11.12.20.

Тема:
Основные тригонометрические тождества.
Преобразование тригонометрических выражений.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://youtu.be/TI38g42WKc8

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

В этом параграфе установим тождества, связывающие значения тригонометрических функций одного и того же аргумента.

Координаты любой точки $P(x; y)$ единичной окружности удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Поскольку $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, где α — угол поворота, в результате которого из точки $P_0(1; 0)$ была получена точка P, то

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \qquad (1)$$

Обратим внимание на то, что точка P на единичной окружности выбрана произвольно. Поэтому равенство (1) справедливо для любого α. Его называют **основным тригонометрическим тождеством.**

Используя основное тригонометрическое тождество, найдём зависимость между тангенсом и косинусом, а также между котангенсом и синусом.

Пусть $\cos\alpha \neq 0$. Разделим обе части равенства (1) на $\cos^2\alpha$. Получим:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$ Отсюда

$$\boxed{1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

Это тождество верно для всех α, при которых $\cos\alpha \neq 0$, то есть при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пусть $\sin\alpha \neq 0$. Разделим обе части равенства (1) на $\sin^2\alpha$. Получим:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$ Отсюда

$$\boxed{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

Это тождество верно для всех α, при которых $\sin\alpha \neq 0$, то есть при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Связь между тангенсом и котангенсом можно установить с помощью равенств $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Отсюда

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1}$$

Это тождество верно для всех α, при которых $\sin\alpha \neq 0$ и $\cos\alpha \neq 0$, то есть при $\alpha \neq \pi k$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Заметим, что эти два ограничения для α можно объединить в одно: $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 1. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Имеем: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$.

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, следовательно, $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{576}{625}} = -\frac{24}{25}$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{24}{7}$. ■

Практическая часть.

Ответить на вопросы

1. Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?
2. Какое тождество связывает тангенс и косинус одного и того же аргумента? Для каких значений аргумента верно это тождество?
3. Какое тождество связывает котангенс и синус одного и того же аргумента? Для каких значений аргумента верно это тождество?
4. Какое тождество связывает тангенс и котангенс одного и того же аргумента? Для каких значений аргумента верно это тождество?

458 Вычислить:

1) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

459 По значению одной из тригонометрических функций ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$) найти значения остальных трёх:

1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
2) $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha = -3$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
5) $\cos\alpha = 0{,}8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
6) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
7) $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}4$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
8) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.