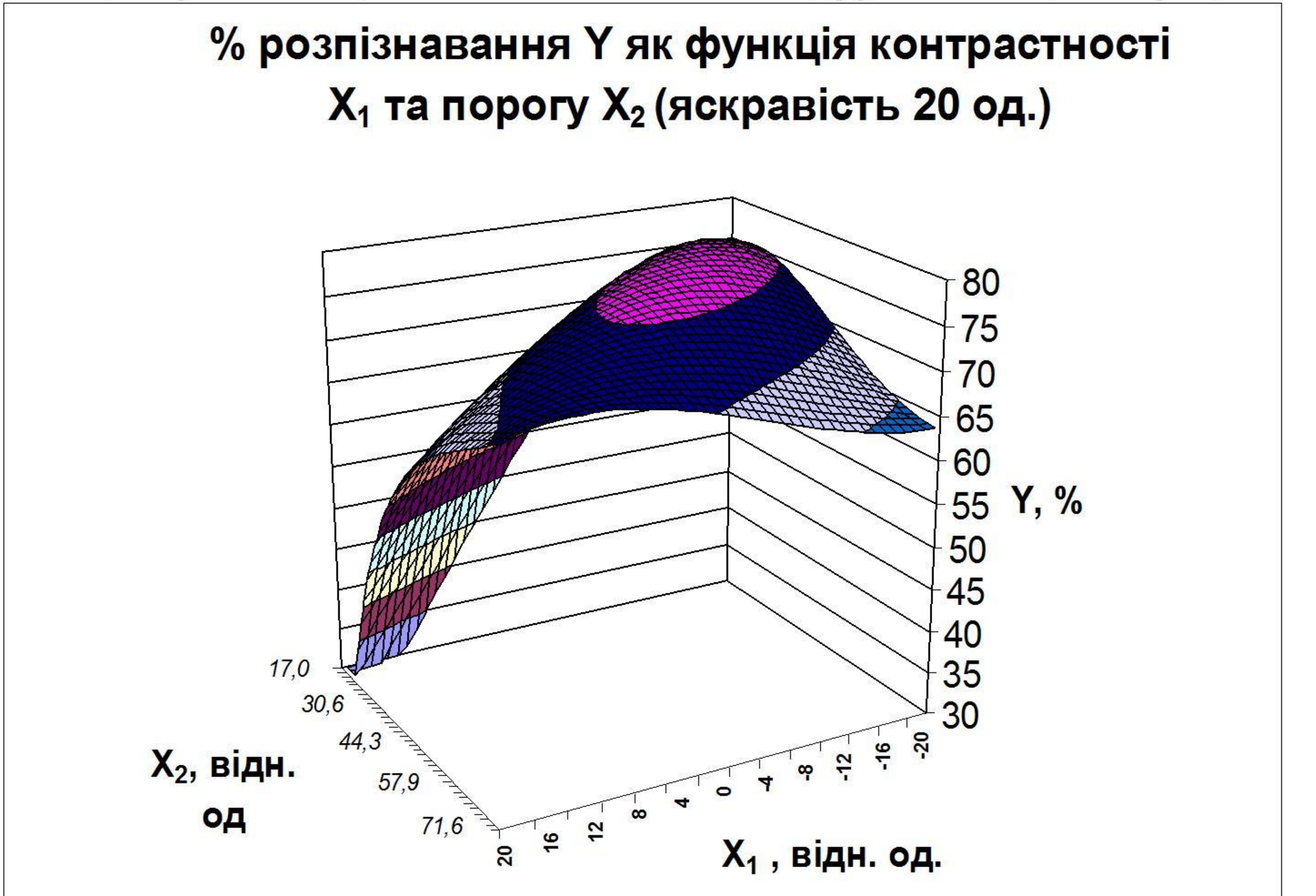
Центральні композиційні плани другого порядку

1. Ортогональні плани

1.1. двофакторні

1.2. трифакторні

Поблизу точки екстремуму параметру оптимізації кривизна поверхні відгуку у факторному просторі зменшується. Область поблизу екстремуму називають квазістаціонарною. Адекватне математичне рівняння моделі, що описує поведінку системи, повинно містити члени другого і вищих порядків.



- **Як правило, квазістаціонарну область з достатньою точністю можна описати поліномом другого порядку.**
- **Проблема: втрата ортогональності плану**

$$y_{мод} = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i \neq j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i \neq j=1}^{n} x_i x_j b_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_i^2$$

$$\widehat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 x_2 + b_4 {x_1}^2 + b_5 {x_2}^2$$

X =

X_0	X_1	X_2	X_1X_2	X_1^2	X_2^2
1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1
1	1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	1	1	1

Одним із способів вирішення протиріччя є **ЦЕНТРАЛЬНЕ КОМПОЗИЦІЙНЕ ПЛАНУВАННЯ**, яке передбачає проведення дослідів за повним факторним експериментом, додаткову кількість дослідів в центрі факторного простору і деякою кількістю дослідів у “зіркових” точках.

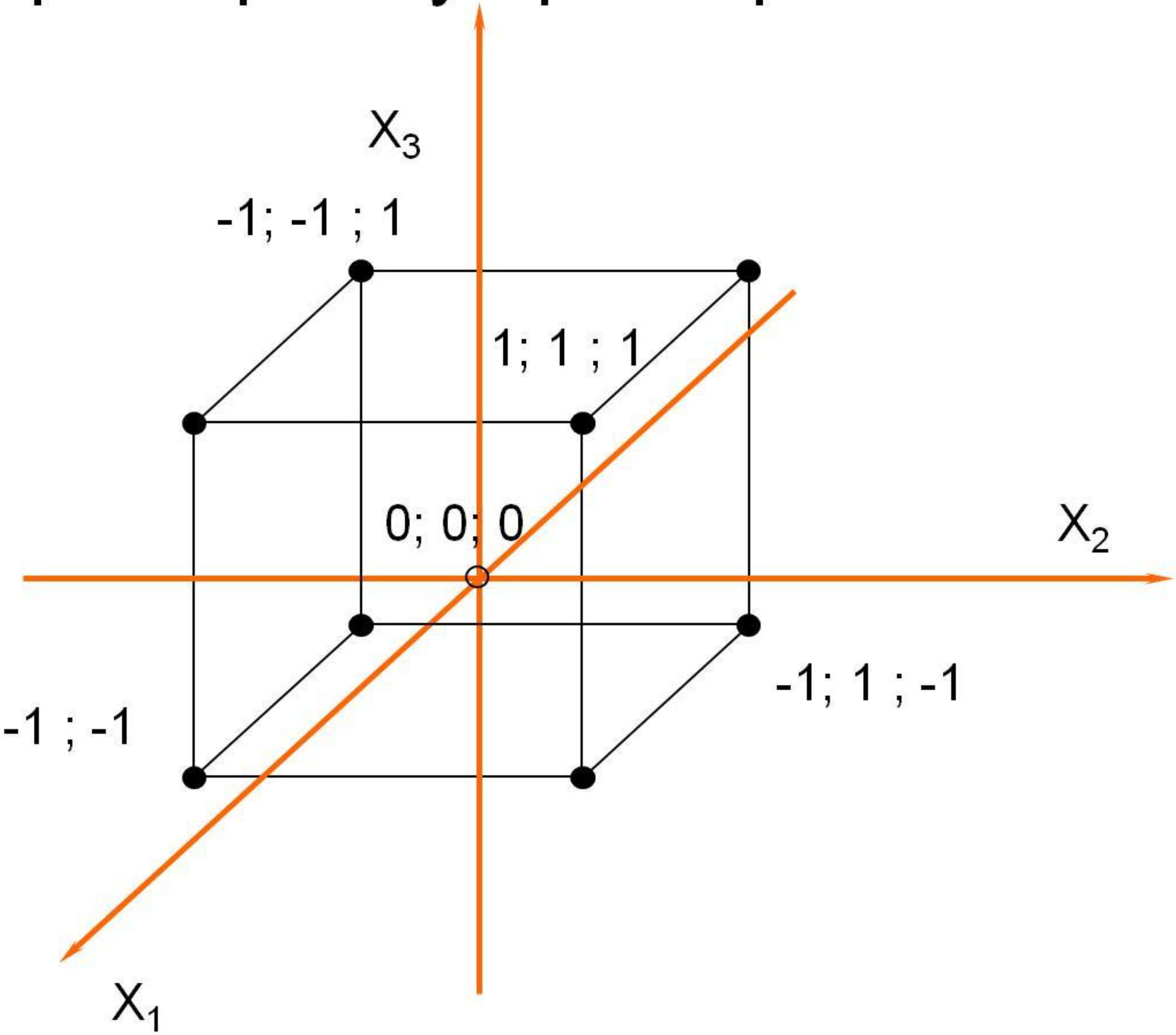
- Центром композиції є “ядро”, утворене планом ПФЕ з парними взаємодіями.
- До нього додають досліди, які проводять на осях координат факторів симетрично відносно центру плану в точках $+\alpha$ і $-\alpha$,
- Дослід в центрі плану.
- Загальна кількість дослідів за центральним композиційним планом:
  $N = 2^n + 2n + n_0$

  (2^n – “ядро” плану, $2n$ – “зіркові точки”,

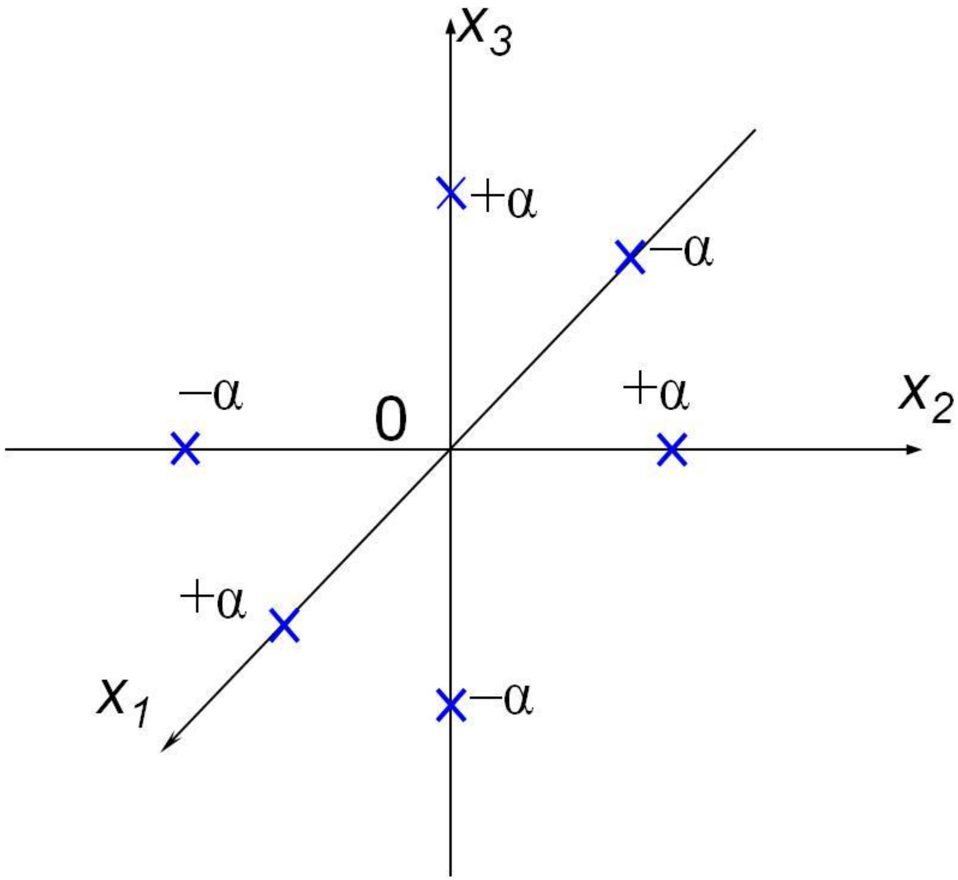
  n_0 - дослід в центрі факторного простору)

	№ досліду	x_0	x_1	…	x_n
"Ядро"	1	1	1	…	1
	2	1	-1		1
	3	1	1		1
	4	1	-1		1
	5	1	1	…	1
	…	…	…	…	…
	2^n	1	–1	…	-1
"Зіркові точки"	$2^n + 1$	1	α	…	0
	$2^n + 2$	1	- α		0
	$2^n + 3$	1	0		0
	$2^n + 4$	1	0	…	0
	…	…	…	…	…
	2^n+2n-1	1	0	…	α
	2^n+2n	1	0	…	- α
Центр плану	$2^n + 2n + n_0$	1	0	…	0

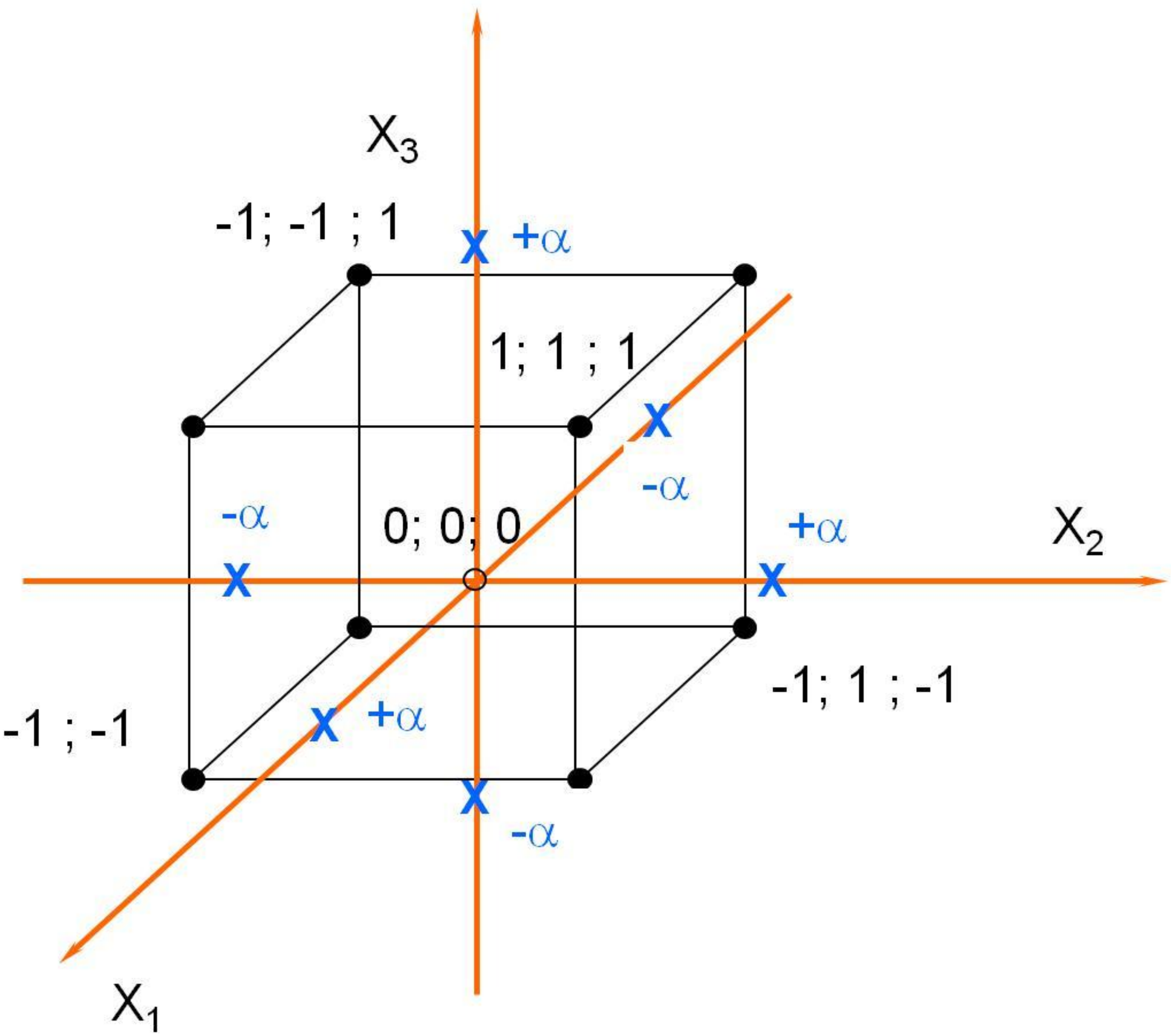
Координати експериментальних точок у трифакторному просторі станів ТС



Координати “зіркових точок” $+\alpha$; $-\alpha$



Координати експериментальних точок у трифакторному просторі станів ТС за ЦКП другого порядку



	N	x_0	x_1	…	x_n	x_1x_2	x_1x_3	…	$x_{n-1}x_n$	x_1^2 -β	x_2^2 -β	…	x_n^2 -β
Ядро	1	1	1	…	1	1	1	…	1	1-β	1-β	…	1-β
	2	1	-1		1	-1	-1		1	1-β	1-β		1-β
	3	1	1		1	-1	1		1	1-β	1-β		1-β
	4	1	-1		1	1	-1		1	1-β	1-β		1-β
	5	1	1	…	1	1	-1	…	1	1-β	1-β	…	1-β
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	2^n	1	–1	…	-1	1	1	…	1	1-β	1-β	…	1-β
“Зіркові точки”	2^n+1	1	α	…	0	0	0	…	0	$\alpha^2-\beta$	$-\beta$	…	$-\beta$
	2^n+2	1	- α		0	0	0		0	$\alpha^2-\beta$	$-\beta$		$-\beta$
	2^n+3	1	0		0	0	0		0	$-\beta$	$\alpha^2-\beta$		$-\beta$
	2^n+4	1	0	…	0	0	0	…	0	$-\beta$	$\alpha^2-\beta$	…	$-\beta$
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	2^n+2n-1	1	0	…	$+\alpha$	0	0	…	0	$-\beta$	$-\beta$	…	$\alpha^2-\beta$
	2^n+2n	1	0	…	$-\alpha$	0	0	…	0	$-\beta$	$-\beta$	…	$\alpha^2-\beta$
Центр плану	2^n+2n+1	1	0	…	0	0	0	…	0	$-\beta$	$-\beta$	…	$-\beta$

Для ортогоналізації плану замість факторів X_i^2 в план вводять зміщені фактори (X_i^2 - β).

Умови ортогональності матриці:

- сума порядкових добутків елементів будь-яких двох стовпчиків дорівнює нулю;

- сума елементів будь-якого стовпчика (крім X_0) дорівнює нулю.

$$2^n(1-\beta)^2 - 4\beta(\alpha^2-\beta) + \beta^2(2n-4) + \beta^2 = 2^n - 2^n \cdot 2\beta + 2^n \cdot \beta^2 - 2\beta \cdot 2\alpha^2 + 4\beta^2 +$$
$$+2n\cdot\beta^2 - 4\beta^2 + \beta^2 = 2^n - 2\beta(2^n + 2\alpha^2) + \beta^2(2^n + 2n + 1) = 2^n - 2\beta(2^n + 2\alpha^2) + \beta^2 N = 0$$

$$2^n(1-\beta) + 2(\alpha^2-\beta) - \beta(2n-2) - \beta = 2^n - 2^n \cdot \beta + 2\alpha^2 - 2\beta - 2n\beta + 2\beta - \beta =$$
$$= 2^n + 2\alpha^2 - \beta(2^n + 2n + 1) = 2^n + 2\alpha^2 - \beta N = 0$$

	№ досліду	x_1^2 -β	x_2^2 -β	…	x_n^2 -β
Ядро	1	1-β	1-β	…	1-β
	2	1-β	1-β		1-β
	3	1-β	1-β		1-β
	4	1-β	1-β		1-β
	5	1-β	1-β	…	1-β
	…	…	…	…	…
	2^n	1-β	1-β	…	1-β
"Зіркові точки"	2^n+1	$\alpha^2-\beta$	$-\beta$	…	$-\beta$
	2^n+2	$\alpha^2-\beta$	$-\beta$		$-\beta$
	2^n+3	$-\beta$	$\alpha^2-\beta$		$-\beta$
	2^n+4	$-\beta$	$\alpha^2-\beta$	…	$-\beta$
	…	…	…	…	…
	2^n+2n-1	$-\beta$	$-\beta$	…	$\alpha^2-\beta$
	2^n+2n	$-\beta$	$-\beta$	…	$\alpha^2-\beta$
Центр плану	2^n+2n+1	$-\beta$	$-\beta$	…	$-\beta$

$$2^n(1-\beta)+2(\alpha^2-\beta)-\beta(2n-2)-\beta=2^n-2^n\cdot\beta+2\alpha^2-2\beta-2n\beta+2\beta-\beta=$$

$$=2^n+2\alpha^2-\beta(2^n+2n+1)=2^n+2\alpha^2-\beta N=0$$

$$2^n(1-\beta)^2-4\beta(\alpha^2-\beta)+\beta^2(2n-4)+\beta^2=2^n-2^n\cdot 2\beta+2^n\cdot\beta^2-2\beta\cdot 2\alpha^2+4\beta^2+$$

$$+2n\cdot\beta^2-4\beta^2+\beta^2=2^n-2\beta(2^n+2\alpha^2)+\beta^2(2^n+2n+1)=2^n-2\beta(2^n+2\alpha^2)+\beta^2N=0$$

Сумісне виконання умов ортогоналізації плану встановлює співвідношення між значеннями α, β, n, N:

$$\begin{cases} \beta N = 2^n + 2\alpha^2 \\ \beta^2 N = 2^n \end{cases} \qquad \alpha = \sqrt{2^{\frac{n-2}{2}}\left(\sqrt{N} - 2^{\frac{n}{2}}\right)}; \quad \beta = \frac{2^n + 2\alpha^2}{N}$$

n	N	α	β
2	9	1	0,667
3	15	1,2154	0,73
4	25	1,414	0,8
5	43	1,596	0,863

Фактично розрахована модель за ортогоналізованим планом має вид:

$$y_{мод} = b_0 + \sum_{i=1}^{N} b_i x_i + \sum_{i \neq j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\left(x_i^2 - \beta\right) =$$

$$= b_0 - \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\beta + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i \neq j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 =$$

$$= (b_0 - \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\beta) + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i \neq j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 =$$

$$= b_0' + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i \neq j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2$$

$$Y_{мод}=b_0'+b_1\cdot X_1+b_2\cdot X_2+b_3X_1\cdot X_2+b_4\cdot X_1^2+b_5\cdot X_2^2$$

X =

N	X_0	X_1	X_2	X_1X_2	$X_1^2-\beta$	$X_2^2-\beta$
1	1	1	1	1	0,333	0,333
2	1	-1	1	-1	0,333	0,333
3	1	1	-1	-1	0,333	0,333
4	1	-1	-1	1	0,333	0,333
5	1	1	0	0	0,333	-0,667
6	1	-1	0	0	0,333	-0,667
7	1	0	1	0	-0,667	0,333
8	1	0	-1	0	-0,667	0,333
9	1	0	0	0	-0,667	-0,667

$(X^T \cdot X)^{-1}$:

0,11	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,17	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,17	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,25	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,50	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,50

$$Y_{мод}=b_0'+b_1\cdot X_1+b_2\cdot X_2+b_3\cdot X_3+b_4\cdot X_1\cdot X_2+b_5\cdot X_1\cdot X_3+b_6\cdot X_2\cdot X_3+b_7\cdot X_1^2+b_8\cdot X_2^2+b_9\cdot X_3^2$$

X =

N	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1^2-\beta$	$X_2^2-\beta$	$X_3^2-\beta$
1	1	1	1	1	1	1	1	0,27	0,27	0,27
2	1	-1	1	1	-1	-1	1	0,27	0,27	0,27
3	1	1	-1	1	-1	1	-1	0,27	0,27	0,27
4	1	-1	-1	1	1	-1	-1	0,27	0,27	0,27
5	1	1	1	-1	1	-1	-1	0,27	0,27	0,27
6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	0,27	0,27	0,27
7	1	1	-1	-1	-1	-1	1	0,27	0,27	0,27
8	1	-1	-1	-1	1	1	1	0,27	0,27	0,27
9	1	1,2154	0	0	0	0	0	0,747	-0,73	-0,73
10	1	-1,2154	0	0	0	0	0	0,747	-0,73	-0,73
11	1	0	1,2154	0	0	0	0	-0,73	0,747	-0,73
12	1	0	-1,2154	0	0	0	0	-0,73	0,747	-0,73
13	1	0	0	1,2154	0	0	0	-0,73	-0,73	0,747
14	1	0	0	-1,2154	0	0	0	-0,73	-0,73	0,747
15	1	0	0	0	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73

$(X^T \cdot X)^{-1}$:

0,067	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	**0,091**	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	**0,091**	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	**0,091**	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	**0,125**	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	**0,125**	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	**0,125**	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	**0,229**	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	**0,229**	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	**0,229**

- **<u>Особливість оцінки значущості постійного коефіцієнту b_0':</u>**

  дисперсію коефіцієнту b_0' визначають після оцінки значущості коефіцієнтів біля факторів X_i^2 і прирівнюванням до нуля незначущих.

$$(b_0 - \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\beta) = b_0'$$

$$\sigma^2\left(b_0'\right) = \frac{|b_0|}{\sqrt{\sigma^2(b_0)}} + \beta\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(b_{ii})\right)$$

$$Y_{мод}=b_0+b_1\cdot X_1+b_2\cdot X_2+b_3X_1\cdot X_2+b_4\cdot X_1^2+b_5\cdot X_2^2$$

N	Y_1	Y_2	Y_3	Ycp.	σ^2_i	B_i	$\sigma^2(b_i)$	$t_p(b_i)$	B_i'	Yмод.	$\sigma^2_{мод.i}$
1	19,10	16,84	24,82	20,25	16,94	-1,68	1,21	1,52	0,00	17,32	8,58
2	-6,58	-4,49	-7,23	-6,10	2,04	9,70	1,82	7,19	9,70	-2,08	16,18
3	2,70	-12,31	-0,04	-3,21	63,88	9,79	1,82	7,26	9,79	-2,26	0,90
4	-11,22	-18,13	-33,05	-20,80	124,45	2,19	2,73	1,33	0,00	-21,66	0,74
5	-9,28	-9,94	-10,41	-9,88	0,32	-16,90	5,46	7,23	-16,90	-7,20	7,17
6	-23,17	-26,21	-23,03	-24,14	3,22	14,73	5,46	6,30	14,73	-26,60	6,05
7	22,73	19,76	32,25	24,91	42,55					24,52	0,15
8	0,77	0,75	11,46	4,33	38,19		d =		4	4,94	0,37
9	0,66	-2,54	0,44	-0,48	3,19					0,00	0,23
				σ^2_y	32,75	b_0'	$\sigma^2(b_0')$	$t_p(b_0')$	b_0'	$\sigma^2_{умод}$	24,24
				G_p	0,422	-0,233	8,492	0,080	0,000	F_p	1,35
				G_T	0,4775	t_T	2,101			F_T	4,58

Процес контрольований

Модель адекватна

N	Y1	Y2	Y3	Yср.	σ^2_i	B_i	$\sigma^2(b_i)$	$t_p(b_i)$	B_i	Yмод	$\sigma^2_{мод.i}$
1	14,9476	35,6468	23,1348	24,576	108,673	-6,16	1,292	5,422	0,000	23,4038	1,3751
2	-23,169	-14,118	-12,561	-16,62	32,812	5,614	1,769	4,221	5,614	-16,0162	0,3601
3	-0,9080	-3,3084	-13,468	-5,895	44,452	2,151	1,769	1,617	0,000	5,5383	130,7136
4	-6,7608	-5,1152	-11,575	-7,817	11,270	8,533	1,769	6,416	8,533	1,8492	93,4369
5	-19,245	2,8212	-10,432	-8,952	123,370	8,933	2,422	5,739	8,933	-3,9900	24,6206
6	-33,145	-31,275	-13,432	-25,95	118,414	5,164	2,422	3,318	5,164	-22,7556	10,2092
7	-27,841	-17,097	-26,746	-23,89	34,957	2,997	2,422	1,926	0,000	-21,8554	4,1597
8	-14,428	-6,8120	-4,8672	-8,702	25,532	-4,84	4,440	2,297	-4,840	-4,8902	14,5330
9	-2,9028	11,4656	-3,7256	1,612	72,983	-3,74	4,440	1,773	0,000	-0,3261	3,7578
10	-15,936	-10,754	-9,3808	-12,02	11,951	-2,69	4,440	1,280	0,000	-13,9720	3,7958
11	5,8888	-9,1596	-2,2712	-1,847	56,748					0,0000	3,4125
12	-8,0701	-7,8933	0,0559	-5,302	21,542				d = 5	0,0000	28,1160
13	8,6554	11,9670	12,4158	11,013	4,218					10,3714	0,4113
14	-20,488	-11,831	-12,96	-15,09	22,145	b_0'	$\sigma^2(b_0')$	$t_p(b_0')$	b_0'	-10,3714	22,2914
15	-12,507	13,8296	6,0300	2,451	183,009	-2,63	4,535	1,234	0,000	0,0000	6,0071

Процес контрольований

σ^2_y = 58,14 t_T = 2,042 $\sigma^2_{мод}$ = 104,16

G_T = 0,335 G_p = 0,210 F_T = 2,16 F_p = 1,792

Модель адекватна