Семинар 12

доцент Волков Н.П.

Занятие 12
Определители

123 Π_1: 2, 3, 5, 4, 1

Найти $t(2,3,5,4,1)$

$\cancel{2}, \cancel{3}, 5, \cancel{4}, \cancel{1}$

1 − 4, 2 − 0, 3 − 0, 4 − 1, 5 − 0

$t(2,3,5,4,1) = \boxed{5}$

Перестановка нечетная.

125 Π_2: 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8

$t(1,9,6,3,2,5,4,7,8) = ?$

1 − 0, 2 − 3; 3 − 2; 4 − 3; 5 − 2; 6 − 1;
7 − 1, 8 − 1; 9 − 0.

$t(\Pi_2) = \boxed{13}$

127 Π_3: $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, 2, 4, 6, 8, \dots, 2n$

$t(\Pi_3) = ?$

$1-0,\ 2-(n-1),\ 3-0,\ 4-(n-2),\ 5-0,\ 6-(n-3),$
$7-0,\ 8-(n-4),\ 9-0,\ \dots,\ 2n-2-1;\ 2n-0$

$$t(\Pi_3) = \frac{(n-1)+1}{2}\cdot(n-1) = \boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$$

189 $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54} =$

190 $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$

$\boxed{\text{Не входит}}$

208 Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0$$

1-ый способ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x(1-x)\cdots(n-1-x)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ \dots,\ x_n=n-1.}$$

2-ой способ.

Заданное уравнение — n-ого порядка. Следовательно, если у этого уравнения есть корни, то их $\leq n$ штук.

Воспользуемся свойством определителя: Если в матрице есть две одинаковые [illegible]

При $x_2 = 1$ первая строка = третьей

И так далее: $x_3 = 2, \dots, x_n = n-1$.

212) $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \to \tilde{A} = (a_2, \dots, a_n, a_1)$

$\det \tilde{A} = ?$

<u>Решение</u> Чтобы поставить a_1 на последнее место, нужно сделать $(n-1)$ транспозицию соседних столбцов

$$\Rightarrow \boxed{\det \tilde{A} = (-1)^{n-1} \det A}$$

239

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} d \begin{vmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -d \cdot (-1)^{2+2} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} 0 & a \\ c & 5 \end{vmatrix} = -d \cdot b \cdot (0 - a \cdot c) = \boxed{abcd}$$

257

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left] \begin{matrix} \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 - \vec{a}_1 \\ \vec{a}_4 - \vec{a}_1 \end{matrix} \right[= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \boxed{-8}$$

261

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ 0 & -7 & -9 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_1 + \to \vec{a}_2 \\ \\ 2\vec{a}_3 + \to \vec{a}_4 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3\vec{a}_2 + \to \vec{a}_1 \\ -5\vec{a}_2 + \to \vec{a}_3 \\ -7\vec{a}_2 + \to \vec{a}_4 \end{matrix} = (-1)^{2+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{2+2} (-2) \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5+14) = \boxed{18}$$

264

$$\det A = \left|\begin{matrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -\vec{a}_4 \mapsto \vec{a}_1 \end{matrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 8 & 4 \\ 0 & -13 & -7 & 7 \\ 0 & -8 & -5 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \\ 4\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_2 \\ -4\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_3 \\ -2\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_4 \end{matrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \left|\begin{matrix} 11 & 8 & 4 \\ -13 & -7 & 7 \\ -8 & -5 & 2 \end{matrix}\right| \vec{a}_2 \mapsto \vec{a}_1 = \left|\begin{matrix} -2 & 1 & 11 \\ -13 & -7 & 7 \\ -8 & -5 & 2 \end{matrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{matrix} -2 & 1 & 11 \\ -27 & 0 & 84 \\ -18 & 0 & 57 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \\ 7\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_2 \\ 5\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_3 \end{matrix} = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \left|\begin{matrix} -27 & 84 \\ -18 & 57 \end{matrix}\right| =$$

$$= -(-1539 + 1512) = \boxed{27}$$

267

$$\det A = \left|\begin{matrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -\vec{a}_3 \mapsto \vec{a}_1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= 2 \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \\ -3\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_2 \\ -5\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_3 \\ -5\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_4 \end{matrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \left|\begin{matrix} 2 & 7 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{matrix}\right| =$$

$$= 2 \cdot \left|\begin{matrix} 0 & 13 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \end{matrix}\right| = 2(-1)^{2+1}(-1) \left|\begin{matrix} 13 & -1 \\ 8 & -1 \end{matrix}\right| = 2 \cdot (-13 + 8) = \boxed{-10}$$

270)

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -2\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_2 \\ -3\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_3 \\ -2\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_4 \\ -\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_5 \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ -11 & 1 & -1 & -8 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -23 & -41 \\ 0 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_2 \\ -11\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_3 \\ 2\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_4 \end{array} =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -10 & -23 & -41 \\ 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -11 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 10\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_2 \\ -4\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_3 \end{array} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(3-55) = \boxed{52}$$

275

$$\det A = \begin{vmatrix} 3/2 & -9/2 & -3/2 & -3 \\ 5/3 & -8/3 & -2/3 & -7/3 \\ 4/3 & -5/3 & -1 & -2/3 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-1)\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ -4 & 5 & 3 & 2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & -7 & -1 & -6 \\ 0 & -13 & -3 & -9 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ -5\vec{a}_1 + \to \vec{a}_2 \\ -4\vec{a}_1 + \to \vec{a}_3 \\ -7\vec{a}_1 + \to \vec{a}_4 \end{array} = \frac{1}{6}(-1)^4\cdot 3\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 13 & 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -7 & -5 & 0 \\ -8 & -6 & 0 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ -2\vec{a}_1 + \to \vec{a}_2 \\ -3\vec{a}_1 + \to \vec{a}_3 \end{array} = \frac{1}{2}(-1)^2\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(42-40) = \boxed{1}$$

279

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 2\cdot 3\cdots n = \boxed{n!}$$

289

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-n+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \boxed{(x-1)(x-2)\cdots(x+1-n)}$$

Определитель Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & a+c & a+d \\ a^2+ab+b^2 & a^2+ac+c^2 & a^2+ad+d^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-b^2+a(c-b) & d^2-b^2+a(d-b) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b+c & a+b+d \end{vmatrix} =$$

$$= \boxed{(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)}$$

Дома: 124, 126, 188, 191, 192, 198, 207, 213, 238, 258, 260, 262, 265, 268, 272, 277, 280, 290.