Лекция 4
Теория пределов.

Литература.

В.Г. Зубков, В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев. Курс математики для технических высших учебных заведений Учебное пособие часть I Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А. Пушкаря. 2012г. Лекция 6, 7, 8.

Числовые последовательности, предел последовательности, прогрессии, предел функции, односторонние пределы, ограниченные функции.

Бесконечно малые функции, бесконечно большие функции, связь бесконечно больших и бесконечно малых функций,основные теоремы о пределах, 1-ый замечательный предел.

Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентность бесконечно малых функций. Приемы раскрытия неопределённостей.

Теория пределов.

6.1. Числовые последовательности

Определение 6.1. *Функция $y = f(n)$, областью определения которой является множество натуральных чисел N, называется функцией натурального аргумента, или числовой последовательностью.*

Члены числовой последовательности располагаются в порядке возрастания аргумента:

$$y_1 = f(1), y_2 = f(2), y_3 = f(3), \ldots, y_n = f(n), \ldots.$$

$y_1 = f(1)$ – первый член последовательности, $y_2 = f(2)$ – второй, $y_n = f(n)$ – n-й член последовательности, или общий член последовательности. Последовательности кратко обозначают $\{y_n\}$. Примеры числовых последовательностей:

Пример 6.1. $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$ *или* $\{1/n\}$.

Пример 6.2. $-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$ *или* $\{(-1)^n\}$.

Пример 6.3. $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$ *или* $\{2n-1\}$.

Пример 6.4. $0, 1/2, 2/3, \ldots, (n-1)/n, \ldots$ *или* $\{(n-1)/n\}$.

6.2. Предел числовой последовательности

Определение 6.2. *Число b называется пределом числовой последовательности $\{y_n\}$, если для любого положительного сколь угодно малого числа ε найдется такое число N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|y_n - b| < \varepsilon$.*

Символическая запись определения предела последовательности

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = b : \qquad (6.1)$$

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\ \exists\ N\ \ \underset{n}{\forall}(n > N) \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon.$$

Поскольку неравенство $|y_n - b| < \varepsilon$ равносильно $b-\varepsilon < y_n < b+\varepsilon$, то геометрический смысл предела последовательности можно представить следующим образом: если последовательность имеет пределом число b, то каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое N, что все точки, изображающие члены последовательности с номерами $n > N$, попадут в полосу, ограниченную прямыми $y = b-\varepsilon$, $y = b + \varepsilon$ (рис. 75).

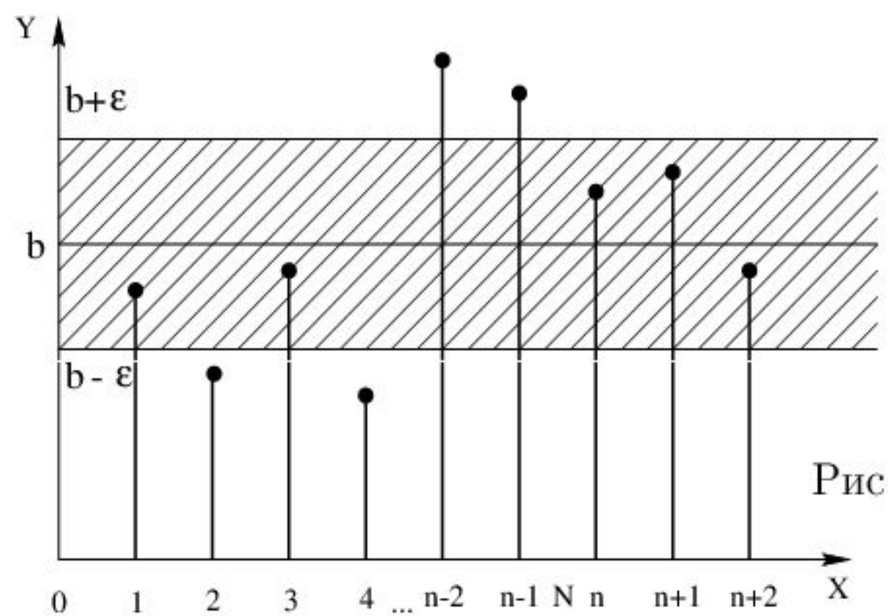

Рис. 75.

6.3. Прогрессии

Частным случаем последовательности являются прогрессии. Общий член арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$. Характеристическое свойство арифметической прогрессии: $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+2})$. Сумма k членов арифметической прогрессии $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \frac{1}{2}(a_1 + a_k)k = \frac{1}{2}(2a_1 + d(k-1))k$.

Геометрическая прогрессия – числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число q, называемое знаменателем геометрической прогрессии $\Rightarrow b_1 = b(b \neq 0); b_{n+1} = b_n \cdot q(q \neq 0)$.

Общий член геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. Характеристическое свойство геометрической прогрессии: $|b_{n+1}| = \sqrt{b_n \cdot b_{n+2}}$. Формула суммы k членов геометрической прогрессии: $S_k = \dfrac{b_1(1-q^k)}{1-q}$. Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $|q| < 1$ и сумма $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

6.4. Предел функции

6.4.1. *Предел функции при $x \to +\infty$.* Проследим характер изменения функции $y = f(x) = 2 - \frac{1}{x}$ при возрастании значения аргумента x:

x	1	2	10	100	1000
y	1	1.5	1.9	1.99	1.999

и построим её график (рис. 76).

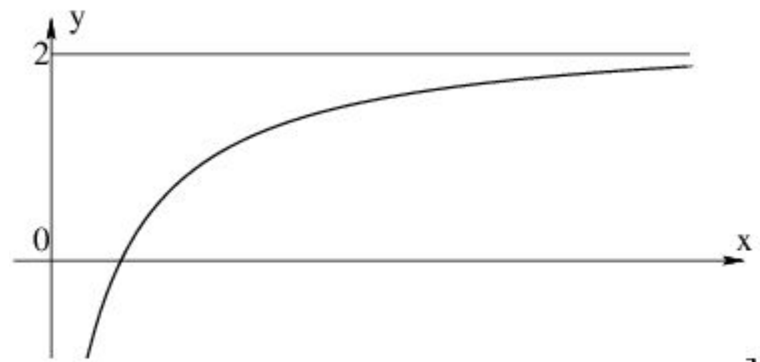

Рис. 76. *График функции* $y = 2 - \frac{1}{x}$

Пусть $M(x, y)$ – текущая точка графика функции $y = 2 - \frac{1}{x}$. Тогда расстояние MN от этой точки до прямой $y = 2$ можно определить как

$$d = |y - 2| = |f(x) - 2| = \left|\left(2 - \frac{1}{x}\right) - 2\right| = \left|\frac{1}{-x}\right| = \frac{1}{|x|}.$$

Совершенно очевидно,что с ростом значения аргумента x расстояние d уменьшается. Если $x > \frac{1}{\varepsilon}$, то $|f(x) - 2| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$, следовательно, функция неограниченно приближается к числу 2 или при бесконечно возрастающем x ($x \to +\infty$) имеет пределом число 2.

Определение 6.3. *Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если каково бы ни было положительное число ε, можно найти такое число N, что для всех $x > N$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Символическая запись предела функции при $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b : \underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\ \exists\ N\ \ \underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \qquad (6.2)$$

С учётом того, что неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ эквивалентно системе неравенств $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$, геометрический смысл предела функции при $x \to +\infty$ можно проиллюстрировать с помощью графика функции (рис. 77).

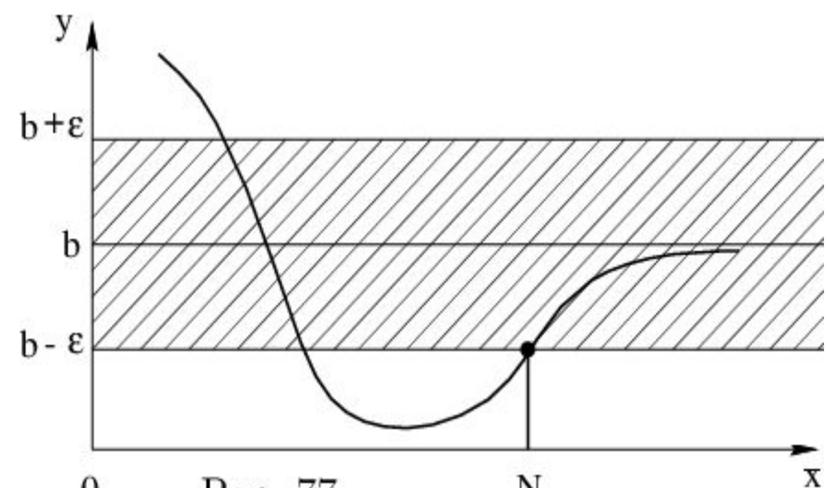

Рис. 77.

Аналогично пределу функции при $x \to +\infty$ можно ввести понятие предела функции при $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b : \underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\ \exists\ M\ \ \underset{x}{\forall}(x < M) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \qquad (6.3)$$

6.4.2. *Предел функции при $x \to x_0$.*

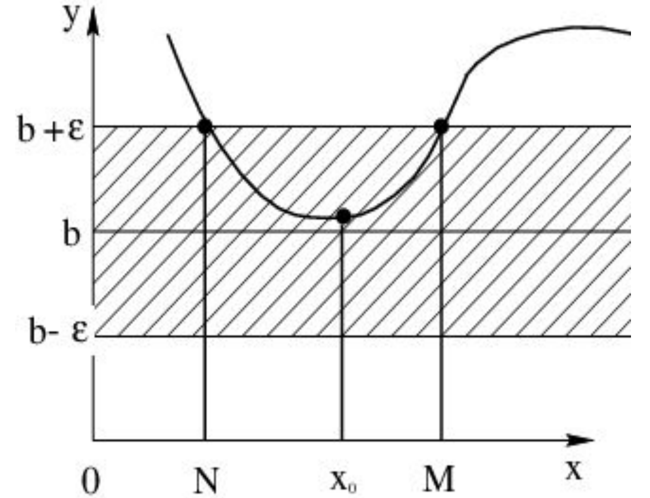

Рис. 78.

Определение 6.4. *Число b является пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если каково бы ни было ε, можно найти такие числа N и M ($N < x_0 < M$), что для всех x, лежащих в интервале $(N; M)$ (за исключением, быть может, точки x_0), выполняется неравенство*

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Символическая запись предела функции при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b : \underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0) \ \exists \ (N < x_0 < M) \ (6.4)$$

$$\underset{x}{\forall}(N < x < M, \text{кроме м.б. } x = x_0) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл этого предела легко понять из графика на рис. 78.

Определение предела функции можно дать в несколько ином виде.

Определение 6.5. *Число b является пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $0 < |x - x_0| < \delta$.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b : \ \forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(|x - x_0| < \delta, \text{ кр.м.б. } x = x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Число δ определяет собой некоторую δ-окрестность точки x_0 – интервал $(x - \delta, x + \delta)$, содержащий точку x_0. Оба определения предела функции при $x \to x_0$ (6.4 и 6.5) равносильны.

6.5. Односторонние пределы

Рассмотрим вначале случай, когда независимая переменная x приближается к x_0 слева.

Определение 6.6. *Число b_1 называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ слева, если каково бы ни было положительное число ε, найдется такое число N (меньше x_0), что для всех x, лежащих между N и x_0 $(N < x < x_0)$, выполняется неравенство* $|f(x) - b_1| < \varepsilon$.

Предел функции при $x \to x_0$ слева обозначают так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b_1$.

Символ $x \to x_0 - 0$ означает, что x стремится к x_0 слева.

Геометрический смысл предела функции при $x \to x_0 - 0$ заключается в следующем: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число $N (N < x_0)$,что для всех x, заключенных между N и x_0, график функции лежит в полосе, ограниченной прямыми $y = b_1 - \varepsilon$ и $y = b_1 + \varepsilon$ (рис. 79).

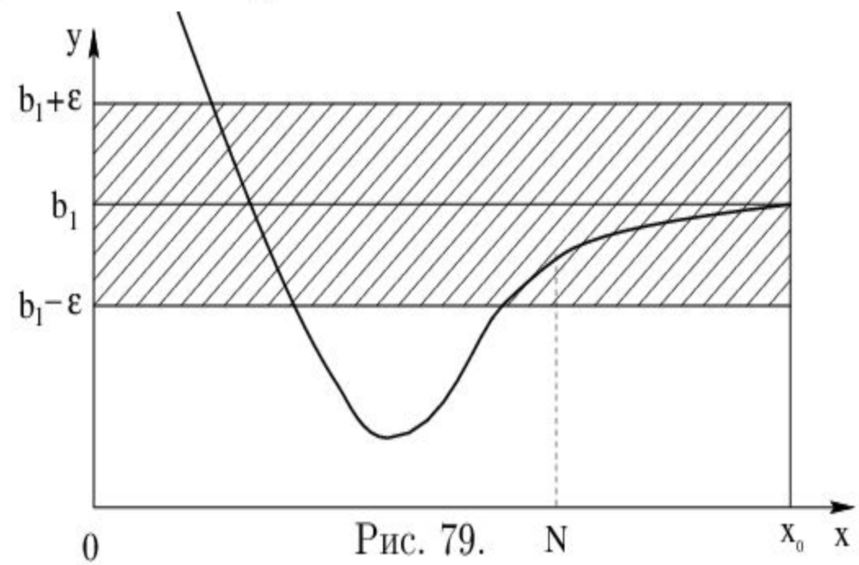

Рис. 79.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = b : \ \forall(\varepsilon > 0)\exists(N < x_0)\forall(N < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - b_1| < \varepsilon.$$

Аналогично пределу функции при $x \to x_0$ слева вводится понятие предела при $x \to x_0$ справа.

Определение 6.7. *Число b_2 называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ справа, если каково бы ни было положительное число ε, найдется такое число M (большее x_0), что для всех x, лежащих между x_0 и M $(x_0 < x < M)$, выполняется неравенство $|f(x) - b_2| < \varepsilon$.*

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = b: \ \forall(\varepsilon > 0)\exists(M > x_0)\forall(x_0 < x < M) \Rightarrow \ |f(x) - b_2| < \varepsilon.$$

Предел функции при $x \to x_0$ справа обозначают так: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = b_2$.

Если функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ справа имеет пределом число b_2, то геометрически это означает, что график функции лежит в полосе, ограниченной прямыми $y = b_2 - \varepsilon$ и $y = b_2 + \varepsilon$ для всех x, заключенных между x_0 и M (рис. 80).

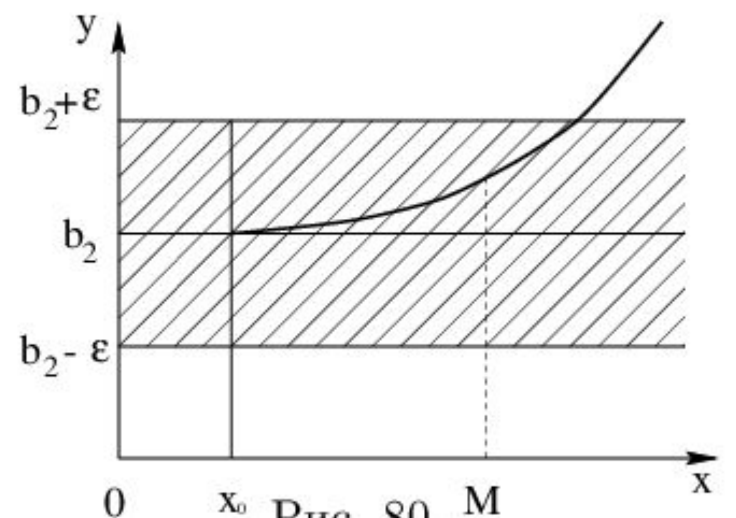

Рис. 80.

Пределы функции при $x \to x_0$ слева $(x \to x_0 - 0)$ и при $x \to x_0$ справа $(x \to x_0 + 0)$ называют односторонними пределами.

Если оба односторонних предела существуют и равны между собой $b_1 = b_2$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет двухсторонний предел при $x \to x_0$, или просто имеет предел при $x \to x_0$. (см. определение 6.4)

6.6. Теоремы об ограниченных функциях

Следующие две теоремы устанавливают связь между понятиями ограниченной функции и функции, имеющей предел. Для определённости рассмотрим случай предела функции при $x \to +\infty$.

Теорема 6.1. *Если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to +\infty$, то она ограничена на некотором бесконечном интервале $(N, +\infty)$.*

Теорема 6.2. *Если функция $y = f(x)$ имеет предел, отличный от нуля (при $x \to +\infty$), то функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ ограничена на некотором бесконечном интервале $(N, +\infty)$.*

Теорема 6.3. *Всякая возрастающая (убывающая) ограниченная функция (последовательность)имеет предел.*

В качестве примера на применение этой теоремы рассмотрим последовательность, общий член которой $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Покажем,что последовательность возрастает и ограничена.

Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + n\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 +$$

$$+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 + \cdots + b^n.$$

Полагая $a=1, b=\frac{1}{n}$, получим $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} +$

$$+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

С увеличением номера n дроби $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ и т.д. уменьшаются, а разности $1-\frac{1}{n}, 1-\frac{2}{n}, 1-\frac{3}{n}$ и т.д. увеличиваются. Следовательно, $y_{n+1} > y_n$ и последовательность $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ – последовательность возрастающая.

Если в разложении y_n отбросить в скобках дроби $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ и т.д., то каждое слагаемое, начиная с третьего, увеличится, и мы получим сумму, большую первоначальной:

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}.$$

Но $\frac{1}{2 \cdot 3} < \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} < \frac{1}{2^{n-1}}.$

Поэтому $\quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$

Сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ найдем по формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $(n \to +\infty)$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Откуда $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3$, а, следовательно, данная последовательность ограничена.

На основании теоремы 6.3 делаем вывод,что данная возрастающая и ограниченная последовательность имеет предел. Его называют числом e.

Итак,
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{6.5}$$

Иногда данный предел называют вторым замечательным пределом.

Число e иррациональное. Его приблизительное значение с точностью до 10^{-8} : $e = 2,71828182$. Аналогично, предел функции
$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$. Можно показать, что и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Обозначив $\dfrac{1}{x} = t$, этот же предел можно записать в виде

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e. \tag{6.6}$$

Предел (6.5) играет большую роль в математике. Показательная функция с основанием e, т.е. $y = e^x$, называется экспоненциальной, или экспонентой. Логарифмы с основанием e называются натуральными логарифмами, причём вместо $\log_e x$ принято писать $\ln x$.

7.1. Бесконечно малые функции

Определение 7.1. *Функция $y = \alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если её предел при $x \to a$ равен нулю, при этом a может быть равно $+\infty$:*

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0. \qquad (7.1)$$

Бесконечно малые функции принято обозначать греческими буквами $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$.

Теорема 7.1. *Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми функциями при $x \to +\infty$, то и их сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ также является бесконечно малой функцией (при $x \to +\infty$).*

Теорема 7.2. *Произведение бесконечно малой функции при $x \to +\infty$ на функцию, ограниченную при $x \to +\infty$, является функцией бесконечно малой.*

Пример 7.6. *Функция $y = \dfrac{\cos x}{x^4}$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$, так как она является произведением ограниченной функции $\cos x$ на бесконечно малую (при $x \to +\infty$) функцию $y = \dfrac{1}{x^4}$.*

Пример 7.7. *Функция $y = x(1 + \sin x)$ является бесконечно малой при $x \to 0$, так как она является произведением ограниченной функции $1 + \sin x$ на функцию x, бесконечно малую при $x \to 0$.*

Теорема 7.3. *Частное от деления функции $\alpha(x)$, бесконечно малой при $x \to a$, на функцию $\varphi(x)$, предел которой (при $x \to a$) отличен от нуля, является функцией бесконечно малой.*

7.2. Бесконечно большие функции

Определение 7.2. *Функция $y = N(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если для любого положительного числа L можно подобрать такое число $\delta > 0$, что для всех значений $x \in (a-\delta; a+\delta)$ выполняется неравенство $|N(x)| > L$.*

Так, например, функция $y = x^2$ является бесконечно большой при $x \to +\infty$. Какое бы положительное число L мы ни взяли, эта функция может быть сделана больше, чем L (для всех значений $x > N = \sqrt{L}$).

Символически бесконечно большая, при $x \to a$ положительная функция записывается в виде:

$$\lim_{x \to a} N(x) = +\infty.$$

Если бесконечно большая функция отрицательна, то говорят, что она стремится к $-\infty$ и пишут:

$$\lim_{x \to a} N(x) = -\infty.$$

Бесконечно большие функции принято обозначать латинскими большими буквами $N(x)$, $M(x)$.

7.3. Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций

Между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями существует тесная связь, которая устанавливается в следующих теоремах.

Теорема 7.4. *Если функция $N(x)$ является бесконечно большой при $x \to a$, то функция $\dfrac{1}{N(x)}$ – бесконечно малая при $x \to a$.*

Пример 7.8. *Функция $y = x^2$ бесконечно большая при $x \to +\infty$. Следовательно, функция $\dfrac{1}{x^2}$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$.*

Теорема 7.5. *Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \to a$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая функция при $x \to a$.*

7.4. Основные теоремы о пределах

Теорема 7.6. *Если функция $y = f(x)$ имеет предел (при $x \to a$), равный b, то её можно представить в виде суммы числа b и бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \to a$:*

$$f(x) = b + \alpha(x). \qquad (7.2)$$

$\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ – бесконечно малая, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ – функция имеет предел.

Теорема 7.7. *(обратная, без доказательства). Если функцию $y = f(x)$ можно представить как сумму числа b и некоторой бесконечно малой функции (при $x \to a$), то число b является пределом функции $f(x)$ (при $x \to a$).*

Теорема 7.8. *Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов.*

Если $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a} \psi(x) = c$, то функции $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ и $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ тоже имеют пределы при $x \to a$.

$$\lim_{x \to a} [\varphi(x) \pm \psi(x)] = \lim_{x \to a} \varphi(x) \pm \lim_{x \to a} \psi(x). \qquad (7.3)$$

Теорема 7.9. *Предел произведения двух функций равен произведению их пределов.*

Если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = c$, то функция $f(x) = \varphi(x)\cdot\psi(x)$ также имеет предел при $x \to a$, причём

$$\lim_{x\to a}[\varphi(x)\cdot\psi(x)] = \lim_{x\to a}\varphi(x)\cdot\lim_{x\to a}\psi(x). \qquad (7.4)$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

$$\lim_{x\to a}[k\cdot\varphi(x)] = k\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x). \qquad (7.5)$$

Следствие 2. Из теоремы 7.9 вытекает, что предел степени равен степени предела:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a}f(x)]^n. \qquad (7.6)$$

Теоремы 7.8 и 7.9 распространяются на любое конечное число функций.

Теорема 7.10. *Предел дроби равен отношению предела числителя и знаменателя, если последний не равен нулю.*

Если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = c$ и $c \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a}[\varphi(x)/\psi(x)] = \lim_{x\to a}\varphi(x)/\lim_{x\to a}\psi(x). \qquad (7.7)$$

Пример 7.10. *Найти* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+3x^2+4}{x^2-2x+3}$.

Решение: На основании навыков, приобретённых при решении предыдущего примера, находим:
предел числителя $\lim\limits_{x\to1}(x^4+3x^2+4)=\lim\limits_{x\to1}x^4+\lim\limits_{x\to1}3x^2+\lim\limits_{x\to1}4=1+3+4=8$,
предел знаменателя $\lim\limits_{x\to1}(x^2-2x+3)=\lim\limits_{x\to1}x^2-\lim\limits_{x\to1}2x+\lim\limits_{x\to1}3=1-2+3=2$.
Применяя теорему о пределе дроби, получим

$$\lim_{x\to1}\frac{x^4+3x^2+4}{x^2-2x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^4+3x^2+4)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2-2x+3)}=\frac{8}{2}=4.$$

Теорема 7.11. *(о промежуточной функции). Пусть даны три функции, удовлетворяющие неравенствам* $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ *для достаточно близких к* a *значений* x. *Если функции* $\varphi(x)$ *и* $g(x)$ *имеют один и тот же предел при* $x\to a$, *то и функция* $f(x)$, *заключенная между ними, имеет предел, равный пределу функций* $\varphi(x)$ *и* $g(x)$.

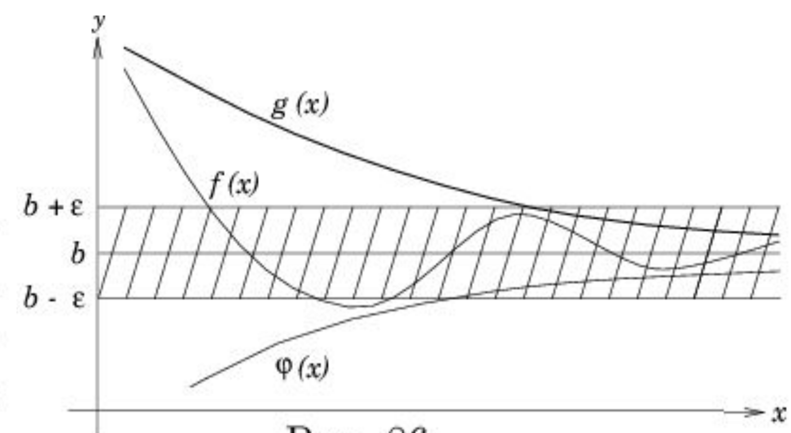

Рис. 86.

В качестве доказательства приведем простую геометрическую интерпретацию условий теоремы при $x\to+\infty$ (рис. 86):

Теорема 7.12. *Если функция* $y=f(x)\geqslant 0$ *для всех* x, *достаточно близких к* a, *имеет предел, то этот предел не может быть отрицательным, т.е.* $\lim\limits_{x\to a}f(x)\geqslant 0$ *(без доказательства).*

7.5. Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Рассмотрим окружность единичного радиуса. Предположим, что $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Дуга $\breve{AC}$ численно равна центральному углу x, выраженному в радианах, а отрезок AB численно равен $\sin x$. Так как $0 < AB < \breve{AC}$, то $0 < \sin x < x$. По теореме о пределе промежуточной функции 7.11 при $x \to 0$ $\sin x$ должен стремиться к нулю, т. е. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$. Можно также показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}) = 1 - 2\lim_{x\to 0}(\sin^2\frac{x}{2}) = 1 - 2\cdot 0 = 1.$$

Как следует из представленного рисунка 87:

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сект}OAC} < S_{\triangle ODC}.$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{OB\cdot BA}{2} = \frac{\cos x\sin x}{2},$$

$$S_{\text{сект }OAC} = \frac{1}{2}R^2x = \frac{1}{2}1^2x = \frac{x}{2},$$

$$S_{\triangle ODC} = \frac{OC\cdot CD}{2} = \frac{1\,\mathrm{tg}\,x}{2} = \frac{\mathrm{tg}\,x}{2},$$

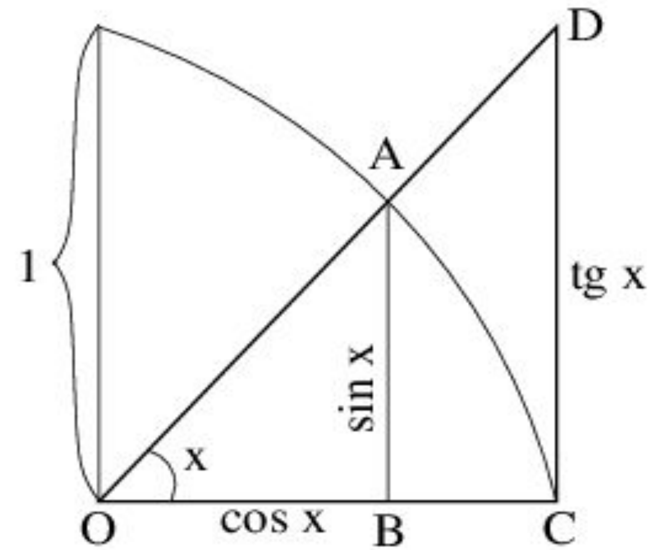

Рис. 87.

то подставив выражения для площадей в неравенство, получим:

$$\frac{\cos x \sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

Разделим все члены неравенств на $\frac{1}{2}\sin x$ и проведем сокращения:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Эти неравенства справедливы, как при $x > 0$, так и при $x < 0$. Как показано выше, при $x \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Применив к частному $\frac{1}{\cos x}$ теорему о пределе дроби, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Поскольку обе крайние функции последнего неравенства при $x \to 0$ имеют одинаковый предел, равный единице, по теореме о пределе промежуточной функции (основные теоремы о пределах) функция $\frac{\sin x}{x}$ имеет тот же предел при $x \to 0$, т. е.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (7.8)$$

Данный предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ принято называть первым замечательным пределом

Пример 7.11. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Р е ш е н и е: Числитель и знаменатель дроби при $x \to 0$ одновременно стремятся к нулю. Теорема о пределе дроби здесь неприменима. Для нахождения предела преобразуем данную дробь:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x = 1\cdot 1 = 1.$$

Пример 7.12. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\arcsin 3x}$.

Р е ш е н и е: При подстановке $x = 0$ имеем дело с неопределённостью вида $\dfrac{0}{0}$. Обозначим $\arcsin 3x = y$, тогда $\sin y = 3x$ и $x = \dfrac{\sin y}{3}$. При $x \to 0$ и $y \to 0$. Следовательно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\arcsin 3x} = \lim_{y\to 0}\frac{5\cdot\dfrac{\sin y}{3}}{y} = \frac{5}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{5}{3}\cdot 1 = \frac{5}{3}.$$

8.1. Сравнение бесконечно малых функций

Определение 8.1. *Функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются бесконечно малыми одного порядка малости при* $x \to a$, *если* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = b \neq 0$ *и* $\neq +\infty$.

Определение 8.2. *Функция* $\alpha(x)$ *называется бесконечно малой более высокого порядка малости, чем функция* $\beta(x)$ *при* $x \to a$, *если* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Определение 8.3. *Функция* $\alpha(x)$ *называется бесконечно малой более низкого порядка малости, чем функция* $\beta(x)$ *при* $x \to a$, *если* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = +\infty$.

Определение 8.4. *Функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются несравнимыми бесконечно малыми при* $x \to a$, *если* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ *не существует и не равен* $+\infty$.

8.2. Эквивалентность бесконечно малых функций

Определение 8.5. *Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, бесконечно малые при $x \to a$, называются эквивалентными (равносильными), если предел их отношения* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Тогда для значений x, близких к $x = a$, имеет место приближённое равенство $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \approx 1$, или $\alpha(x) \approx \beta(x)$, точность которого возрастает с приближением x к a.Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$—эквивалентные бесконечно малые при $x \to a$, то пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Теорема 8.1. *Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций, т. е. если $\alpha \sim \alpha_1$, а $\beta \sim \beta_1$ при $x \to a$, то*

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Дано: $\alpha \sim \alpha_1$, а $\beta \sim \beta_1$ при $x \to a$.

Доказательство:

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta_1(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = 1 \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot 1 = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Пример 8.4. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

Решение: Так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x} = 1, \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} = 1$, то $\sin 5x \sim 5x$, $\sin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, и

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

Теорема 8.2. *Бесконечно малые функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *эквивалентны, если их разность* $[\alpha(x) - \beta(x)]$ *есть бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$.

Дано: $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0$ — функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые при $x \to a$ и $\gamma(x) = \alpha(x) - \beta(x)$.

Доказать, что $\alpha(x) \sim \beta(x)$ т. е. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\gamma(x)}{\beta(x)} = 0$.

Доказательство

$$\lim_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(\varphi(x) - \psi(x))}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \left(1 - \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right) = 1 - \lim_{x\to a} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 1 - 1 = 0.$$

Следовательно, $\gamma(x)$ есть бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем $\alpha(x)$. Аналогично можно доказать, что $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\gamma(x)}{\beta(x)} = 0$.

Теорема 8.3. *Сумма конечного числа бесконечно малых функций различных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.*

Дано: $\lim\limits_{x\to a}\gamma(x)=\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$ — функции $\gamma(x),\alpha(x),\beta(x)$ бесконечно малые при $x\to a$. Пусть для определённости $\gamma(x)$ – бесконечно малая функция низшего порядка малости по сравнения с остальными слагаемыми, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\gamma(x)}=0.$

Доказать, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)+\alpha(x)+\beta(x)}{\gamma(x)}=1$, т.е. сумма бесконечно малых функций при $x\to a$ эквивалентна в данном случае $\gamma(x)$.

Доказательство

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)+\alpha(x)+\beta(x)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to a}1+\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}+\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}=1+0+0=1.$$

Пример 8.5. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+6x^2}{\sin 2x}$.

Р е ш е н и е: Так как при $x\to 0$ $5x+6x^2\sim 5x$ (по теореме 8.3) и $\sin 2x\sim 2x$ (по теореме 8.1), то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x+6x^2}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2}$.

8.3. Приемы раскрытия неопределённостей

При рассмотрении арифметических операций над пределами предполагается, что обе переменные величины имеют предел $x \to x_0$, а в случае предела частного оговаривается, что предел знаменателя не равен нулю.

Существуют случаи, когда эти условия не выполняются. Например, переменные, стоящие в числителе и знаменателе, при $x \to x_0$ стремятся одновременно к нулю или бесконечности. В этом случае говорят, что имеет место неопределённость соответствующего типа: $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Если сумма бесконечно больших величин при $x \to x_0$ одного знака есть величина бесконечно большая, то о пределе разности таких величин заранее ничего сказать нельзя – неопределённость типа $+\infty - \infty$.

При умножении бесконечно малой величины при $x \to x_0$ на бесконечно большую при $x \to x_0$ возникает неопределённость типа $0 \cdot \infty$.

При рассмотрении 2-го замечательного предела мы также видели, что $\lim\limits_{x \to x_0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\beta(x)}}$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые величины при $x \to x_0$, может быть различным, все зависит от стремления $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ к нулю при $x \to x_0$. Это неопределённость типа $1^{+\infty}$.

Раскрыть неопределённость – это значит определить поведение выражения, приводящего к данной неопределённости, и найти его предел.

Рассмотрим несколько приемов раскрытия неопределённостей различного типа.

Пример 8.6. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5}{2x+7}$.

Р е ш е н и е: В данном примере числитель и знаменатель – бесконечно большие величины, т.е. имеет место неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть эту неопределённость, разделим числитель и знаменатель на x. Получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{2x+7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+5/x}{2+7/x}=\frac{3}{2},$$

так как при $x\to+\infty$ каждая из дробей $\dfrac{5}{x}$ и $\dfrac{7}{x}$ стремится к нулю.

Аналогично понятию эквивалентности бесконечно малых функций можно ввести понятие эквивалентности бесконечно большой функции.

Определение 8.6. *Функции* $N(x)$ *и* $M(x)$ *бесконечно большие при* $x\to a$ *называются эквивалентными, если предел их отношения* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{N(x)}{M(x)}=1$.

Очевидно, что многочлен $P_n(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0$ эквивалентен при $x\to+\infty$ члену с наивысшим показателем степени b_nx^n, так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P_n(x)}{b_nx^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0}{b_nx^n}=1$$

Следовательно, для отношения многочленов при $x \to +\infty$ будет иметь место правило

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n} = \frac{a_m}{b_n} \lim_{x\to+\infty} x^{m-n} \quad (8.1)$$

- *если степень числителя меньше степени знаменателя* $(m < n)$, *то предел равен нулю;*
- *если степень числителя больше степени знаменателя* $(m > n)$, *то предел равен* $+\infty$ *или* $-\infty$*;*
- *если степени числителя и знаменателя равны* $(m = n)$, *то предел равен конечному числу* $\dfrac{a_m}{b_m}$.

Пример 8.7. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8x^3 + 3x - 5}{4x^3 - 2x^2 + 3}$.

Р е ш е н и е: Согласно правилу (8.1)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8x^3 + 3x - 5}{4x^3 - 2x^2 + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x^3}{4x^3} = 2.$$

Пример 8.8. *Найти* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^5-2x^2+3}{2x^4+3x-5}$.

Решение: Согласно правилу (8.1)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^5-2x^2+3}{2x^4+3x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^5}{2x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{2}=-\infty.$$

Правило, подобное (8.1), справедливо и для иррациональных выражений.

Пример 8.9. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sqrt[3]{x^2+5x-4}+\sqrt{x}}{\sqrt[6]{2x^4-3x+2}+2\sqrt[3]{x}}$.

Решение: Так как при $x\to+\infty$ $3\sqrt[3]{x^2+5x-4}\sim 3\sqrt[3]{x^2}=3x^{2/3}$, $\sqrt{x}=x^{1/2}$ $\sqrt[6]{2x^4-3x+2}\sim\sqrt[6]{2x^4}=\sqrt[6]{2}x^{2/3}$, $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$. Наивысшая степень x в числителе имеет слагаемое $3\sqrt[3]{x^2+5x-4}\sim 3x^{2/3}$, знаменателе $\sqrt[6]{2x^4-3x+2}\sim\sqrt[6]{2}x^{2/3}$, следовательно

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt[3]{x^2+5x-4}+\sqrt{x}}{\sqrt[6]{2x^4-3x+2}+2\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^{2/3}}{\sqrt[6]{2}x^{2/3}}=\frac{3}{\sqrt[6]{2}}.$$

При вычислении пределов, содержащих иррациональные выражения, также часто используют следующие приемы:

- введение новой переменной для получения рационального выражения, если это возможно;
- перевод иррациональности из знаменателя в числитель и наоборот, при этом используются формулы тождественных преобразований алгебраических выражений:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{y})=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2=x-y \quad (x\geqslant 0, y\geqslant 0),$$

$$(\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{y})\cdot(\sqrt[3]{x^2}\mp\sqrt[3]{x\cdot y}+\sqrt[3]{y^2})=(\sqrt[3]{x})^3\pm(\sqrt[3]{y})^3=$$
$$=x\pm y \quad (x\geqslant 0, y\geqslant 0).$$

Пример 8.10. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)$.

Р е ш е н и е: Здесь неопределенность типа $+\infty-\infty$. Умножим и разделим выражение под пределом на сопряжённое ему выражение $\sqrt{x^2-1}+x$.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0.$$

Пример 8.11. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$.

Р е ш е н и е: Опять мы имеем дело с неопределённостью типа $+\infty-\infty$. Устранить эту неопределенность можно, если умножить и разделить исходное выражение на неполный квадрат суммы двух выражений. После этого можно применить формулу разности кубов двух выражений.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt[3]{x+1})^3-(\sqrt[3]{x})^3}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)x}+\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt[3]{x+1})^3-(\sqrt[3]{x})^3}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)x}+\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+x}+\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+x}+\sqrt[3]{x^2}}=0.$$

Если мы применим к примерам 8.10 и 8.11 правило эквивалентности бесконечно больших функций, то получим тот же результат.

Однако стоит несколько изменить условия примеров и результат окажется другим.

Пример 8.12. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x-1}-x)$

Р е ш е н и е:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x-1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x-1}-x)(\sqrt{x^2+3x-1}+x)}{(\sqrt{x^2+3x-1}+x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-1-x^2}{(\sqrt{x^2+3x-1}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{(\sqrt{x^2+3x-1}+x)}=$$

$$=|\text{Знаменатель}\quad \sqrt{x^2+3x-1}+x\sim 2x|=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{2x}=\frac{3}{2}.$$

Поэтому применять принцип эквивалентности в случае разности бесконечно больших функций $N(x)-M(x)$ можно, если коэффициенты при степенях наивысшего порядка x в $N(x)$ и $M(x)$ не равны, поскольку в противном случае главную роль могут играть слагаемые низшего порядка.

Чтобы определить предел дробно-рациональной функции в случае, когда при $x \to x_0$ числитель и знаменатель имеют пределы, равные нулю (неопределенность $\frac{0}{0}$), надо числитель и знаменатель дроби разделить на $(x - x_0)$ и перейти к вычислению предела. Если же и после этого числитель и знаменатель новой дроби имеют пределы, равные нулю при $x \to x_0$, то надо произвести повторное деление на $(x - x_0)$ и т.д., до тех пор, пока не будет получен окончательный результат. В некоторых случаях эту неопределенность можно легко раскрыть, разложив предварительно числитель и знаменатель на сомножители и сократив на $(x - x_0)$.

Пример 8.13. *Найти* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$.

Решение: При подстановке предельного значения аргумента $x = 3$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю. Имеет место неопределенность $\frac{0}{0}$. Разложим выражение в числителе и знаменателе и произведем сокращение на $(x - 3)$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x} = 2.$$

При решении ряда примеров целесообразно использовать понятие эквивалентности бесконечно малых функций.

Пример 8.14. *Найдите* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2 + 3\sin 2x + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{arctg} 3x + 5x^2}$

Решение: Так как при $x \to 0$ $\sin 2x \sim 2x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\operatorname{arctg} 3x \sim 3x$. Имеем, что низший порядок малости по x числителя имеет слагаемое $3\sin 2x$, знаменателя – $\operatorname{arctg} 3x$.Следовательно, согласно теореме 8.3, числитель $5x^2 + 3\sin 2x + \operatorname{tg}^2 x \sim 3\sin 2x \sim 6x$, знаменатель $\operatorname{arctg} 3x + 5x^2 \sim \operatorname{arctg} 3x \sim 3x$. И на основании теоремы 8.1

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x^2 + 3\sin 2x + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{arctg} 3x + 5x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{3x} = 2.$$

При нахождении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)} = C \quad (8.2)$

следует иметь в виду, что:

- если существуют конечные пределы $A = \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ и $B = \lim\limits_{x\to a}\psi(x)$, то $C = A^B$;
- если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A \neq 1$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \pm + \infty$, то вопрос о нахождении предела решается непосредственно подстановкой предельного значения аргумента;
- если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A = 1$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = +\infty$, то полагают $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$ и, следовательно,

$$C = \lim_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)} = \lim_{x\to a}\{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\}^{\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)-1]\psi(x)},$$

так как в данном случае при

$$x \to a \lim_{x\to a}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e.$$

Пример 8.15. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{2x}\right)^{1+x}$.

Решение: Здесь $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x}=2$ и $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{2x}\right)^{1+x}=2^1=2.$$

Пример 8.16. *Найти* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{4x^2-3}\right)^{x+3}$.

Решение: Здесь $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+1}{4x^2-3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{4-\dfrac{3}{x^2}}\right)=\dfrac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+3)=+\infty$,

поэтому $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+1}{4x^2-3}\right)^{x+3}=(\frac{1}{4})^{+\infty}=\frac{1}{4^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

Пример 8.17. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^x$.

Р е ш е н и е: Здесь $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+8}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{8}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$,

т.е. имеет место неопределенность $1^{+\infty}$. Произведя указанные выше преобразования ($\varphi(x)=1+\alpha(x)$), получим

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\left(\frac{x+8}{x-2}-1\right)\right]^x=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\left(\frac{10}{x-2}\right)\right]^x=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[1+\frac{10}{x-2}\right]^{\dfrac{x-2}{10}}\right\}^{\dfrac{10}{x-2}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10x}{x-2}}=e^{10}.$$

В данном случае, не прибегая к общему приему, можно найти предел проще:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{8}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{8}{x}\right)^{\dfrac{x}{8}}\right]^8}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\left\{\dfrac{-2}{x}\right\}\right)^{-\dfrac{x}{2}}\right]^{-2}}=e^{10}.$$

В дальнейшем полезно помнить, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x = e^k$, или в более общем виде

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x^m}\right)^{bx^n} = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{a}{x^m}\right)^{\frac{x^m}{a}}\right)^{\frac{a}{x^m}bx^n} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} abx^{n-m}} = \tag{8.3}$$

$$= \begin{cases} +\infty, & n>m; ab>0 \\ 0, & n>m, ab<0 \\ e^{ab}, & n=m; \\ 1, & n<m. \end{cases}$$

Спасибо за внимание