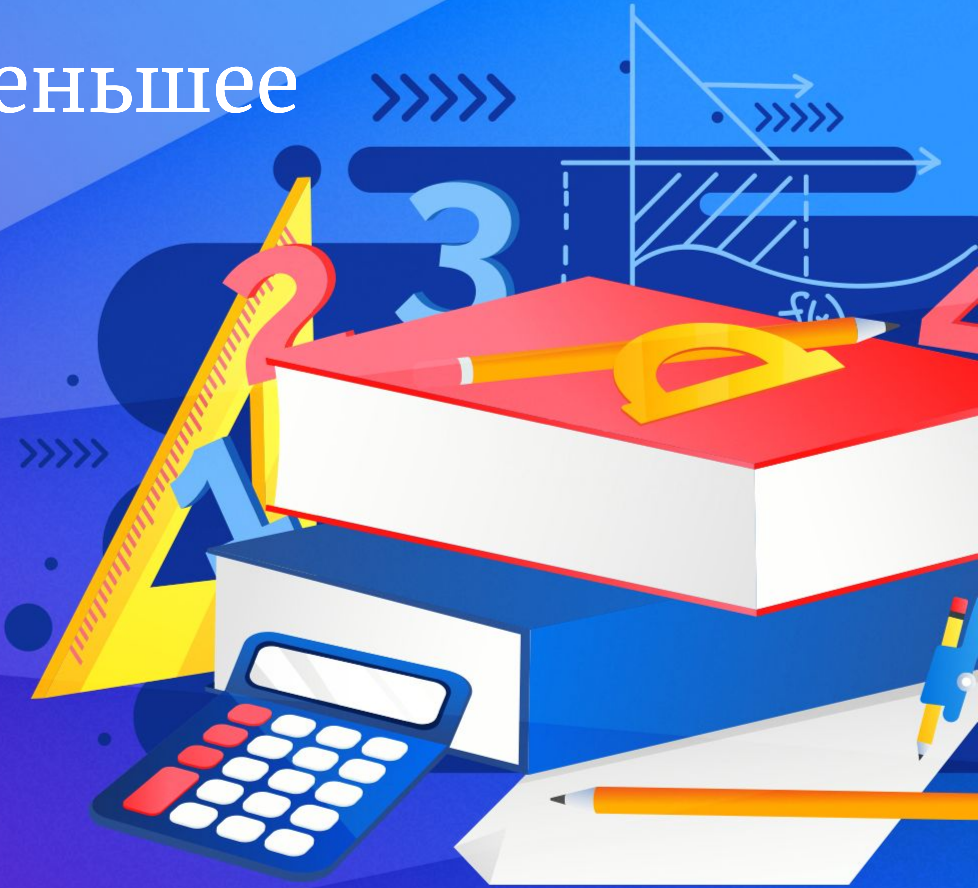
Наибольшее и наименьшее значения функции



Применение производной
к исследованию функций

Сегодня на уроке

1. Вспомним, что называют наибольшим и наименьшим значениями функции.

2. Научимся находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Вспомним

Говоря о наибольшем или наименьшем значении функции, её рассматривают на всей области определения или на числовом промежутке (отрезке, интервале и так далее), который является подмножеством области определения.

Вспомним

Пусть функция $y = f(x)$ определена на числовом множестве X.

Число M называется <u>наибольшим значением</u> функции $y = f(x)$ на числовом множестве X, если существует x_0 из X такое, что $f(x_0) = M$, и для любого x из X выполняется неравенство $f(x) \leq M$.

$y = -|1 - x|$

Область определения – множество $\mathbb{R}$.

Число 0 – наибольшее значение функции, т. к. $f(1) = -|1 - 1| = 0$

и $-|1 - x| \leq 0$ при любом значении x из области определения функции.

$y_{\text{наиб.}} = 0$ при $x_0 = 1$.

Вспомним

Пусть функция $y = f(x)$ определена на числовом множестве X.

Число m называется <u>наименьшим значением</u> функции $y = f(x)$ на числовом множестве X, если существует x_0 из X такое, что $f(x_0) = m$, и для любого x из X выполняется неравенство $f(x) \geq m$.

$y = |x| - 1$

Область определения – множество $\mathbb{R}$.

Число -1 – наименьшее значение функции, т. к. $f(0) = |0| - 1 = -1$ и $|x| - 1 \geq -1$, т. е. $|x| \geq 0$ при любом значении x из области определения функции.

$y_{\text{наим.}} = -1$ при $x_0 = 0$.

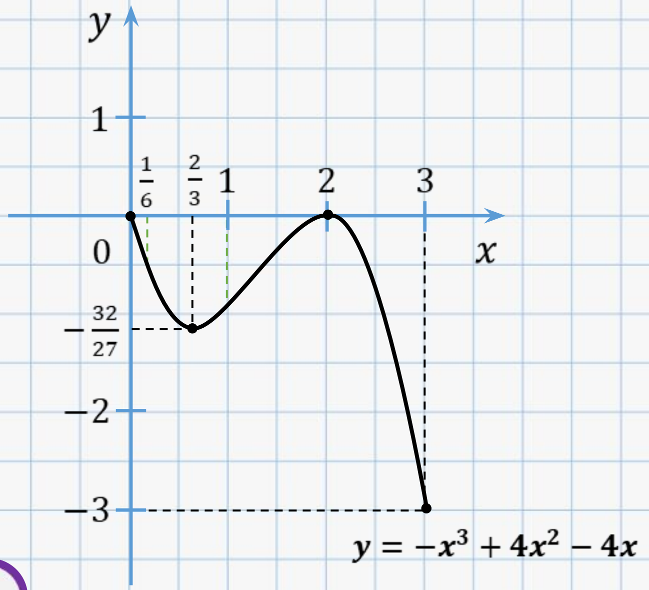
График функции $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$ построен на отрезке $[0; 3]$.

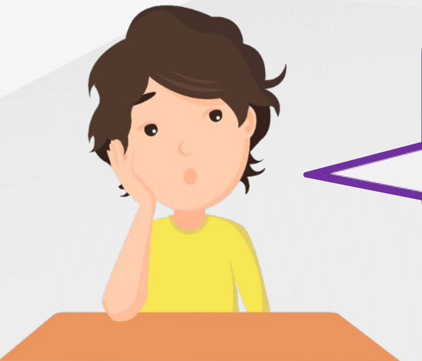
Наибольшее значение на этом отрезке, равное 0, функция принимает в точке $x = 0$ и в точке $x = 2$.

Наименьшее значение, равное -3, функция принимает при $x = 3$.

Точка $x = \frac{2}{3}$ является точкой минимума данной функции.

Это означает, что есть такая окрестность точки $x = \frac{2}{3}$, например, интервал $\left(\frac{1}{6}; 1\right)$, что в этой окрестности функция принимает своё наименьшее значение при $x = \frac{2}{3}$.





Но на отрезке $[0; 3]$ функция принимает наименьшее значение не в точке минимума, а на конце отрезка.

График функции $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$ построен на отрезке $[0; 3]$.

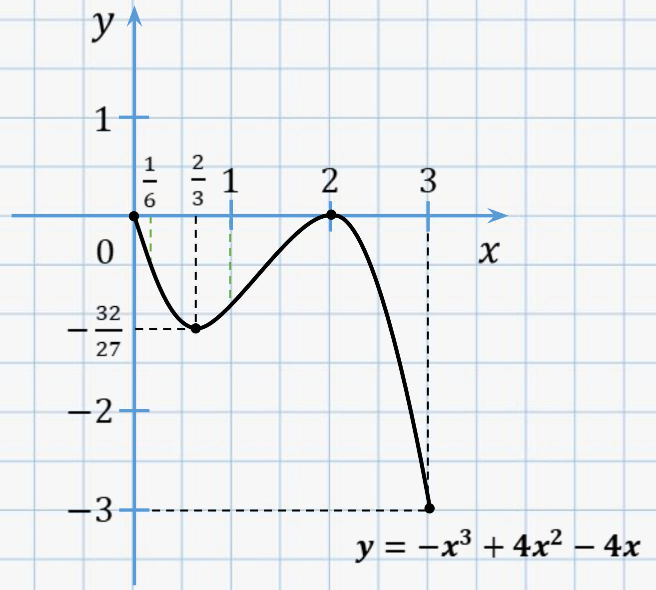
Наибольшее значение на этом отрезке, равное 0, функция принимает в точке $x = 0$ и в точке $x = 2$.

Наименьшее значение, равное -3, функция принимает при $x = 3$.

Точка $x = \frac{2}{3}$ является точкой минимума данной функции.

Это означает, что есть такая окрестность точки $x = \frac{2}{3}$, например, интервал $\left(\frac{1}{6}; 1\right)$, что в этой окрестности функция принимает своё наименьшее значение при $x = \frac{2}{3}$.

Для нахождения наименьшего значения функции на отрезке нужно сравнить её значения в точках минимума и на концах отрезка.



Наибольшие и наименьшие значения функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет несколько критических точек на этом отрезке.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a; b]$ нужно:

1) найти значения функции на концах отрезка, т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$;

2) найти её значения в тех критических точках, которые принадлежат интервалу $(a; b)$;

3) из всех найденных значений найти наибольшее и наименьшее.

Функция $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$ непрерывна на отрезке $[-1; 2]$. Найдите её наибольшее и наименьшее значения.

$$f(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 9 = 2,$$

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 = -7.$$

$$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + 9)' = 3x^2 - 12x,$$

$$3x^2 - 12x = 0,$$

$$3x(x - 4) = 0,$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 4.$$

$$x_1 \in (-1; 2),\ x_2 \notin (-1; 2).$$

$$f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 = 9.$$

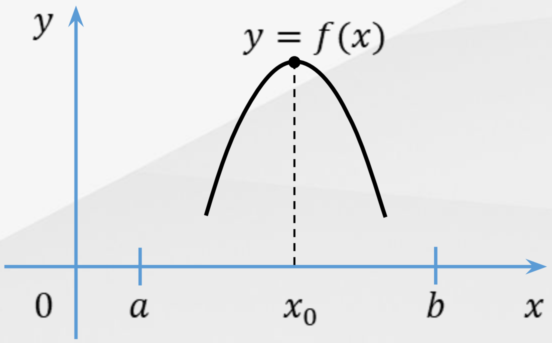
Наибольшее значение функции на отрезке $[-1; 2]$ равно 9, а наименьшее значение равно -7.

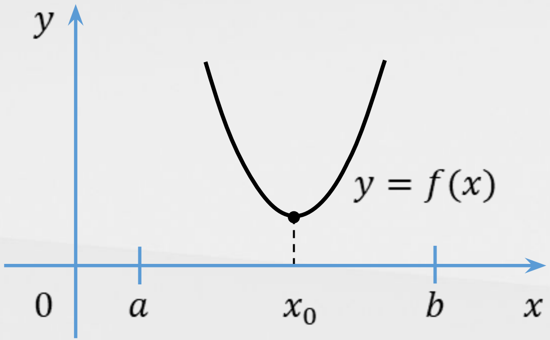
$$\underset{x \in [-1;2]}{f_{\text{наиб.}}}(x) = 9,\ \underset{x \in [-1;2]}{f_{\text{наим.}}}(x) = -7.$$

Наибольшие и наименьшие значения функции

Наибольшее и наименьшее значения функции часто приходится находить не на отрезке, а на интервале.

Встречаются задачи, в которых функция $f(x)$ имеет на заданном интервале одну стационарную точку – точку минимума или точку максимума.





Задача

Число 24 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

Решение:

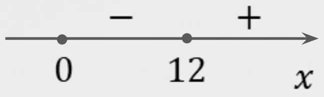
Пусть x – первое слагаемое, тогда $24 - x$ – второе слагаемое.
Сумма квадратов этих чисел равна $x^2 + (24 - x)^2$.
$x^2 + (24 - x)^2 = x^2 + 576 - 48x + x^2 = 2x^2 - 48x + 576$
Задача сводится к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x) = 2x^2 - 48x + 576$ принимает наименьшее значение на интервале $(0; +\infty)$.

$f'(x) = (2x^2 - 48x + 576)' = 4x - 48,$

$4x - 48 = 0,$

$x = 12.$

$x \in (0; +\infty)$



$x = 13: 4 \cdot 13 - 48 = 4 > 0,\ x = 11: 4 \cdot 11 - 48 = -4 < 0.$

$x = 12$ – точка минимума.

Задача

Число 24 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

Решение:

Пусть x – первое слагаемое, тогда $24 - x$ – второе слагаемое.
Сумма квадратов этих чисел равна $x^2 + (24 - x)^2$.

$x^2 + (24 - x)^2 = x^2 + 576 - 48x + x^2 = 2x^2 - 48x + 576$

$x = 12$ – точка минимума.

Наименьшее значение на интервале $(0; +\infty)$ функция $f(x) = 2x^2 - 48x + 576$ принимает в точке $x = 12$.

$f(12) = 2 \cdot 12^2 - 48 \cdot 12 + 576 = 288$

Первое слагаемое равно 12, тогда второе слагаемое равно $24 - 12 = 12$.

$24 = 12 + 12$

Ответ: $24 = 12 + 12$.

Если значения функции $f(x)$ неотрицательны на некотором промежутке, то эта функция и функция $\left(f(x)\right)^n$, где n – натуральное число, принимают наибольшее (наименьшее) значение в одной и той же точке.

Задание

Найдите наибольшее и наименьшее значения функций:

а) $f(x) = (x+2)^2(x-3)^3$, $[-3; 1]$; б) $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$, $[-3; -1]$.

Решение:

а) $f(x) = (x+2)^2(x-3)^3$, $[-3; 1]$,

$f(-3) = (-3+2)^2(-3-3)^3 = -216$, $f(1) = (1+2)^2(1-3)^3 = -72$.

$f'(x) = \left((x+2)^2(x-3)^3\right)' = 2(x+2)(x-3)^3 + 3(x+2)^2(x-3)^2 =$

$= (x+2)(x-3)^2(2(x-3)+3(x+2)) = 5x(x+2)(x-3)^2$,

$5x(x+2)(x-3)^2 = 0$,

$x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_2 = 3$.

$x_1 \in (-3; 1)$, $x_2 \in (-3; 1)$, $x_3 \notin (-3; 1)$.

$f(0) = (0+2)^2(0-3)^3 = -108$, $f(-2) = (-2+2)^2(-2-3)^3 = 0$.

$\underset{x \in [-3;1]}{f_{\text{наиб.}}}(x) = 0$, $\underset{x \in [-3;1]}{f_{\text{наим.}}}(x) = -216$.

$$\left(g(x)f(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Задание

Найдите наибольшее и наименьшее значения функций:

а) $f(x) = (x+2)^2(x-3)^3$, $[-3;1]$; б) $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$, $[-3;-1]$.

Решение:

б) $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$, $[-3;-1]$,

$$f(-3) = \frac{(-3)^2+4}{-3} = -4\frac{1}{3},\ f(-1) = \frac{(-1)^2+4}{-1} = -5.$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+4}{x}\right)' = \frac{2x\cdot x - (x^2+4)}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2},$$

$$\frac{x^2-4}{x^2} = 0,\ x \neq 0,$$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x^2} = 0,$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = -2,$$

$$x_1 \notin (-3;-1),\ x_2 \in (-3;-1).$$

$$f(-2) = \frac{(-2)^2+4}{-2} = -4$$

$$\underset{x\in[-3;-1]}{f_{\text{наиб.}}}(x) = -4,$$

$$\underset{x\in[-3;-1]}{f_{\text{наим.}}}(x) = -5.$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Итоги урока

Вспомним

Пусть функция $y = f(x)$ определена на числовом множестве X.

Число M называется наибольшим значением функции $y = f(x)$
на числовом множестве X, если существует x_0 из X, такое, что $f(x_0) = M$,

Вспомним

Пусть функция $y = f(x)$ определена на числовом множестве X.

Число m называется наименьшим значением функции $y = f(x)$
на числовом множестве X, если существует x_0 из X, такое, что $f(x_0) = m$,

Наибольшие и наименьшие значения функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет несколько критических точек на этом отрезке.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a; b]$ нужно:

1) найти значения функции на концах отрезка, т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$;

2) найти её значения в тех критических точках, которые принадлежат интервалу $(a; b)$;

3) из всех найденных значений найти наибольшее и наименьшее.

Наибольшие и наименьшие значения функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет несколько критических точек на этом отрезке.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a; b]$ нужно:

1) найти значения функции на концах отрезка, т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$;

2) найти её значения в тех критических точках, которые принадлежат интервалу $(a; b)$;

3) из всех найденных значений найти наибольшее и наименьшее.