Раздел 4. Основные понятия комбинаторики.

4.1 Случайные события и операции над ними. Вероятность.

Вероятность события – численная мера возможности его наступления.

Если *n* – число всех случаев в схеме, а *m* – число случаев, благоприятствующих событию A, то **вероятность события** A определяется равенством:

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Свойства вероятности:

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Вероятность ВСЕГДА≤ 1

Познание действительности в естественных науках происходит в результате испытаний (эксперимента, наблюдений, опыта).

Испытанием или опытом называется осуществление какого-нибудь определенного комплекса условий, который может быть воспроизведен сколь угодно большое число раз.

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (опыта).
Таким образом, событие рассматривается как результат испытания.

Событие называется ***достоверным***, если оно обязательно произойдет в результате данного испытания.

Событие называется ***невозможным***, если оно не может произойти в результате данного испытания.

Два или несколько событий называются ***равновозможными*** в данном испытании, если имеются основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным или менее возможным, чем другие.

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного множества и размещения этих элементов в каком-либо порядке.

Общие правила комбинаторики.

1. Правило суммы: Если некоторый объект A может быть выбран m способами, а объект B- k способами, то объект «либо A, либо B» можно выбрать m+k способами.

Пример:
Допустим, что в ящике находится n разноцветных шаров. Произвольным образом вынимается 1 шарик. Сколькими способами это можно сделать?
Ответ: n способами.
Распределим эти n шариков по двум ящикам: в первый- m шариков, во второй- k шариков. Произвольным образом из произвольно выбранного ящика вынимается 1 шарик. Сколькими способами это можно сделать?
Решение: Из первого ящика шарик можно вынуть m способами, из второго- k способами. Тогда всего способов m+k=n.

2. Правило произведения: Если объект А можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора другой объект В можно выбрать (независимо от выбора объекта А) k способами, то пары объектов «А и В» можно выбрать m*k способами.

Пример:
Сколько двузначных чисел существует?

Решение: Число десятков может быть обозначено любой цифрой от 1 до 9. Число единиц может быть обозначено любой цифрой от 0 до 9. Если число десятков равно 1, то число единиц может быть любым (от 0 до 9). Таким образом, существует 10 двузначных чисел, с числом десятков-1 Аналогично рассуждаем и для любого другого числа десятков. Тогда можно посчитать, что существует 9 *10 = 90 двузначных чисел.

Размещениями из n элементов по k называются такие последовательности, каждое из которых содержит k элементов, взятых из числа данных n элементов, и которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример:
В первой группе класса А первенства по футболу участвует 17 команд. Разыгрываются медали: золото, серебро и бронза. Сколькими способами они могут быть разыграны?
Решение: Комбинации команд-победителей отличаются друг от друга составом и порядком следования элементов, т.е. являются размещениями из 17 по 3.

$$A_{17}^3 = \frac{17!}{(17-3)!} = \frac{17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=4080$$

Перестановками без повторений из n элементов называются размещения без повторений из n элементов по n, т.е. размещения отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

$$P_n = n!$$

Пример:

Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что они должны состоять из различных цифр?

Решение: Имеем перестановки из 5 элементов.

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Сочетанием из n элементов по k называются любые последовательности из k элементов, входящих в число данных n элементов, и отличающихся друг от друга хотя бы одним элементом.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Пример:
Сколькими способами можно выбрать трех делегатов из десяти человек на конференцию?

Решение: В данном случае порядок, в котором располагается эта тройка, не существенен. Поэтому тройки делегатов являются сочетаниями из 10 по 3.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 120$$