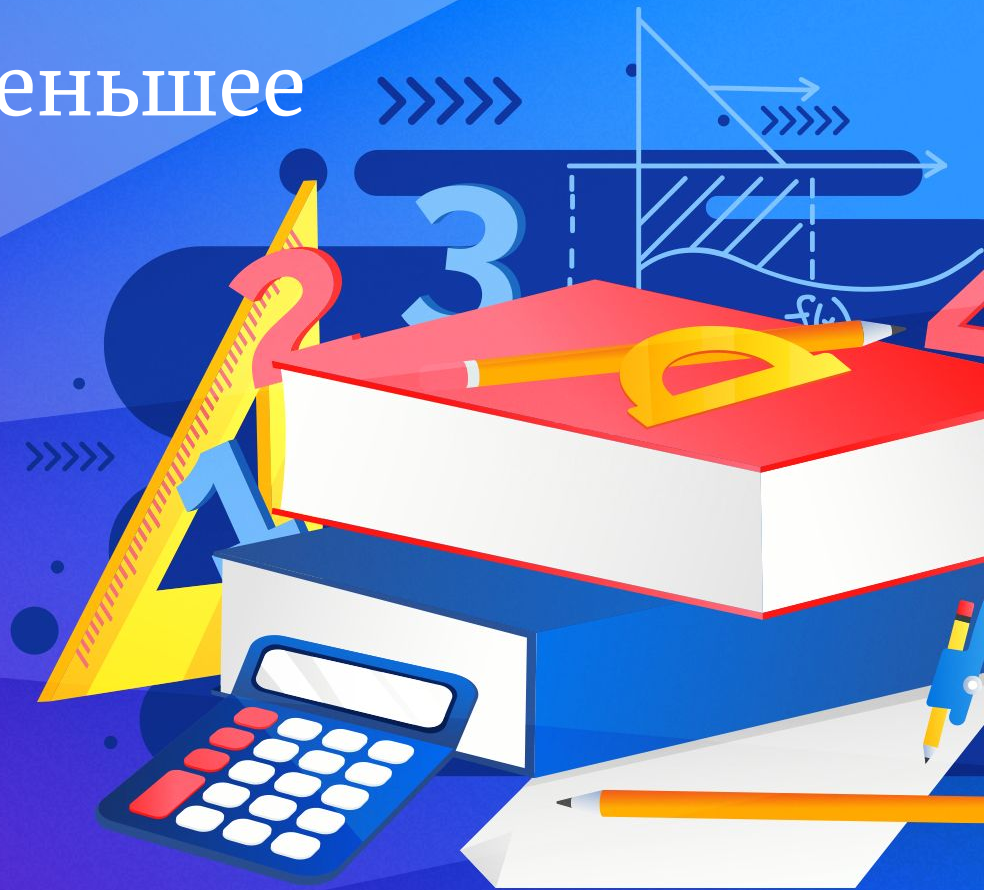


Наибольшее и наименьшее значения функции

Применение производной к исследованию функций



Сегодня на уроке

1. Вспомним, что называют наибольшим и наименьшим значениями функции.
2. Научимся находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Вспомним

Говоря о наибольшем или наименьшем значении функции, её рассматривают на всей области определения или на числовом промежутке (отрезке, интервале и так далее), который является подмножеством области определения.

Вспомним

Пусть функция $y = f(x)$ определена на числовом множестве X .

Число M называется наибольшим значением функции $y = f(x)$ на числовом множестве X , если существует x_0 из X такое, что $f(x_0) = M$, и для любого x из X выполняется неравенство $f(x) \leq M$.

$$y = -|1 - x|$$

Область определения – множество \mathbb{R} .

Число 0 – наибольшее значение функции, т. к. $f(1) = -|1 - 1| = 0$

и $-|1 - x| \leq 0$ при любом значении x из области определения функции.

$$y_{\text{наиб.}} = 0 \text{ при } x_0 = 1.$$

Вспомним

Пусть функция $y = f(x)$ определена на числовом множестве X .

Число m называется наименьшим значением функции $y = f(x)$ на числовом множестве X , если существует x_0 из X такое, что $f(x_0) = m$, и для любого x из X выполняется неравенство $f(x) \geq m$.

$$y = |x| - 1$$

Область определения – множество \mathbb{R} .

Число -1 – наименьшее значение функции, т. к. $f(0) = |0| - 1 = -1$

и $|x| - 1 \geq -1$, т. е. $|x| \geq 0$ при любом значении x из области определения функции.

$$y_{\text{наим.}} = -1 \text{ при } x_0 = 0.$$

График функции $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$ построен на отрезке $[0; 3]$.

Наибольшее значение на этом отрезке, равное 0 , функция принимает в точке $x = 0$ и в точке $x = 2$.

Наименьшее значение, равное -3 , функция принимает при $x = 3$.

Точка $x = \frac{2}{3}$ является точкой минимума данной функции.

Это означает, что есть такая окрестность точки $x = \frac{2}{3}$, например, интервал $(\frac{1}{6}; 1)$, что в этой окрестности функция принимает своё наименьшее значение при $x = \frac{2}{3}$.



Но на отрезке $[0; 3]$ функция принимает наименьшее значение не в точке минимума, а на конце отрезка.

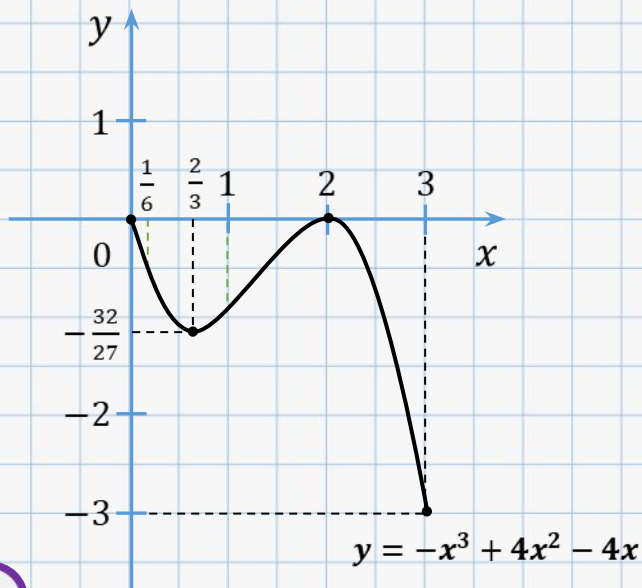


График функции $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$ построен на отрезке $[0; 3]$.

Наибольшее значение на этом отрезке, равное 0 , функция принимает в точке $x = 0$ и в точке $x = 2$.

Наименьшее значение, равное -3 , функция принимает при $x = 3$.

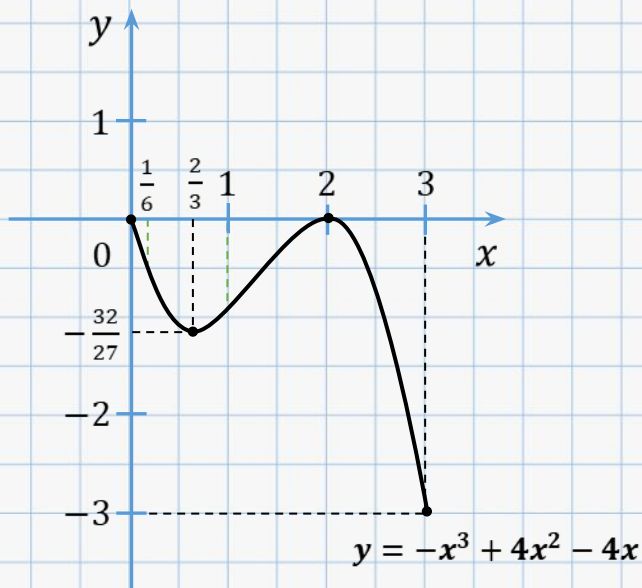
Точка $x = \frac{2}{3}$ является точкой минимума данной функции.

Это означает, что есть такая окрестность точки $x = \frac{2}{3}$,

например, интервал $(\frac{1}{6}; 1)$, что в этой окрестности функция

принимает своё наименьшее значение при $x = \frac{2}{3}$.

Для нахождения наименьшего значения функции на отрезке нужно сравнить её значения в точках минимума и на концах отрезка.



Наибольшие и наименьшие значения функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет несколько критических точек на этом отрезке.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a; b]$ нужно:

- 1) найти значения функции на концах отрезка, т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$;
- 2) найти её значения в тех критических точках, которые принадлежат интервалу $(a; b)$;
- 3) из всех найденных значений найти наибольшее и наименьшее.

Функция $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$ непрерывна на отрезке $[-1; 2]$. Найдите её наибольшее и наименьшее значения.

$$f(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 9 = 2,$$

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 = -7.$$

$$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + 9)' = 3x^2 - 12x,$$

$$3x^2 - 12x = 0,$$

$$3x(x - 4) = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4.$$

$$x_1 \in (-1; 2), x_2 \notin (-1; 2).$$

$$f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 = 9.$$

Наибольшее значение функции на отрезке $[-1; 2]$ равно 9, а наименьшее значение равно -7 .

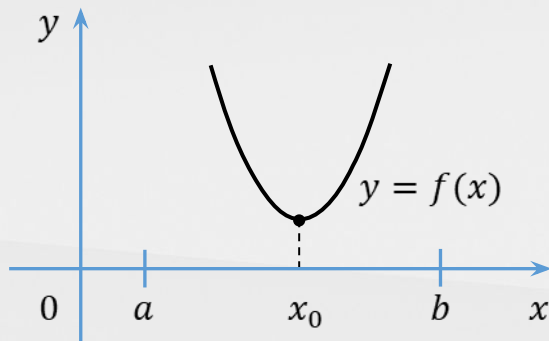
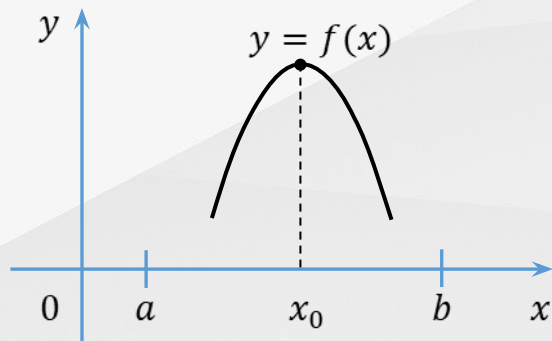
$$f_{\text{наиб.}}(x) = 9, f_{\text{наим.}}(x) = -7.$$

$x \in [-1; 2]$ $x \in [-1; 2]$

Наибольшие и наименьшие значения функции

Наибольшее и наименьшее значения функции часто приходится находить не на отрезке, а на **интервале**.

Встречаются задачи, в которых функция $f(x)$ имеет на заданном интервале одну стационарную точку – точку минимума или точку максимума.



Задача

Число 24 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

Решение:

Пусть x – первое слагаемое, тогда $24 - x$ – второе слагаемое.

Сумма квадратов этих чисел равна $x^2 + (24 - x)^2$.

$$x^2 + (24 - x)^2 = x^2 + 576 - 48x + x^2 = 2x^2 - 48x + 576$$

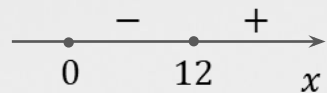
Задача сводится к нахождению такого значения x , при котором функция $f(x) = 2x^2 - 48x + 576$ принимает наименьшее значение на интервале $(0; +\infty)$.

$$f'(x) = (2x^2 - 48x + 576)' = 4x - 48,$$

$$4x - 48 = 0,$$

$$x = 12.$$

$$x \in (0; +\infty)$$



$$x = 13: 4 \cdot 13 - 48 = 4 > 0, \quad x = 11: 4 \cdot 11 - 48 = -4 < 0.$$

$x = 12$ – точка минимума.

Задача

Число 24 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

Решение:

Пусть x – первое слагаемое, тогда $24 - x$ – второе слагаемое.

Сумма квадратов этих чисел равна $x^2 + (24 - x)^2$.

$$x^2 + (24 - x)^2 = x^2 + 576 - 48x + x^2 = 2x^2 - 48x + 576$$

$x = 12$ – точка минимума.

Наименьшее значение на интервале $(0; +\infty)$ функция $f(x) = 2x^2 - 48x + 576$ принимает в точке $x = 12$.

$$f(12) = 2 \cdot 12^2 - 48 \cdot 12 + 576 = 288$$

Первое слагаемое равно 12, тогда второе слагаемое равно $24 - 12 = 12$.

$$24 = 12 + 12$$

Ответ: $24 = 12 + 12$.

Если значения функции $f(x)$ неотрицательны на некотором промежутке, то эта функция и функция $(f(x))^n$, где n – натуральное число, принимают наибольшее (наименьшее) значение в одной и той же точке.

Задание

Найдите наибольшее и наименьшее значения функций:

а) $f(x) = (x + 2)^2(x - 3)^3$, $[-3; 1]$; б) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$, $[-3; -1]$.

Решение:

а) $f(x) = (x + 2)^2(x - 3)^3$, $[-3; 1]$,

$$f(-3) = (-3 + 2)^2(-3 - 3)^3 = -216, f(1) = (1 + 2)^2(1 - 3)^3 = -72.$$

$$f'(x) = ((x + 2)^2(x - 3)^3)' = 2(x + 2)(x - 3)^3 + 3(x + 2)^2(x - 3)^2 = \\ = (x + 2)(x - 3)^2(2(x - 3) + 3(x + 2)) = 5x(x + 2)(x - 3)^2,$$

$$5x(x + 2)(x - 3)^2 = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.$$

$$x_1 \in (-3; 1), x_2 \in (-3; 1), x_3 \notin (-3; 1).$$

$$f(0) = (0 + 2)^2(0 - 3)^3 = -108, f(-2) = (-2 + 2)^2(-2 - 3)^3 = 0.$$

$$f_{\text{наиб.}}(x) = 0, f_{\text{наим.}}(x) = -216.$$

$x \in [-3; 1]$ $x \in [-3; 1]$

$$(g(x)f(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Задание

Найдите наибольшее и наименьшее значения функций:

а) $f(x) = (x + 2)^2(x - 3)^3$, $[-3; 1]$; б) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$, $[-3; -1]$.

Решение:

$$\text{б) } f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}, [-3; -1],$$

$$f(-3) = \frac{(-3)^2 + 4}{-3} = -4\frac{1}{3}, f(-1) = \frac{(-1)^2 + 4}{-1} = -5.$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 4}{x}\right)' = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 4)}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2},$$

$$\frac{x^2 - 4}{x^2} = 0, x \neq 0,$$

$$\frac{(x - 2)(x + 2)}{x^2} = 0,$$

$$x_1 = 2, x_2 = -2,$$

$$x_1 \notin (-3; -1), x_2 \in (-3; -1).$$

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 + 4}{-2} = -4$$

$$f_{\text{наиб.}}(x) = -4, \\ x \in [-3; -1]$$

$$f_{\text{наим.}}(x) = -5. \\ x \in [-3; -1]$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Итоги урока

Вспомним

Пусть функция $y = f(x)$ определена на числовом множестве X .

Число M называется **наибольшим значением** функции $y = f(x)$ на числовом множестве X , если существует x_0 из X , такое, что $f(x_0) = M$,

Вспомним

Пусть функция $y = f(x)$ определена на числовом множестве X .

Число m называется **наименьшим значением** функции $y = f(x)$ на числовом множестве X , если существует x_0 из X , такое, что $f(x_0) = m$,

Наибольшие и наименьшие значения функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет несколько критических точек на этом отрезке.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a; b]$ нужно:

- 1) найти значения функции на концах отрезка, т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$;
- 2) найти её значения в тех критических точках, которые принадлежат интервалу $(a; b)$;
- 3) из всех найденных значений найти наибольшее и наименьшее.

Резюме

Наибольшие и наименьшие значения функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет несколько критических точек на этом отрезке.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a; b]$ нужно:

- 1) найти значения функции на концах отрезка, т. е. числа $f(a)$ и $f(b)$;
- 2) найти её значения в тех критических точках, которые принадлежат интервалу $(a; b)$;
- 3) из всех найденных значений найти наибольшее и наименьшее.