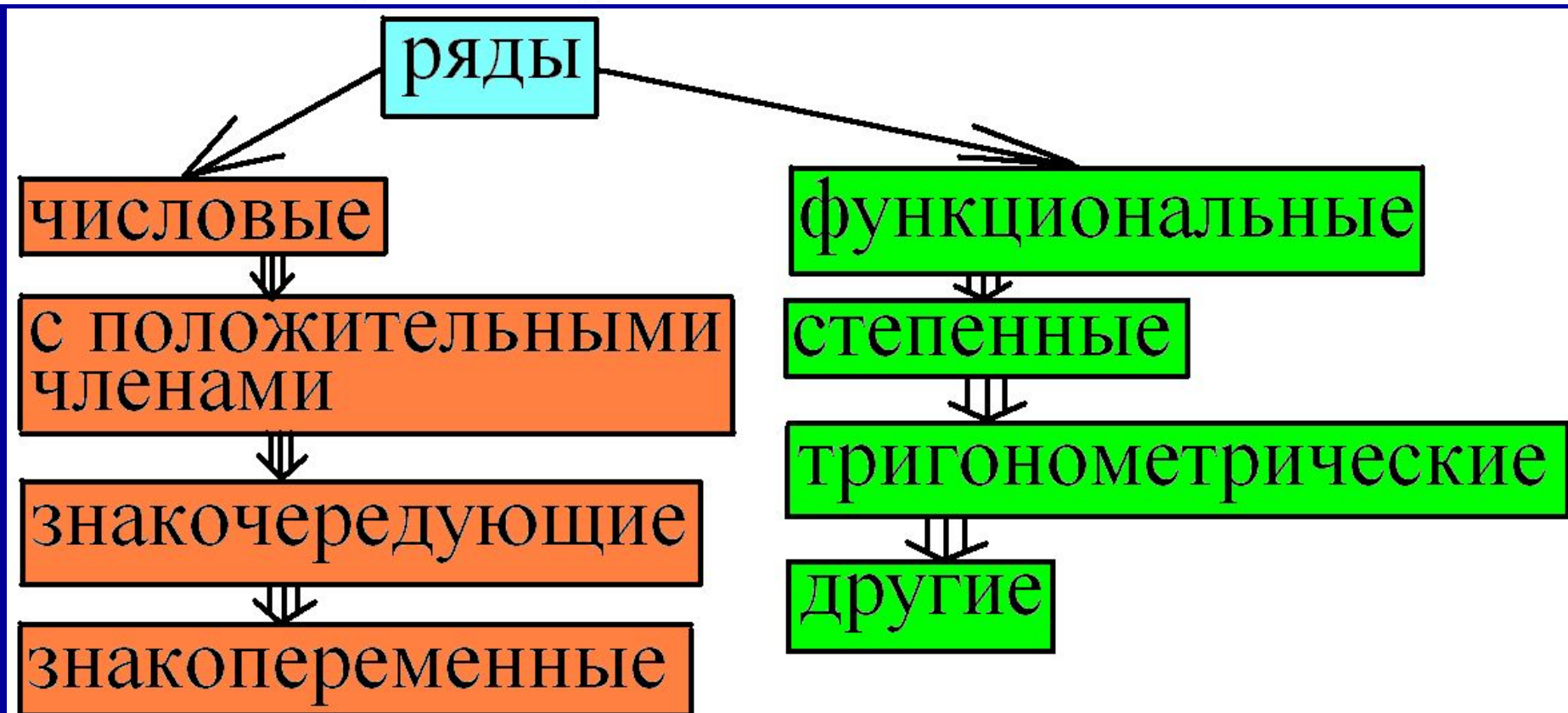


РЯДЫ

Новая математическая конструкция: сложение бесконечного числа слагаемых. Использует идею предела.

Много приложений, т.к. можно решить почти любую математическую задачу.



ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Из бесконечной последовательности чисел – членов ряда

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

Строится новая последовательность: **частичных сумм** ряда

$$S_1 = u_1 ;$$

$$S_2 = u_1 + u_2 ;$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 ;$$

...

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n ;$$

...

Определение. Если существует конечный предел частичных сумм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

то он называется суммой бесконечного числового ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

и в этом случае говорят, что ряд **сходится**.

Определение. Если у частичных сумм предел равен бесконечности или не существует, то говорят, что бесконечный ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

расходится.

Пример 1. Геометрическая прогрессия с

$$u_1 = a, \quad u_2 = qu_1 = aq, \quad u_3 = qu_2 = aq^2, \dots, \quad u_n = qu_{n-1} = aq^{n-1}$$

Сумма бесконечного числа членов геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \dots + aq^{n-1}$$

$$- \quad qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

$$(1 - q)S_n = a - aq^n$$

Если $q \neq 1$, то

$$S_n = a \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)} ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a \frac{(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n)}{(1 - q)}$$

Если $|q| < 1$ то ряд из членов геометрической прогрессии **сходится**

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a \frac{(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n)}{(1 - q)} = a \frac{(1 - 0)}{(1 - q)} = \frac{a}{1 - q}$$

Если $|q| > 1$ то ряд из членов геометрической прогрессии **расходится**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

Самостоятельно случай $q = \pm 1$.

Пример 2. Гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}; \quad u_n = \frac{1}{n}$$

расходится, т.к. у него

$$S_n \approx \ln n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

Простейшие свойства числовых рядов

1. Добавление или отбрасывание конечного числа членов ряда не изменяет характер сходимости: расходящийся ряд остается расходящимся, сходящийся – сходящимся, но сумма сходящегося ряда при этом меняется.

2. **Необходимый признак сходимости рядов.** Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

сходится, то его общее слагаемое стремится к нулю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Обратное неверно: есть ряды, у которых $u_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, но они расходятся.

Например, гармонический ряд расходится, хотя

$$u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Доказательство необходимого признака: $S_n = S_{n-1} + u_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n-1} + u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

$$S = S + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

3. (Следствие 2.) Если общее слагаемое ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.

4. Сходящийся ряд можно почленно умножать на число:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot u_n = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u_n; \quad k \neq 0$$

5. Сходящиеся ряды можно почленно складывать:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$$

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n ; \quad u_n > 0$$

Признаки сравнения

1. Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n , \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n ; \quad u_n > v_n > 0$$

т.е. первый ряд "больше" второго:
первый ряд **мажорирует** второй ряд.

Тогда:

если "большой" ряд сходится, то и "меньший" сходится;
если "меньший" ряд расходится, то и "большой" расходится.

Доказательство расходимости гармонического ряда.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \\ + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$$

данный гармонический ряд "больше" такого ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \\ + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots = \\ = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 + \dots = \\ = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Последний ряд расходится, т.к. у него $u_n = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$.

2. Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n > 0; \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad v_n > 0$$

и пусть существует конечный, не равный нулю предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0$$

Тогда оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Для применения этого признака используют **эталонные** ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p = \text{const} > 0$$

При $0 < p \leq 1$ эталонные ряды **расходятся**.

При $p > 1$ эталонные ряды **сходятся**.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}, \quad u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$$

В общем члене ряда оставляем только старшие слагаемые

$$\frac{n+1}{n^2+1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = v_n$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{n^2+1} : \frac{1}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n}{(n^2+1) \cdot 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1 \neq 0$$

Следовательно ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ведут себя одинаково, но второй ряд – гармонический, он расходится. Следовательно, исходный ряд тоже расходится.

Самостоятельно исследовать сходимость ряда : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 4}{n^4 + 1}$

Доказательство второго признака сходимости.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N$$

$$A - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < A + \varepsilon$$

Пусть ряд, стоящий в числителе, расходится. Тогда

$$\frac{u_n}{v_n} < A + \varepsilon \implies u_n < (A + \varepsilon)v_n$$

"Меньший" ряд расходится,
поэтому "большой" ряд тоже расходится.

Самостоятельно доказать остальные случаи!!!

Признак Даламбера

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

"последующий делить на предыдущий"

$\ell < 1 \Rightarrow$ ряд сходится;

$\ell > 1 \Rightarrow$ ряд расходится;

$\ell = 1 \Rightarrow$ признак Даламбера ответа не дает.

Пример 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}, \quad u_n = \frac{n^4}{2^n}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^4}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)^4}{2^{n+1}} : \frac{n^4}{2^n} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4}{2} = \frac{1}{2} < 1, \quad \text{ряд сходится}$$

Пример 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}, \quad u_n = \frac{3^n}{n^3}, \quad u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3} : \frac{3^n}{n^3} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot n^3}{(n+1)^3 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} = 3 > 1, \quad \text{ряд расходится}$$

Пример 3.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармонический ряд – расходится

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} : \frac{1}{n} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1; \end{aligned}$$

ряд расходится, при этом $\ell = 1$

Пример 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

эталонный ряд с $p = 2 > 1$ – ряд сходится

$$u_n = \frac{1}{n^2}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(n+1)^2} : \frac{1}{n^2} \right] =$$

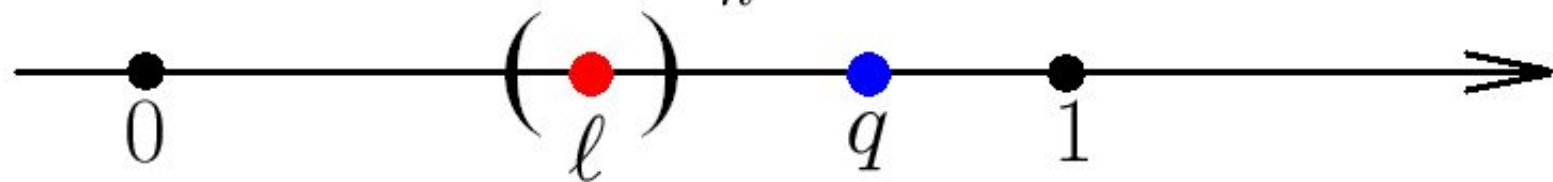
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

ряд сходится, при этом $\ell = 1$

Доказательство. Случай $\ell < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \iff \forall \varepsilon \exists N : \forall n > N$$

$$0 < \ell - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon = q < 1$$



$$u_{N+1} < u_N \cdot q; \quad u_{N+2} < u_{N+1} \cdot q < u_N \cdot q^2;$$

$$u_{N+3} < u_{N+2} \cdot q < u_N \cdot q^3; \dots \quad u_{N+m} < u_N \cdot q^m$$

$v_m = u_N \cdot q^m$ – сходящаяся геометр. прогрессия,
т.к. $0 < q < 1$ и "большой" ряд из v_m сходится,
поэтому "хвост" исходного сходится,

т.е. и весь исходный сходится

Случай $\ell > 1$:

$$1 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \implies u_{n+1} > u_n \implies u_{n+1} \nearrow \implies u_{n+1} \not\rightarrow 0$$

ряд расходится.

Интегральный признак

Теорема. Если $y = f(x)$ есть неотрицательная, монотонно убывающая функция

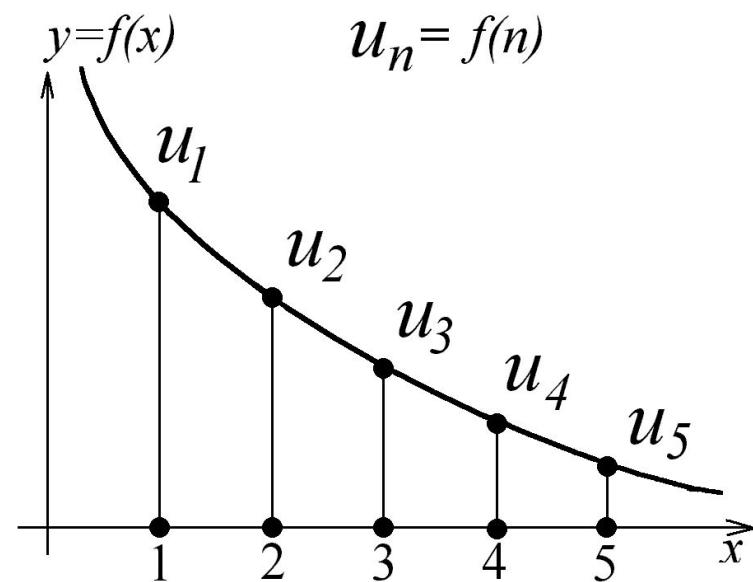
$$y = f(x) > 0; \quad x_2 > x_1 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) < f(x_1),$$

такая, что

$$f(n) = u_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

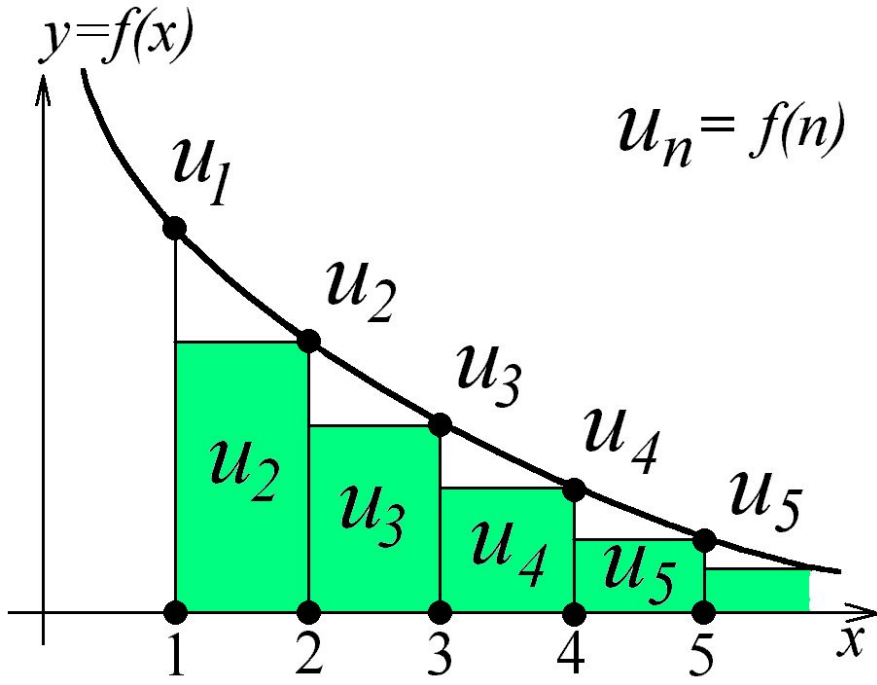
то одновременно либо сходится, либо расходятся

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$



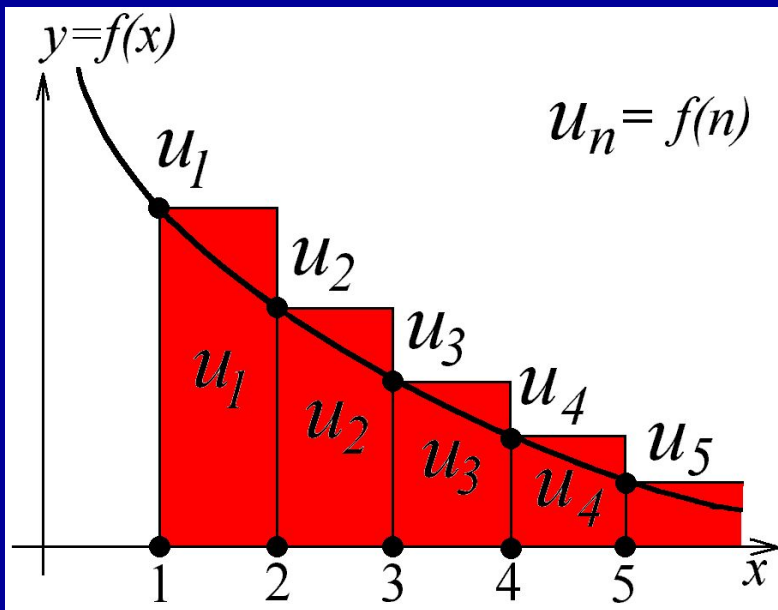
несобственный интеграл и ряд.

Доказательство. Пусть интеграл сходится, т.е. площадь криволинейной трапеции конечна. А она больше площади "зеленых" прямоугольников:



$$\int_1^{+\infty} f(x)dx > u_2 + u_3 + u_4 + \dots$$

Пусть интеграл расходится, т.е. площадь криволинейной трапеции бесконечна. А она меньше площади "красных" прямоугольников:



$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots > \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

Поэтому сходимость эталонных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p = \text{const} > 0$

такая же, как у эталонных интегралов

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

при $0 < p \leq 1$: расходимость
при $p > 1$: сходимость

Знакопередающиеся ряды

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \quad u_n > 0$$

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n, \quad u_n > 0$$

Признак Лейбница сходимости знакопередающихся рядов

Если u_n — слагаемые знакопередающегося ряда — монотонно стремятся к нулю, т.е.

$$u_n > u_{n+1} > u_{n+2} > \dots; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0;$$

то знакопередающийся ряд сходится.

Замечание. Для рядов с положительными слагаемыми условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

еще не гарантирует сходимости ряда, т.е.

для рядов с положительными слагаемыми это **необходимое** условие, но **не достаточное**.

Доказательство признака Лейбница.

$$\begin{aligned} S_{2n} &= u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2n-1} - u_{2n} = \\ &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \end{aligned}$$

Из-за монотонности u_n каждая скобка положительна:

$$(u_1 - u_2) > 0, \quad (u_3 - u_4) > 0, \quad \dots, \quad (u_{2n-1} - u_{2n}) > 0,$$

поэтому $S_{2n} \nearrow$ – возрастает.

С другой стороны:

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1,$$

т.е. S_{2n} – ограничена.

По "лемме о двух милиционерах":

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S < +\infty$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = S + 0 = S$$

Признак Лейбница доказан.

Пример. Исследовать сходимость ряда:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

$$u_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = u_{n+1}, \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

Если в сходящемся знакопередающемся ряду отбросить "хвост" ряда, то оставшаяся конечная сумма отличается от точной суммы бесконечного ряда не более чем на модуль первого отброшенного члена ряда.