_{n\to\infty} u_n$$

$$S = S + \lim_{n\to\infty} u_n \implies \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

3. (Следствие 2.) Если общее слагаемое ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.

4. Сходящийся ряд можно почленно умножать на число:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot u_n = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n; \quad k \neq 0$$

5. Сходящиеся ряды можно почленно складывать:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$$

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \; ; \quad u_n > 0$$

Признаки сравнения

1. Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \; , \; \sum_{n=1}^{\infty} v_n \; ; \quad u_n > v_n > 0$$

т.е. первый ряд "больше" второго:
первый ряд **мажорирует** второй ряд.
Тогда:
если "больший" ряд сходится, то и "меньший" сходится;
если "меньший" ряд расходится, то и "больший" расходится.

Доказательство расходимости гармонического ряда.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+$$

$$+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\ldots$$

данный гармонический ряд "больше" такого ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+$$

$$+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 4+\frac{1}{16}\cdot 8+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

Последний ряд расходится, т.к. у него $u_n=\frac{1}{2}\not\to 0$.

2. Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ , \quad u_n > 0 \ ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ , \quad v_n > 0$$

и пусть существует конечный, не равный нулю предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0$$

Тогда оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Для применения этого признака используют **эталонные** ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \ , \quad p = \text{const} > 0$$

При $0 < p \leq 1$ эталонные ряды **расходятся**.

При $p > 1$ эталонные ряды **сходятся**.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}\,, \quad u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$$

В общем члене ряда оставляем только старшие слагаемые

$$\frac{n+1}{n^2+1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = v_n$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n+1}{n^2+1} : \frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n}{(n^2+1)\cdot 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1 \neq 0$$

Следовательно ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}\,, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ведут себя одинаково, но второй ряд – гармонический, он расходится. Следовательно, исходный ряд тоже расходится.

Самостоятельно исследовать сходимость ряда : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+4}{n^4+1}$

Доказательство второго признака сходимости.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N : \quad \forall n > N$$

$$A - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < A + \varepsilon$$

Пусть ряд, стоящий в числителе, расходится. Тогда

$$\frac{u_n}{v_n} < A + \varepsilon \implies u_n < (A+\varepsilon)v_n$$

"Меньший" ряд расходится,

поэтому "больший" ряд тоже расходится.

Самостоятельно доказать остальные случаи!!!

Признак Даламбера

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

"последующий делить на предыдущий"

$\ell < 1 \Rightarrow$ ряд сходится;

$\ell > 1 \Rightarrow$ ряд расходится;

$\ell = 1 \Rightarrow$ признак Даламбера ответа не дает.

Пример 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}\ , \quad u_n = \frac{n^4}{2^n}\ , \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^4}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)^4}{2^{n+1}} : \frac{n^4}{2^n} \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4}{2} = \frac{1}{2} < 1\ , \quad \text{ряд сходится}$$

Пример 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}\ , \quad u_n=\frac{3^n}{n^3}\ , \quad u_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}:\frac{3^n}{n^3}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot n^3}{(n+1)^3\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}=3>1\ , \quad \text{ряд расходится}$$

Пример 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ гармонический ряд – расходится

$$u_n = \frac{1}{n}\,, \;\; u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n+1} : \frac{1}{n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1\,;$$

ряд расходится, при этом $\ell = 1$

Пример 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

эталонный ряд с $p = 2 > 1$ − ряд сходится

$$u_n = \frac{1}{n^2}, \; u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{(n+1)^2} : \frac{1}{n^2}\right] =$$

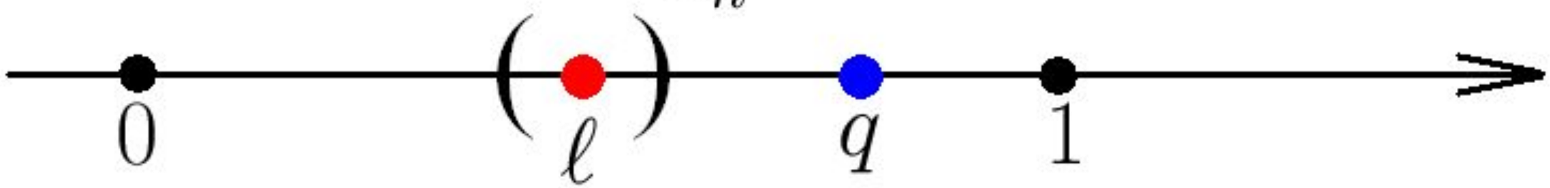
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

ряд сходится, при этом $\ell = 1$

Доказательство. Случай $\ell < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \iff \forall \varepsilon \ \exists N: \quad \forall n > N$$

$$0 < \ell - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon = q < 1$$



$$u_{N+1} < u_N \cdot q; \quad u_{N+2} < u_{N+1} \cdot q < u_N \cdot q^2;$$

$$u_{N+3} < u_{N+2} \cdot q < u_N \cdot q^3; \dots \quad u_{N+m} < u_N \cdot q^m$$

$v_m = u_N \cdot q^m$ – сходящаяся геометр. прогрессия, т.к. $0 < q < 1$ и "больший" ряд из v_m сходится, поэтому "хвост" исходного сходится, т.е. и весь исходный сходится

Случай $\ell > 1$:

$$1 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \Longrightarrow u_{n+1} > u_n \Longrightarrow u_{n+1} \nearrow \Longrightarrow u_{n+1} \not\to 0$$

ряд расходится.

Интегральный признак

Теорема. *Если* $y = f(x)$ *есть неотрицательная, монотонно убывающая функция*

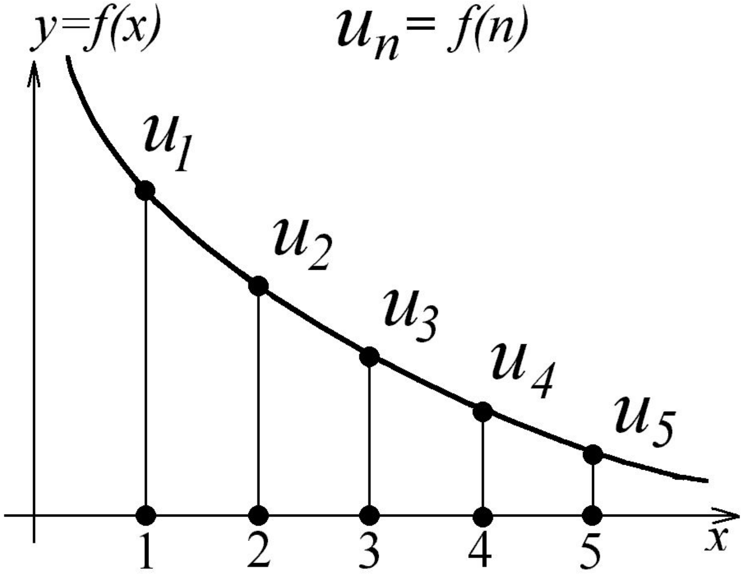
$$y = f(x) > 0; \quad x_2 > x_1 \implies f(x_2) < f(x_1),$$

такая, что

$$f(n) = u_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

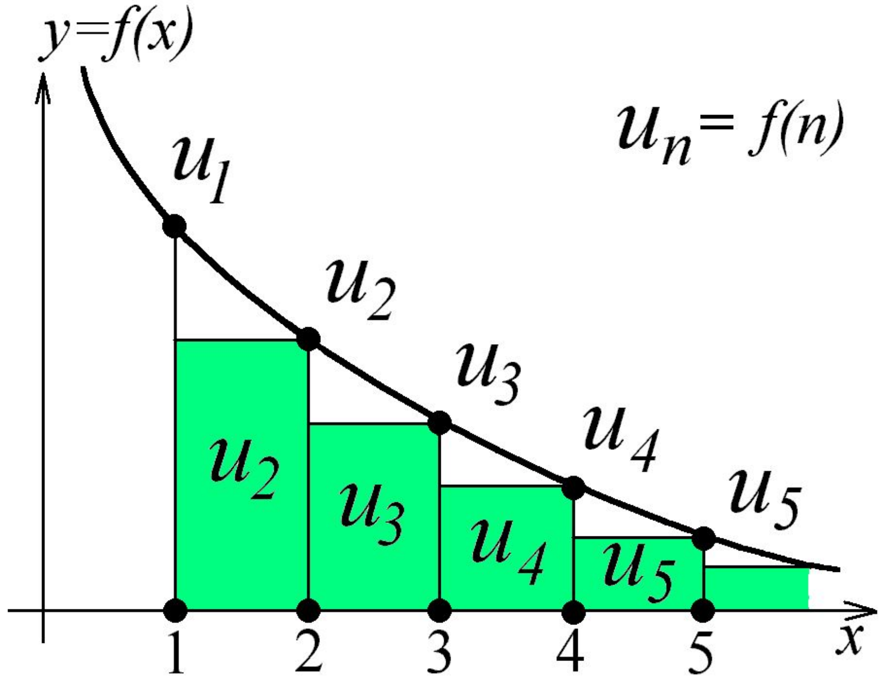
то одновременно либо сходятся, либо расходятся

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$



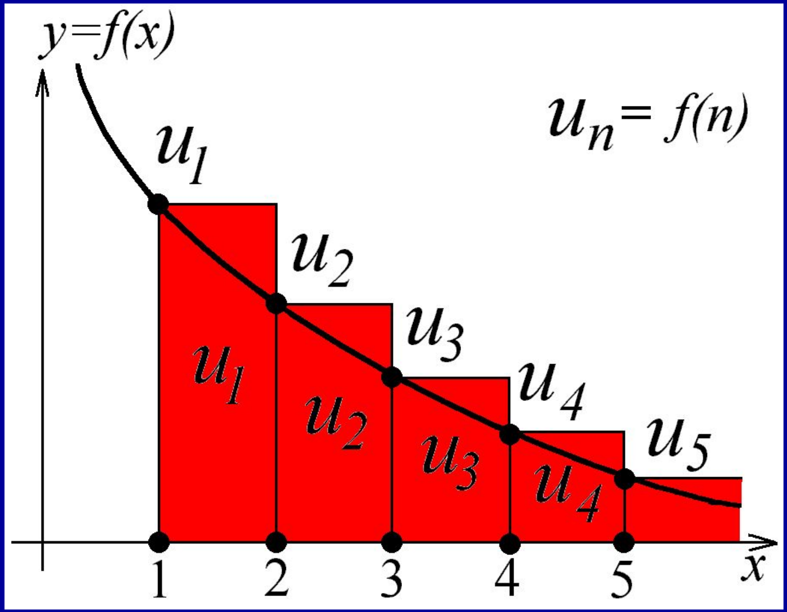
несобственный интеграл и ряд.

Доказательство. Пусть интеграл сходится, т.е. площадь криволинейной трапеции конечна. А она больше площади "зеленых" прямоугольников:



$$\int_1^{+\infty} f(x)dx > u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

Пусть интеграл расходится, т.е. площадь криволинейной трапеции бесконечна. А она меньше площади "красных" прямоугольников:



$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots > \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

Поэтому сходимость эталонных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p = \text{const} > 0$

такая же, как у эталонных интегралов

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

при $0 < p \le 1:$ расходимость

при $p > 1:$ сходимость

Знакочередующиеся ряды

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \ , \quad u_n > 0$$

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \ , \quad u_n > 0$$

Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов

Если u_n — слагаемые знакочередующегося ряда — монотонно стремятся к нулю, т.е.

$$u_n > u_{n+1} > u_{n+2} > ... \ ; \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \ ;$$

то знакочередующийся ряд сходится.

Замечание. Для рядов с положительными слагаемыми условие

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

еще не гарантирует сходимости ряда, т.е.
для рядов с положительными слагаемыми это **необходимое** условие, но **не достаточное**.

Доказательство признака Лейбница.

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + u_{2n-1} - u_{2n} =$$

$$= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + ... + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

Из-за монотонности u_n каждая скобка положительна:

$$(u_1 - u_2) > 0 \ , \quad (u_3 - u_4) > 0 \ , \quad ..., \ (u_{2n-1} - u_{2n}) > 0,$$

поэтому $S_{2n} \nearrow$ – возрастает.

С другой стороны:

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - ... - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1,$$

т.е. S_{2n} — ограничена.

По "лемме о двух милиционерах":

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S < +\infty$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = S + 0 = S$$

Признак Лейбница доказан.

Пример. Исследовать сходимость ряда:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

$$u_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = u_{n+1}\ , \quad \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

Если в сходящемся знакочередующемся ряду отбросить "хвост" ряда, то оставшаяся конечная сумма отличается от точной суммы бесконечного ряда не более чем на модуль первого отброшенного члена ряда.