

# Семинар 12

доцент Волков Н.П.

## Занятие 12

### Определители

$$\underline{123} \quad \Pi_1: 2, 3, 5, 4, 1$$

Найти  $t(2, 3, 5, 4, 1)$

$$2, 3, 5, 4, 1$$

$$1-4, \quad 2-0, \quad 3-0, \quad 4-1, \quad 5-0$$

$$t(2, 3, 5, 4, 1) = \boxed{5}$$

Перестановки четная.

$$\underline{125} \quad \Pi_2: 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8$$

$$t(1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8) = ?$$

$$1-0, \quad 2-3; \quad 3-2; \quad 4-3; \quad 5-2; \quad 6-1; \\ 7-1, \quad 8-1; \quad 9-0.$$

$$t(\Pi_2) = \boxed{13}$$

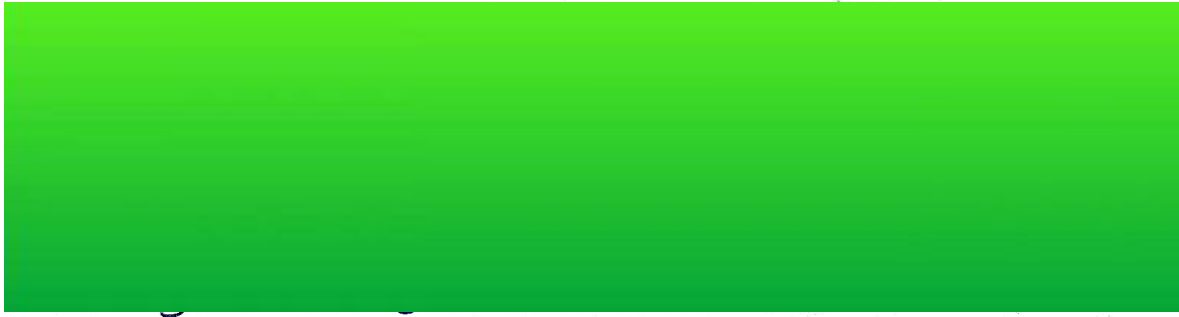
$$\underline{127} \quad \Pi_3: 1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, 2, 4, 6, 8, \dots, 2n$$

$$t(\Pi_3) = ?$$

$$1-0, \quad 2-(n-1), \quad 3-0, \quad 4-(n-2), \quad 5-0, \quad 6-(n-3), \\ 7-0, \quad 8-(n-4), \quad 9-0, \quad \dots, \quad 2n-2-1; \quad 2n-0$$

$$t(\Pi_3) = \frac{(n-1)+1}{2} \cdot (n-1) = \boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\underline{189} \quad a_{61} a_{23} a_{45} a_{36} a_{12} a_{54} =$$



$$\underline{190} \quad a_{27} a_{36} a_{51} a_{74} a_{25} a_{43} a_{62}$$

Не входят

208 Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0$$

1-ый способ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x(1-x)\dots(n-1-x) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots, x_n = n-1}$$

## 2-ой способ.

Заданное уравнение —  $n$ -ого порядка  
Следовательно, если у этого уравнения  
есть корни, то их  $\leq n$  штук.

Воспользуемся свойством определителя:  
Если в матрице есть две одинаковые



при  $x_2 = 1$  первая строка = третьей

И так далее:  $x_3 = 2, \dots, x_n = n-1$ .

$$\underline{212)} \quad A = (\underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}, \dots, \underset{\downarrow}{a_n}) \rightarrow \tilde{A} = (\underset{\downarrow}{a_2}, \dots, \underset{\downarrow}{a_n}, \underset{\downarrow}{a_1})$$

$\det \tilde{A} = ?$

Решение Чтобы поставить  $a_1$  на послед-  
нее место, нужно сделать  $(n-1)$  транс-  
позицию соседние столбцов

$$\Rightarrow \boxed{\det \tilde{A} = (-1)^{n-1} \det A}$$

$$\begin{aligned} \underline{239} \quad \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} d \begin{vmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 4 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= -d \cdot (-1)^{2+2} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} 0 & a \\ c & 5 \end{vmatrix} = -d \cdot b \cdot (0 - a \cdot c) = \boxed{abcd} \end{aligned}$$

$$\underline{257} \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 - \vec{a}_1 \\ \vec{a}_4 - \vec{a}_1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \boxed{-8}$$

$$\begin{aligned} \underline{261} \quad \det A &= \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ 0 & -7 & -9 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \vec{a}_1 \leftrightarrow \vec{a}_2 \\ 2\vec{a}_3 \leftrightarrow \vec{a}_4 \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -3\vec{a}_2 \leftrightarrow \vec{a}_1 \\ -5\vec{a}_2 \leftrightarrow \vec{a}_3 \\ -7\vec{a}_2 \leftrightarrow \vec{a}_4 \end{array} = (-1)^{2+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -10 \end{vmatrix} = \\ &= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot (-2) \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5+14) = \boxed{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{264} \quad \det A &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{-\vec{a}_4 \rightarrow \vec{a}_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 8 & 4 \\ 0 & -13 & -7 & 7 \\ 0 & -8 & -5 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 4\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_2 \\ -4\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_3 \\ -2\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_4 \end{array} \\
 &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 8 & 4 \\ -13 & -7 & 7 \\ -8 & -5 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\vec{a}_2 \rightarrow \vec{a}_1} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 11 \\ -13 & -7 & 7 \\ -8 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 11 \\ -27 & 0 & 84 \\ -18 & 0 & 57 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 7\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_2 \\ 5\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_3 \end{array}} = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -27 & 84 \\ -18 & 57 \end{vmatrix} = \\
 &= -(-1539 + 1512) = \boxed{27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{267} \quad \det A &= \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{-\vec{a}_3 \rightarrow \vec{a}_1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \\
 &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} -3\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_2 \\ -5\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_3 \\ -5\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_4 \end{array}} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \\
 &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 13 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 13 & -1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-13 + 8) = \boxed{-10}
 \end{aligned}$$

270

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -2\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_2 \\ -3\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_3 \\ -2\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_4 \\ -\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_5 \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ -11 & 1 & -1 & -8 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -23 & -41 \\ 0 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_2 \\ -11\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_3 \\ 2\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_4 \end{array} =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -10 & -23 & -41 \\ 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -11 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 10\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_2 \\ -4\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_3 \end{array} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(3 - 55) = \boxed{52}$$

$$\begin{aligned}
 \text{275} \quad \det A &= \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-1) \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ -4 & 5 & 3 & 2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & -7 & -1 & -6 \\ 0 & -13 & -3 & -9 \end{vmatrix} \begin{matrix} -5\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_2 \\ -4\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_3 \\ -7\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_4 \end{matrix} = \frac{1}{6} (-1)^4 \cdot 3 \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 13 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -7 & -5 & 0 \\ -8 & -6 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_2 \\ -3\vec{a}_1 \rightarrow \vec{a}_3 \end{matrix} = \frac{1}{2} (-1)^2 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (42 - 40) = \boxed{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{279} \quad \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = \\
 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \boxed{n!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{289} \quad \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-n+1 \end{vmatrix} = \\
 &= \boxed{(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}
 \end{aligned}$$



Определитель Вандермонда:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} = \\ & = 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} = \\ & = (b-a)(c-a)(d-a) \cdot \begin{vmatrix} a+b & a+c & a+d \\ a^2+ab+b^2 & a^2+ac+c^2 & a^2+ad+d^2 \end{vmatrix} = \\ & = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-b^2+a(c-b) & d^2-b^2+a(d-b) \end{vmatrix} = \\ & = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b+c & a+b+d \end{vmatrix} = \\ & = \boxed{(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)} \end{aligned}$$

---

Дома: 124, 126, 188, 191, 192, 198, 207, 213,  
238, 258, 260, 262, 265, 268, 272, 277,  
280, 290.