

# Лекция 4

## Теория пределов.

### Литература.

В.Г. Зубков, В.А.Ляховский, А.И.Мартыненко, В.Б.Миносцев.  
Курс математики для технических высших учебных заведений  
Учебное пособие часть I Под редакцией В.Б.Миносцева и Е.А.  
Пушкаря. 2012г. Лекция 6, 7, 8.

Числовые последовательности, предел последовательности, прогрессии, предел функции, односторонние пределы, ограниченные функции.

Бесконечно малые функции, бесконечно большие функции, связь бесконечно больших и бесконечно малых функций, основные теоремы о пределах, 1-ый замечательный предел.

Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентность бесконечно малых функций. Приемы раскрытия неопределённостей.

## 6.1. Числовые последовательности

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.** *Функция  $y = f(n)$ , областью определения которой является множество натуральных чисел  $N$ , называется функцией натурального аргумента, или числовой последовательностью.*

Члены числовой последовательности располагаются в порядке возрастания аргумента:

$$y_1 = f(1), y_2 = f(2), y_3 = f(3), \dots, y_n = f(n), \dots$$

$y_1 = f(1)$  – первый член последовательности,  $y_2 = f(2)$  – второй,  $y_n = f(n)$  –  $n$ -й член последовательности, или общий член последовательности. Последовательности кратко обозначают  $\{y_n\}$ . Примеры числовых последовательностей:

**ПРИМЕР 6.1.**  $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$  или  $\{1/n\}$ .

**ПРИМЕР 6.2.**  $-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$  или  $\{(-1)^n\}$ .

**ПРИМЕР 6.3.**  $1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots$  или  $\{2n - 1\}$ .

**ПРИМЕР 6.4.**  $0, 1/2, 2/3, \dots, (n - 1)/n, \dots$  или  $\{(n - 1)/n\}$ .

## 6.2. Предел числовой последовательности

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2.** Число  $b$  называется пределом числовой последовательности  $\{y_n\}$ , если для любого положительного сколь угодно малого числа  $\varepsilon$  найдется такое число  $N$ , что для всех  $n > N$  выполняется неравенство  $|y_n - b| < \varepsilon$ .

Символическая запись определения предела последовательности

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b : \quad (6.1)$$

$$\forall_{\varepsilon} (\varepsilon > 0) \exists N \forall_n (n > N) \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon.$$

Поскольку неравенство  $|y_n - b| < \varepsilon$  равносильно  $b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$ , то геометрический смысл предела последовательности можно представить следующим образом: если последовательность имеет пределом число  $b$ , то каково бы ни было  $\varepsilon > 0$ , найдется такое  $N$ , что все точки, изображающие члены последовательности с номерами  $n > N$ , попадут в полосу, ограниченную прямыми  $y = b - \varepsilon$ ,  $y = b + \varepsilon$  (рис. 75).

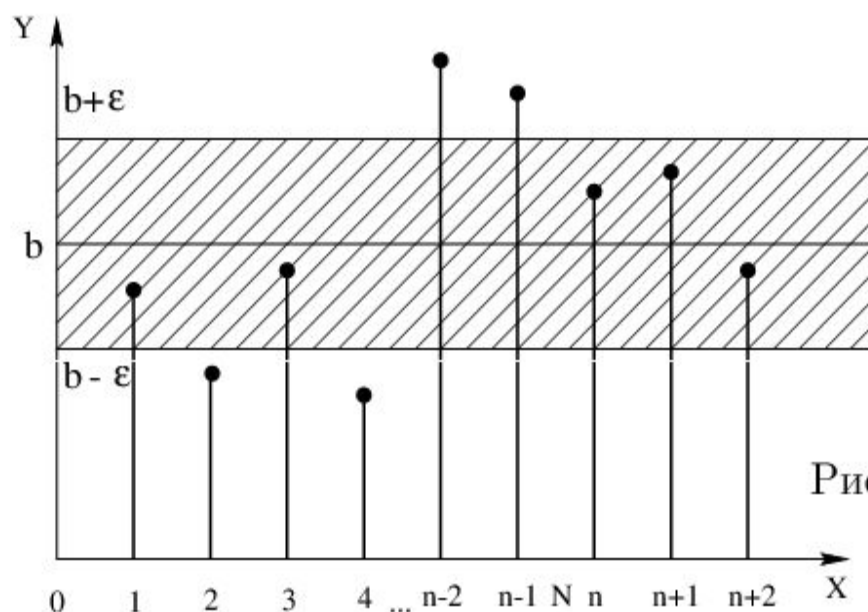


Рис. 75.

Частным случаем последовательности являются прогрессии. Общий член арифметической прогрессии:  $a_n = a_1 + d(n - 1)$ . Характеристическое свойство арифметической прогрессии:  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+2})$ . Сумма  $k$  членов арифметической прогрессии  $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k = \frac{1}{2}(a_1 + a_k)k = \frac{1}{2}(2a_1 + d(k - 1))k$ .

Геометрическая прогрессия – числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число  $q$ , называемое знаменателем геометрической прогрессии  $\Rightarrow b_1 = b (b \neq 0); b_{n+1} = b_n \cdot q (q \neq 0)$ .

Общий член геометрической прогрессии:  $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ . Характеристическое свойство геометрической прогрессии:  $|b_{n+1}| = \sqrt{b_n \cdot b_{n+2}}$ .

Формула суммы  $k$  членов геометрической прогрессии:  $S_k = \frac{b_1(1 - q^k)}{1 - q}$ .

Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии  $|q| < 1$  и сумма  $S = \frac{b_1}{1 - q}$ .

## 6.4. Предел функции

6.4.1. *Предел функции при  $x \rightarrow +\infty$ .* Проследим характер изменения функции  $y = f(x) = 2 - \frac{1}{x}$  при возрастании значения аргумента  $x$ :

$x$	1	2	10	100	1000
$y$	1	1.5	1.9	1.99	1.999

и построим её график (рис. 76).

Пусть  $M(x, y)$  – текущая точка графика функции  $y = 2 - \frac{1}{x}$ . Тогда расстояние  $MN$  от этой точки до прямой  $y = 2$  можно определить как

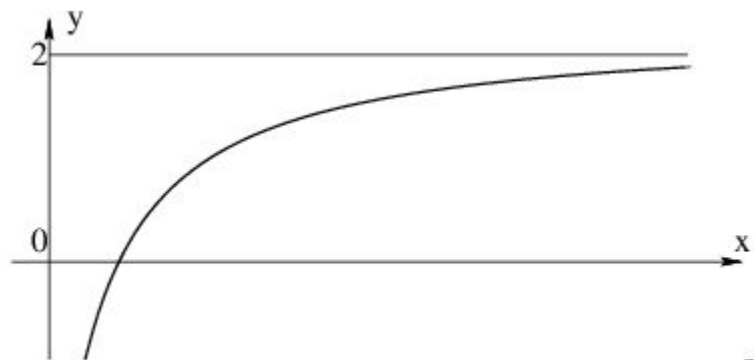


Рис. 76. График функции  $y = 2 - \frac{1}{x}$

$$d = |y - 2| = |f(x) - 2| = \left| \left( 2 - \frac{1}{x} \right) - 2 \right| = \left| \frac{1}{-x} \right| = \frac{1}{|x|}.$$

Совершенно очевидно, что с ростом значения аргумента  $x$  расстояние  $d$  уменьшается. Если  $x > \frac{1}{\varepsilon}$ , то  $|f(x) - 2| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$ , следовательно, функция неограниченно приближается к числу 2 или при бесконечно возрастающем  $x$  ( $x \rightarrow +\infty$ ) имеет пределом число 2.

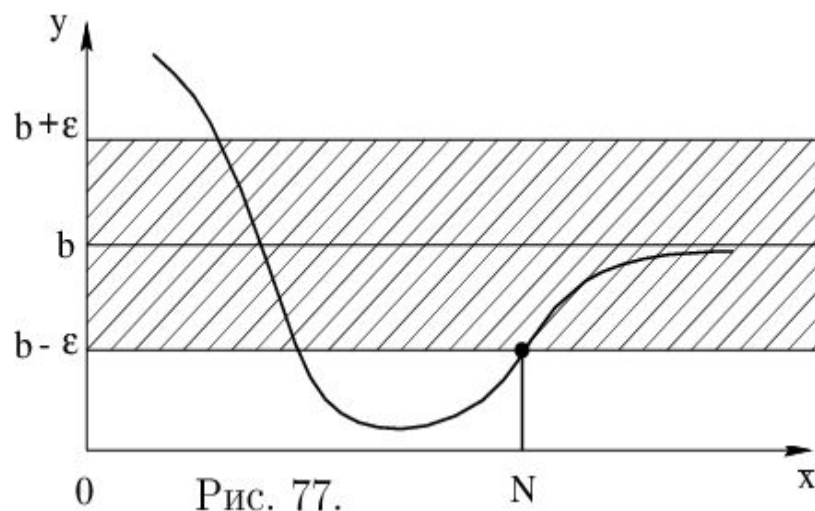
**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3.** Число  $b$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если каково бы ни было положительное число  $\varepsilon$ , можно найти такое число  $N$ , что для всех  $x > N$  выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Символическая запись предела функции при  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b : \forall_{\varepsilon} (\varepsilon > 0) \exists N \forall_x (x > N) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \quad (6.2)$$

С учётом того, что неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$  эквивалентно системе неравенств  $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ , геометрический смысл предела функции при  $x \rightarrow +\infty$  можно проиллюстрировать с помощью графика функции (рис. 77).



Аналогично пределу функции при  $x \rightarrow +\infty$  можно ввести понятие предела функции при  $x \rightarrow -\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b : \forall_{\varepsilon} (\varepsilon > 0) \exists M \forall_x (x < M) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \quad (6.3)$$

## 6.4.2. Предел функции при $x \rightarrow x_0$ .

7

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4.** Число  $b$  является пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если каково бы ни было  $\varepsilon$ , можно найти такие числа  $N$  и  $M$  ( $N < x_0 < M$ ), что для всех  $x$ , лежащих в интервале  $(N; M)$  (за исключением, быть может, точки  $x_0$ ), выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Символическая запись предела функции при  $x \rightarrow x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b : \forall(\varepsilon > 0) \exists (N < x_0 < M) \quad (6.4)$$

$$\forall_x (N < x < M, \text{ кроме м.б. } x = x_0) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл этого предела легко понять из графика на рис. 78.

Определение предела функции можно дать в несколько ином виде.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.5.** Число  $b$  является пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , такое, что  $|f(x) - b| < \varepsilon$  при  $0 < |x - x_0| < \delta$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b : \forall(\varepsilon > 0) \exists(\delta > 0) \forall(|x - x_0| < \delta, \text{ кр.м.б. } x = x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Число  $\delta$  определяет собой некоторую  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$  – интервал  $(x - \delta, x + \delta)$ , содержащий точку  $x_0$ . Оба определения предела функции при  $x \rightarrow x_0$  (6.4 и 6.5) равносильны.

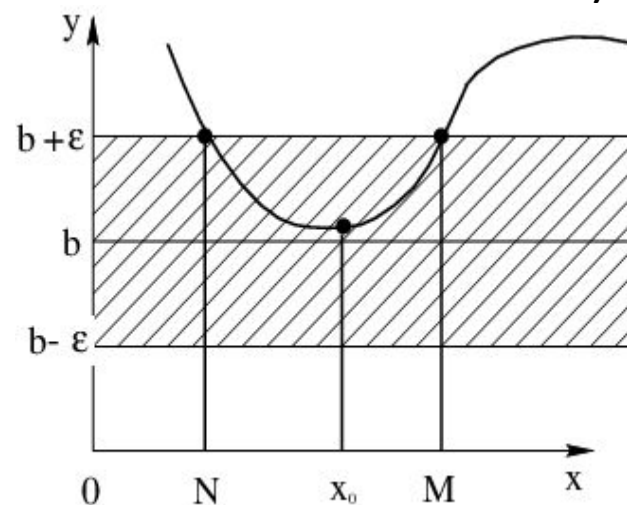


Рис. 78.

## 6.5. Односторонние пределы

Рассмотрим вначале случай, когда независимая переменная  $x$  приближается к  $x_0$  слева.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.6.** Число  $b_1$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  слева, если каково бы ни было положительное число  $\varepsilon$ , найдется такое число  $N$  (меньше  $x_0$ ), что для всех  $x$ , лежащих между  $N$  и  $x_0$  ( $N < x < x_0$ ), выполняется неравенство  $|f(x) - b_1| < \varepsilon$ .

Предел функции при  $x \rightarrow x_0$  слева обозначают так:  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = b_1$ .

Символ  $x \rightarrow x_0 - 0$  означает, что  $x$  стремится к  $x_0$  слева.

Геометрический смысл предела функции при  $x \rightarrow x_0 - 0$  заключается в следующем: каково бы ни было  $\varepsilon > 0$ , найдется такое число  $N$  ( $N < x_0$ ), что для всех  $x$ , заключенных между  $N$  и  $x_0$ , график функции лежит в полосе, ограниченной прямыми  $y = b_1 - \varepsilon$  и  $y = b_1 + \varepsilon$  (рис. 79).

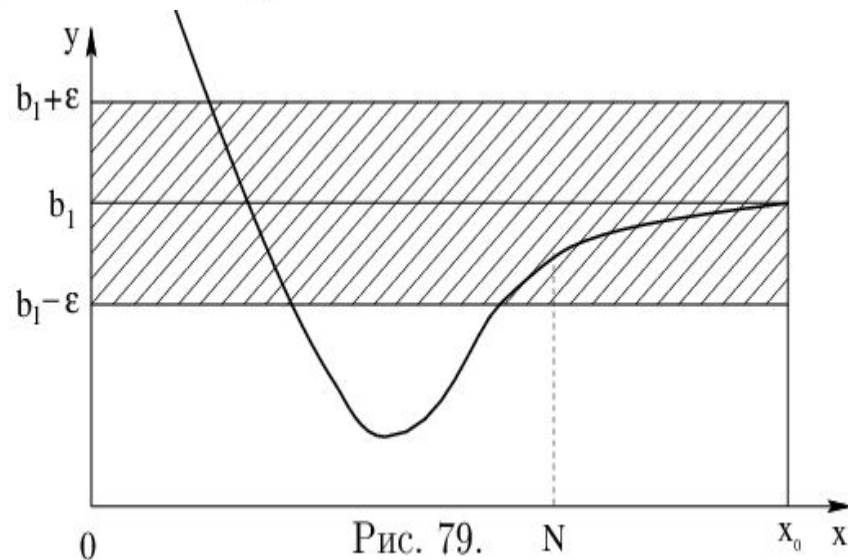


Рис. 79.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = b : \forall(\varepsilon > 0) \exists(N < x_0) \forall(N < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - b_1| < \varepsilon.$$



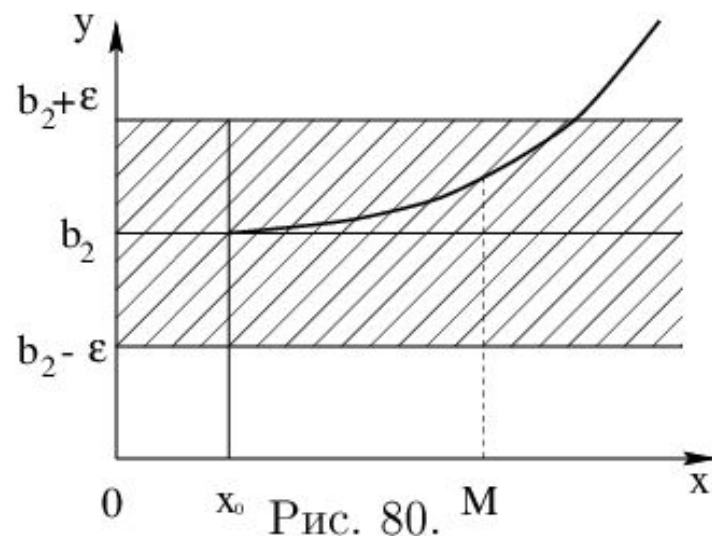
Аналогично пределу функции при  $x \rightarrow x_0$  слева вводится понятие предела при  $x \rightarrow x_0$  справа.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.7.** Число  $b_2$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  справа, если каково бы ни было положительное число  $\varepsilon$ , найдется такое число  $M$  (большее  $x_0$ ), что для всех  $x$ , лежащих между  $x_0$  и  $M$  ( $x_0 < x < M$ ), выполняется неравенство  $|f(x) - b_2| < \varepsilon$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = b : \forall(\varepsilon > 0) \exists(M > x_0) \forall(x_0 < x < M) \Rightarrow |f(x) - b_2| < \varepsilon.$$

Предел функции при  $x \rightarrow x_0$  справа обозначают так:  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = b_2$ .

Если функция  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  справа имеет пределом число  $b_2$ , то геометрически это означает, что график функции лежит в полосе, ограниченной прямыми  $y = b_2 - \varepsilon$  и  $y = b_2 + \varepsilon$  для всех  $x$ , заключенных между  $x_0$  и  $M$  (рис. 80). Пределы функции при  $x \rightarrow x_0$  слева ( $x \rightarrow x_0 - 0$ ) и при  $x \rightarrow x_0$  справа ( $x \rightarrow x_0 + 0$ ) называют односторонними пределами.



Если оба односторонних предела существуют и равны между собой  $b_1 = b_2$ , то говорят, что функция  $f(x)$  имеет двухсторонний предел при  $x \rightarrow x_0$ , или просто имеет предел при  $x \rightarrow x_0$ . (см. определение 6.4)

Следующие две теоремы устанавливают связь между понятиями ограниченной функции и функции, имеющей предел. Для определённости рассмотрим случай предела функции при  $x \rightarrow +\infty$ .

**ТЕОРЕМА 6.1.** *Если функция  $y = f(x)$  имеет предел при  $x \rightarrow +\infty$ , то она ограничена на некотором бесконечном интервале  $(N, +\infty)$ .*

**ТЕОРЕМА 6.2.** *Если функция  $y = f(x)$  имеет предел, отличный от нуля (при  $x \rightarrow +\infty$ ), то функция  $y = \frac{1}{f(x)}$  ограничена на некотором бесконечном интервале  $(N, +\infty)$ .*

**ТЕОРЕМА 6.3.** *Всякая возрастающая (убывающая) ограниченная функция (последовательность) имеет предел.*

В качестве примера на применение этой теоремы рассмотрим последовательность, общий член которой  $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Покажем, что последовательность возрастает и ограничена.

$$(a + b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n \cdot (n - 1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \\ + \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + b^n.$$

Полагая  $a = 1, b = \frac{1}{n}$ , получим  $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (n - 1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \\ + \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - n + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n - 1}{n}\right).$

С увеличением номера  $n$  дроби  $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$  и т.д. уменьшаются, а разности  $1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}, 1 - \frac{3}{n}$  и т.д. увеличиваются. Следовательно,  $y_{n+1} > y_n$

и последовательность  $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  – последовательность возрастающая.

Если в разложении  $y_n$  отбросить в скобках дроби  $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$  и т.д., то каждое слагаемое, начиная с третьего, увеличится, и мы получим сумму, большую первоначальной:

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}.$$

Но  $\frac{1}{2 \cdot 3} < \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} < \frac{1}{2^{n-1}}.$

Поэтому  $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$

Сумму  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$  найдем по формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии ( $n \rightarrow +\infty$ ):

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Откуда  $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3$ , а, следовательно, данная последовательность ограничена.

На основании теоремы 6.3 делаем вывод, что данная возрастающая и ограниченная последовательность имеет предел. Его называют числом  $e$ .

Итак, 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (6.5)$$

Иногда данный предел называют вторым замечательным пределом.

Число  $e$  иррациональное. Его приблизительное значение с точностью до  $10^{-8}$  :  $e = 2,71828182$ . Аналогично, предел функции

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \text{ Можно показать, что и } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Обозначив  $\frac{1}{x} = t$ , этот же предел можно записать в виде

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e. \quad (6.6)$$

Предел (6.5) играет большую роль в математике. Показательная функция с основанием  $e$ , т.е.  $y = e^x$ , называется экспоненциальной, или экспонентой. Логарифмы с основанием  $e$  называются натуральными логарифмами, причём вместо  $\log_e x$  принято писать  $\ln x$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1.** Функция  $y = \alpha(x)$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow a$ , если её предел при  $x \rightarrow a$  равен нулю, при этом  $a$  может быть равно  $+\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0. \quad (7.1)$$

Бесконечно малые функции принято обозначать греческими буквами  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\gamma(x)$ .

**ТЕОРЕМА 7.1.** Если функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  являются бесконечно малыми функциями при  $x \rightarrow +\infty$ , то и их сумма  $\alpha(x) + \beta(x)$  также является бесконечно малой функцией (при  $x \rightarrow +\infty$ ).

**ТЕОРЕМА 7.2.** Произведение бесконечно малой функции при  $x \rightarrow +\infty$  на функцию, ограниченную при  $x \rightarrow +\infty$ , является функцией бесконечно малой.

**ПРИМЕР 7.6.** Функция  $y = \frac{\cos x}{x^4}$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow +\infty$ , так как она является произведением ограниченной функции  $\cos x$  на бесконечно малую (при  $x \rightarrow +\infty$ ) функцию  $y = \frac{1}{x^4}$ .

**ПРИМЕР 7.7.** Функция  $y = x(1 + \sin x)$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow 0$ , так как она является произведением ограниченной функции  $1 + \sin x$  на функцию  $x$ , бесконечно малую при  $x \rightarrow 0$ .

**ТЕОРЕМА 7.3.** Частное от деления функции  $\alpha(x)$ , бесконечно малой при  $x \rightarrow a$ , на функцию  $\varphi(x)$ , предел которой (при  $x \rightarrow a$ ) отличен от нуля, является функцией бесконечно малой.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2.** Функция  $y = N(x)$  называется бесконечно большой при  $x \rightarrow a$ , если для любого положительного числа  $L$  можно подобрать такое число  $\delta > 0$ , что для всех значений  $x \in (a - \delta; a + \delta)$  выполняется неравенство  $|N(x)| > L$ .

Так, например, функция  $y = x^2$  является бесконечно большой при  $x \rightarrow +\infty$ . Какое бы положительное число  $L$  мы ни взяли, эта функция может быть сделана больше, чем  $L$  (для всех значений  $x > N = \sqrt{L}$ ).

Символически бесконечно большая, при  $x \rightarrow a$  положительная функция записывается в виде:

$$\lim_{x \rightarrow a} N(x) = +\infty.$$

Если бесконечно большая функция отрицательна, то говорят, что она стремится к  $-\infty$  и пишут:

$$\lim_{x \rightarrow a} N(x) = -\infty.$$

Бесконечно большие функции принято обозначать латинскими большими буквами  $N(x)$ ,  $M(x)$ .

Между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями существует тесная связь, которая устанавливается в следующих теоремах.

**ТЕОРЕМА 7.4.** *Если функция  $N(x)$  является бесконечно большой при  $x \rightarrow a$ , то функция  $\frac{1}{N(x)}$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow a$ .*

**ПРИМЕР 7.8.** *Функция  $y = x^2$  бесконечно большая при  $x \rightarrow +\infty$ . Следовательно, функция  $\frac{1}{x^2}$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow +\infty$ .*

**ТЕОРЕМА 7.5.** *Если функция  $\alpha(x)$  есть бесконечно малая при  $x \rightarrow a$ , то  $\frac{1}{\alpha(x)}$  — бесконечно большая функция при  $x \rightarrow a$ .*



## 7.4. Основные теоремы о пределах

**ТЕОРЕМА 7.6.** *Если функция  $y = f(x)$  имеет предел (при  $x \rightarrow a$ ), равный  $b$ , то её можно представить в виде суммы числа  $b$  и бесконечно малой функции  $\alpha(x)$  при  $x \rightarrow a$ :*

$$f(x) = b + \alpha(x). \quad (7.2)$$

$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$  – бесконечно малая,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  – функция имеет предел.

**ТЕОРЕМА 7.7.** *(обратная, без доказательства). Если функцию  $y = f(x)$  можно представить как сумму числа  $b$  и некоторой бесконечно малой функции (при  $x \rightarrow a$ ), то число  $b$  является пределом функции  $f(x)$  (при  $x \rightarrow a$ ).*

**ТЕОРЕМА 7.8.** *Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов.*

Если  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = c$ , то функции  $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$  и  $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$  тоже имеют пределы при  $x \rightarrow a$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x) \pm \psi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} \psi(x). \quad (7.3)$$

**ТЕОРЕМА 7.9.** *Предел произведения двух функций равен произведению их пределов.*

Если  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = c$ , то функция  $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$  также имеет предел при  $x \rightarrow a$ , причём

$$\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x) \cdot \psi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \psi(x). \quad (7.4)$$

**Следствие 1.** Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a} [k \cdot \varphi(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x). \quad (7.5)$$

**Следствие 2.** Из теоремы 7.9 вытекает, что предел степени равен степени предела:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n. \quad (7.6)$$

Теоремы 7.8 и 7.9 распространяются на любое конечное число функций.

**ТЕОРЕМА 7.10.** *Предел дроби равен отношению предела числителя и знаменателя, если последний не равен нулю.*

Если  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = c$  и  $c \neq 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x)/\psi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) / \lim_{x \rightarrow a} \psi(x). \quad (7.7)$$

ПРИМЕР 7.10. *Найти*  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 3x^2 + 4}{x^2 - 2x + 3}$ .

**Решение:** На основании навыков, приобретённых при решении предыдущего примера, находим:

$$\text{предел числителя } \lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + 3x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow 1} x^4 + \lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 4 = 1 + 3 + 4 = 8,$$

$$\text{предел знаменателя } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 2x + \lim_{x \rightarrow 1} 3 = 1 - 2 + 3 = 2.$$

Применяя теорему о пределе дроби, получим

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 3x^2 + 4}{x^2 - 2x + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + 3x^2 + 4)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3)} = \frac{8}{2} = 4.$$

**ТЕОРЕМА 7.11.** *(о промежуточной функции).* Пусть даны три функции, удовлетворяющие неравенствам  $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$  для достаточно близких к  $a$  значений  $x$ . Если функции  $\varphi(x)$  и  $g(x)$  имеют один и тот же предел при  $x \rightarrow a$ , то и функция  $f(x)$ , заключённая между ними, имеет предел, равный пределу функций  $\varphi(x)$  и  $g(x)$ .

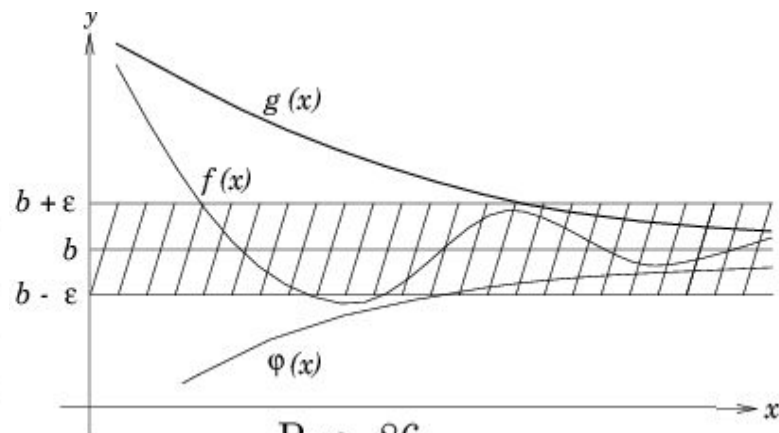


Рис. 86.

В качестве доказательства приведем простую геометрическую интерпретацию условий теоремы при  $x \rightarrow +\infty$  (рис. 86):

**ТЕОРЕМА 7.12.** *Если функция  $y = f(x) \geq 0$  для всех  $x$ , достаточно близких к  $a$ , имеет предел, то этот предел не может быть отрицательным, т.е.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$  (без доказательства).*

## 7.5. Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Рассмотрим окружность единичного радиуса. Предположим, что  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Дуга  $\overset{\frown}{AC}$  численно равна центральному углу  $x$ , выраженному в радианах, а отрезок  $AB$  численно равен  $\sin x$ . Так как  $0 < AB < \overset{\frown}{AC}$ , то  $0 < \sin x < x$ . По теореме о пределе промежуточной функции 7.11 при  $x \rightarrow 0$   $\sin x$  должен стремиться к нулю, т. е.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ . Можно также показать, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \cdot 0 = 1.$$

Как следует из представленного рисунка 87:

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сект} OAC} < S_{\triangle ODC}.$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{OB \cdot BA}{2} = \frac{\cos x \sin x}{2},$$

$$S_{\text{сект} OAC} = \frac{1}{2} R^2 x = \frac{1}{2} 1^2 x = \frac{x}{2},$$

$$S_{\triangle ODC} = \frac{OC \cdot CD}{2} = \frac{1 \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

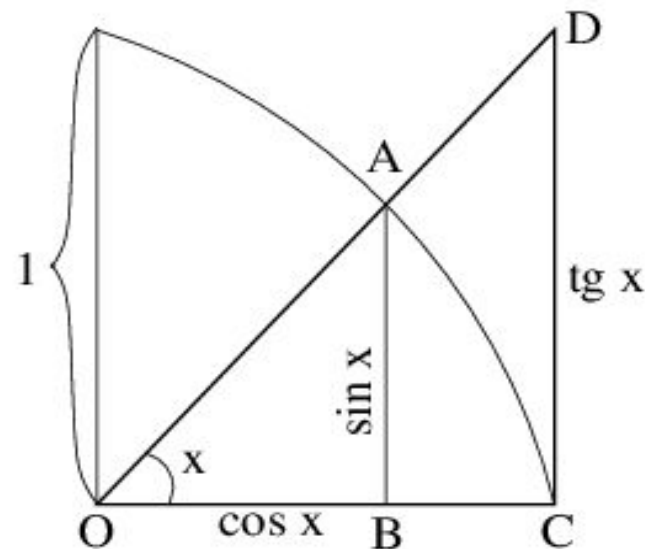


Рис. 87.

то подставив выражения для площадей в неравенство, получим:

$$\frac{\cos x \sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

Разделим все члены неравенств на  $\frac{1}{2} \sin x$  и проведем сокращения:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Эти неравенства справедливы, как при  $x > 0$ , так и при  $x < 0$ . Как показано выше, при  $x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ . Применяв к частному

$\frac{1}{\cos x}$  теорему о пределе дроби, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Поскольку обе крайние функции последнего неравенства при  $x \rightarrow 0$  имеют одинаковый предел, равный единице, по теореме о пределе промежуточной функции (основные теоремы о пределах) функция  $\frac{\sin x}{x}$  имеет тот же предел при  $x \rightarrow 0$ , т. е.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (7.8)$$

Данный предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  принято называть первым замечательным пределом

ПРИМЕР 7.11. *Найти*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ .

**Решение:** Числитель и знаменатель дроби при  $x \rightarrow 0$  одновременно стремятся к нулю. Теорема о пределе дроби здесь неприменима. Для нахождения предела преобразуем данную дробь:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \cdot 1 = 1.$$

ПРИМЕР 7.12. *Найти*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\arcsin 3x}$ .

**Решение:** При подстановке  $x = 0$  имеем дело с неопределённостью вида  $\frac{0}{0}$ . Обозначим  $\arcsin 3x = y$ , тогда  $\sin y = 3x$  и  $x = \frac{\sin y}{3}$ . При  $x \rightarrow 0$  и  $y \rightarrow 0$ . Следовательно:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\arcsin 3x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \frac{\sin y}{3}}{y} = \frac{5}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{5}{3} \cdot 1 = \frac{5}{3}.$$

## 8.1. Сравнение бесконечно малых функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются бесконечно малыми одного порядка малости при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = b \neq 0$  и  $b \neq +\infty$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2. Функция  $\alpha(x)$  называется бесконечно малой более высокого порядка малости, чем функция  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.3. Функция  $\alpha(x)$  называется бесконечно малой более низкого порядка малости, чем функция  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = +\infty$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.4. Функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются несравнимыми бесконечно малыми при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$  не существует и не равен  $+\infty$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.5. Функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$ , бесконечно малые при  $x \rightarrow a$ , называются эквивалентными (равносильными), если предел их отношения  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ .

Тогда для значений  $x$ , близких к  $x = a$ , имеет место приближённое равенство  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \approx 1$ , или  $\alpha(x) \approx \beta(x)$ , точность которого возрастает с приближением  $x$  к  $a$ . Если  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — эквивалентные бесконечно малые при  $x \rightarrow a$ , то пишут  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ .

ТЕОРЕМА 8.1. Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций, т. е. если  $\alpha \sim \alpha_1$ , а  $\beta \sim \beta_1$  при  $x \rightarrow a$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Дано:  $\alpha \sim \alpha_1$ , а  $\beta \sim \beta_1$  при  $x \rightarrow a$ .

Доказательство:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta_1(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = 1 \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \end{aligned}$$



ПРИМЕР 8.4. Найдите  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$ .

Решение: Так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$ , то  $\sin 5x \sim 5x$ ,  $\sin 3x \sim 3x$  при  $x \rightarrow 0$ , и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

ТЕОРЕМА 8.2. Бесконечно малые функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  эквивалентны, если их разность  $[\alpha(x) - \beta(x)]$  есть бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$ .

Дано:  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$  — функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  бесконечно малые при  $x \rightarrow a$  и  $\gamma(x) = \alpha(x) - \beta(x)$ .

Доказать, что  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  т. е.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = 0$ .

Доказательство

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\alpha(x) - \gamma(x))}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left( 1 - \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 1 - 1 = 0.$$

Следовательно,  $\gamma(x)$  есть бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем  $\alpha(x)$ . Аналогично можно доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = 0.$$

**ТЕОРЕМА 8.3.** Сумма конечного числа бесконечно малых функций различных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Дано:  $\lim_{x \rightarrow a} \gamma(x) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$  — функции  $\gamma(x), \alpha(x), \beta(x)$  бесконечно малые при  $x \rightarrow a$ . Пусть для определённости  $\gamma(x)$  — бесконечно малая функция низшего порядка малости по сравнению с остальными слагаемыми, т.е.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 0$ .

Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma(x) + \alpha(x) + \beta(x)}{\gamma(x)} = 1$ , т.е. сумма бесконечно малых функций при  $x \rightarrow a$  эквивалентна в данном случае  $\gamma(x)$ .

Доказательство

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma(x) + \alpha(x) + \beta(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \rightarrow a} 1 + \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

**ПРИМЕР 8.5.** Найдите  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + 6x^2}{\sin 2x}$ .

Решение: Так как при  $x \rightarrow 0$   $5x + 6x^2 \sim 5x$  (по теореме 8.3) и  $\sin 2x \sim 2x$  (по теореме 8.1), то  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + 6x^2}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$ .

При рассмотрении арифметических операций над пределами предполагается, что обе переменные величины имеют предел  $x \rightarrow x_0$ , а в случае предела частного оговаривается, что предел знаменателя не равен нулю.

Существуют случаи, когда эти условия не выполняются. Например, переменные, стоящие в числителе и знаменателе, при  $x \rightarrow x_0$  стремятся одновременно к нулю или бесконечности. В этом случае говорят, что имеет место неопределённость соответствующего типа:  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Если сумма бесконечно больших величин при  $x \rightarrow x_0$  одного знака есть величина бесконечно большая, то о пределе разности таких величин заранее ничего сказать нельзя – неопределённость типа  $+\infty - \infty$ .

При умножении бесконечно малой величины при  $x \rightarrow x_0$  на бесконечно большую при  $x \rightarrow x_0$  возникает неопределённость типа  $0 \cdot \infty$ .

При рассмотрении 2-го замечательного предела мы также видели, что

$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\beta(x)}}$ , где  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  бесконечно малые величины при  $x \rightarrow x_0$ , может быть различным, все зависит от стремления  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  к нулю при  $x \rightarrow x_0$ . Это неопределённость типа  $1^{+\infty}$ .

Раскрыть неопределённость – это значит определить поведение выражения, приводящего к данной неопределённости, и найти его предел.

ПРИМЕР 8.6. *Найти*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{2x + 7}$ .

**Решение:** В данном примере числитель и знаменатель – бесконечно большие величины, т.е. имеет место неопределённость типа  $\frac{\infty}{\infty}$ . Чтобы раскрыть эту неопределённость, разделим числитель и знаменатель на  $x$ . Получим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{2x + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + 5/x}{2 + 7/x} = \frac{3}{2},$$

так как при  $x \rightarrow +\infty$  каждая из дробей  $\frac{5}{x}$  и  $\frac{7}{x}$  стремится к нулю.

Аналогично понятию эквивалентности бесконечно малых функций можно ввести понятие эквивалентности бесконечно большой функции.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.6.** *Функции  $N(x)$  и  $M(x)$  бесконечно большие при  $x \rightarrow a$  называются эквивалентными, если предел их отношения*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{N(x)}{M(x)} = 1.$$

Очевидно, что многочлен  $P_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$  эквивалентен при  $x \rightarrow +\infty$  члену с наивысшим показателем степени  $b_n x^n$ , так как

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{b_n x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0}{b_n x^n} = 1$$

Следовательно, для отношения многочленов при  $x \rightarrow +\infty$  будет иметь место правило

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n} = \frac{a_m}{b_n} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{m-n} \quad (8.1)$$

- если степень числителя меньше степени знаменателя ( $m < n$ ), то предел равен нулю;
- если степень числителя больше степени знаменателя ( $m > n$ ), то предел равен  $+\infty$  или  $-\infty$ ;
- если степени числителя и знаменателя равны ( $m = n$ ), то предел равен конечному числу  $\frac{a_m}{b_m}$ .

ПРИМЕР 8.7. Найдите  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 + 3x - 5}{4x^3 - 2x^2 + 3}$ .

Решение: Согласно правилу (8.1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 + 3x - 5}{4x^3 - 2x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3}{4x^3} = 2.$$

ПРИМЕР 8.8. *Найти*  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^5 - 2x^2 + 3}{2x^4 + 3x - 5}$ .

Решение: Согласно правилу (8.1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^5 - 2x^2 + 3}{2x^4 + 3x - 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^5}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{2} = -\infty.$$

Правило, подобное (8.1), справедливо и для иррациональных выражений.

ПРИМЕР 8.9. *Найти*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt[3]{x^2 + 5x - 4} + \sqrt{x}}{\sqrt[6]{2x^4 - 3x + 2} + 2\sqrt[3]{x}}$ .

Решение: Так как при  $x \rightarrow +\infty$   $3\sqrt[3]{x^2 + 5x - 4} \sim 3\sqrt[3]{x^2} = 3x^{2/3}$ ,  $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ,  $\sqrt[6]{2x^4 - 3x + 2} \sim \sqrt[6]{2x^4} = \sqrt[6]{2}x^{2/3}$ ,  $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ . Наивысшая степень  $x$  в числителе имеет слагаемое  $3\sqrt[3]{x^2 + 5x - 4} \sim 3x^{2/3}$ , знаменателе  $\sqrt[6]{2x^4 - 3x + 2} \sim \sqrt[6]{2}x^{2/3}$ , следовательно

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt[3]{x^2 + 5x - 4} + \sqrt{x}}{\sqrt[6]{2x^4 - 3x + 2} + 2\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^{2/3}}{\sqrt[6]{2}x^{2/3}} = \frac{3}{\sqrt[6]{2}}.$$

При вычислении пределов, содержащих иррациональные выражения, также часто используют следующие приемы:

- введение новой переменной для получения рационального выражения, если это возможно;
- перевод иррациональности из знаменателя в числитель и наоборот, при этом используются формулы тождественных преобразований алгебраических выражений:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}) &= (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = x - y \quad (x \geq 0, y \geq 0), \\
 (\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}) \cdot (\sqrt[3]{x^2} \mp \sqrt[3]{x \cdot y} + \sqrt[3]{y^2}) &= (\sqrt[3]{x})^3 \pm (\sqrt[3]{y})^3 = \\
 &= x \pm y \quad (x \geq 0, y \geq 0).
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 8.10. *Найти*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x)$ .

**Решение:** Здесь неопределенность типа  $+\infty - \infty$ . Умножим и разделим выражение под пределом на сопряжённое ему выражение  $\sqrt{x^2 - 1} + x$ .

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0.
 \end{aligned}$$

ПРИМЕР 8.11. *Найти*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$ .

**Решение:** Опять мы имеем дело с неопределённостью типа  $+\infty - \infty$ . Устранить эту неопределённость можно, если умножить и разделить исходное выражение на неполный квадрат суммы двух выражений. После этого можно применить формулу разности кубов двух выражений.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3 - (\sqrt[3]{x})^3}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)x} + \sqrt[3]{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3 - (\sqrt[3]{x})^3}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)x} + \sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2+x} + \sqrt[3]{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2+x} + \sqrt[3]{x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Если мы применим к примерам 8.10 и 8.11 правило эквивалентности бесконечно больших функций, то получим тот же результат.



Однако стоит несколько изменить условия примеров и результат окажется другим.

ПРИМЕР 8.12. *Найти*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 1} - x)$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 1} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x - 1} - x)(\sqrt{x^2 + 3x - 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 3x - 1} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1 - x^2}{(\sqrt{x^2 + 3x - 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{(\sqrt{x^2 + 3x - 1} + x)} = \\ &= \left| \text{Знаменатель } \sqrt{x^2 + 3x - 1} + x \sim 2x \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{2x} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому применять принцип эквивалентности в случае разности бесконечно больших функций  $N(x) - M(x)$  можно, если коэффициенты при степенях наивысшего порядка  $x$  в  $N(x)$  и  $M(x)$  не равны, поскольку в противном случае главную роль могут играть слагаемые низшего порядка.

Чтобы определить предел дробно-рациональной функции в случае, когда при  $x \rightarrow x_0$  числитель и знаменатель имеют пределы, равные нулю (неопределенность  $\frac{0}{0}$ ), надо числитель и знаменатель дроби разделить на  $(x - x_0)$  и перейти к вычислению предела. Если же и после этого числитель и знаменатель новой дроби имеют пределы, равные нулю при  $x \rightarrow x_0$ , то надо произвести повторное деление на  $(x - x_0)$  и т.д., до тех пор, пока не будет получен окончательный результат. В некоторых случаях эту неопределенность можно легко раскрыть, разложив предварительно числитель и знаменатель на сомножители и сократив на  $(x - x_0)$ .

ПРИМЕР 8.13. *Найти*  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$ .

**Решение:** При подстановке предельного значения аргумента  $x = 3$  числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю. Имеет место неопределенность  $\frac{0}{0}$ . Разложим выражение в числителе и знаменателе и произведем сокращение на  $(x - 3)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{x} = 2.$$

При решении ряда примеров целесообразно использовать понятие эквивалентности бесконечно малых функций.

ПРИМЕР 8.14. *Найдите*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 3 \sin 2x + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{arctg} 3x + 5x^2}$

**Решение:** Так как при  $x \rightarrow 0$   $\sin 2x \sim 2x$ ,  $\operatorname{tg} x \sim x$ ,  $\operatorname{arctg} 3x \sim 3x$ . Имеем, что низший порядок малости по  $x$  числителя имеет слагаемое  $3 \sin 2x$ , знаменателя –  $\operatorname{arctg} 3x$ . Следовательно, согласно теореме 8.3, числитель  $5x^2 + 3 \sin 2x + \operatorname{tg}^2 x \sim 3 \sin 2x \sim 6x$ , знаменатель  $\operatorname{arctg} 3x + 5x^2 \sim \operatorname{arctg} 3x \sim 3x$ . И на основании теоремы 8.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 3 \sin 2x + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{arctg} 3x + 5x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{3x} = 2.$$

При нахождении пределов вида  $\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x)]^{\psi(x)} = C$  (8.2)

следует иметь в виду, что:

- если существуют конечные пределы  $A = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$  и  $B = \lim_{x \rightarrow a} \psi(x)$ , то  $C = A^B$ ;
- если  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A \neq 1$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \pm + \infty$ , то вопрос о нахождении предела решается непосредственно подстановкой предельного значения аргумента;
- если  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A = 1$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = +\infty$ , то полагают  $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$  и, следовательно,

$$C = \lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x)]^{\psi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ [1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right\}^{\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x)-1]\psi(x)},$$

так как в данном случае при

$$x \rightarrow a \lim_{x \rightarrow a} [1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e.$$

ПРИМЕР 8.15. *Найти*  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 4x}{2x} \right)^{1+x}$ .

Решение: Здесь  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x} = 2$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$ . Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 4x}{2x} \right)^{1+x} = 2^1 = 2.$$

ПРИМЕР 8.16. *Найти*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{4x^2 - 3} \right)^{x+3}$ .

Решение: Здесь  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{4x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{4 - \frac{3}{x^2}} \right) = \frac{1}{4}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3) = +\infty$ ,

поэтому  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 1}{4x^2 - 3} \right)^{x+3} = \left( \frac{1}{4} \right)^{+\infty} = \frac{1}{4^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$ .

ПРИМЕР 8.17. *Найти*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+8}{x-2} \right)^x$ .

Решение: Здесь  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{8}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ ,

т.е. имеет место неопределенность  $1^{+\infty}$ . Произведя указанные выше преобразования ( $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$ ), получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+8}{x-2} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \left( \frac{x+8}{x-2} - 1 \right) \right]^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \left( \frac{10}{x-2} \right) \right]^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \left[ 1 + \frac{10}{x-2} \right]^{\frac{x-2}{10}} \right\}^{\frac{10}{x-2} \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x}{x-2}} = e^{10}. \end{aligned}$$

В данном случае, не прибегая к общему приему, можно найти предел проще:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+8}{x-2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( 1 + \frac{8}{x} \right)^x}{\left( 1 - \frac{2}{x} \right)^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{8}{x} \right)^{\frac{x}{8}} \right]^8}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \left\{ \frac{-2}{x} \right\} \right)^{-\frac{x}{2}} \right]^2} = e^{10}.$$

В дальнейшем полезно помнить, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$ , или в более общем виде

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x^m}\right)^{bx^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left(1 + \frac{a}{x^m}\right)^{\frac{x^m}{a}} \right)^{\frac{a}{x^m} bx^n} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} abx^{n-m}} =$$

(8.3)

$$= \begin{cases} +\infty, & n > m; ab > 0 \\ 0, & n > m, ab < 0 \\ e^{ab}, & n = m; \\ 1, & n < m. \end{cases}$$

Спасибо за внимание