Основные тригонометрические тождества

Решение задач

Основное тригонометрическое тождество

- 1) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
- следствия:
- $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha;$
- $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$
- $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$
- $\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$
- Знак перед корнем зависит от того, в какой четверти находится заданный угол α.

- 2) $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- 3) $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- 4) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$
- 5) $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha};$ $\cos\alpha \neq 0$
- 6) $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha};$ $\sin\alpha \neq 0$

$5)1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha};$

$\cos\alpha \neq 0$

- следствия:
- $tg\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{cos^2\alpha} - 1}$
- $\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}$
- Знак перед корнем зависит от того, в какой четверти находится заданный угол α

$6)1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha};$

$\sin\alpha \neq 0$

- следствия:
- $ctg\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{sin^2\alpha} - 1}$
- $\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+ctg^2\alpha}}$

Примеры

» 1) Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

› Дано:

› $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

› $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Найти:

$\sin\alpha$-?

Решение:

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то есть в III ч.,

$\sin\alpha < 0$

$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} =$

$$= -\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} =$$

$$= -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

Ответ: $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$

- 2) Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.
- Дано:

Решение:

- $\sin\alpha = \frac{1}{3}$

$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

$\cos\alpha$ - ?

1. Определим знак косинуса:

$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ – IVч., $\cos\alpha > 0$

2. $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} =$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ответ: $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

- 3) Вычислить $tg\alpha$, если $\sin\alpha = 0,8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

- Дано:
- $\sin\alpha = 0,8$
- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
- $tg\alpha$ -?

Решение:

1) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ – II четверть,

$\cos\alpha < 0$

$\cos\alpha = -\sqrt{1 - 0,8^2} =$

$= -\sqrt{0,36} = -0,6;$

2) $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,8}{-0,6} = -\frac{4}{3};$

- Ответ: $tg\alpha = -\frac{4}{3}$

- 4) Вычислить $\cos\alpha$, если $tg\alpha$ = 3 и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
- Дано:

Решение:

- $tg\alpha$ = 3

$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}$

- $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ – III четверть, $\cos\alpha < 0$

- $\cos\alpha$ - ?

$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}} =$

- $= -\sqrt{\frac{1}{1+3^2}} = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\sqrt{0{,}1}$
- Ответ: $\cos\alpha = -\sqrt{0{,}1}$

» 5) Вычислить все тригонометрические функции, если $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

› Дано:
Решение:

› $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$

1) $\pi < \alpha < \frac{\pi}{2}$ – II четверть, $\sin\alpha > 0$

$\pi < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} =$

› $\sin\alpha$ - ? tg α - ?

$= \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

› ctg α -?

2) $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{13} : \left(-\frac{5}{13}\right) =$

›

$= -\frac{12 \cdot 13}{13 \cdot 5} = -\frac{12}{5}$

Практическое задание

459 По значению одной из тригонометрических функций ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$) найти значения остальных трёх:

1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
2) $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha = -3$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
5) $\cos\alpha = 0{,}8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
6) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
7) $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}4$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
8) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Преобразование тригонометрических выражений (объяснялка)

Тригонометрические функции связаны между собой следующими основными тождествами:

I. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. II. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

III. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. IV. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

V. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. VI. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Примеры применения тождеств

384. $\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}+\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x.$

Решение. Применив формулы $1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$, $1-\sin^2\alpha=$ $=\cos^2\alpha$ и тождества IV и VI, находим

$$\frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}+\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1=\operatorname{tg}^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

385. $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2.$

Решение. Воспользуемся формулами квадрата суммы и разности двух чисел:

$$(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2=\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha+$$
$$+2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=4\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=4$$

(после приведения подобных членов применили тождество IV).

Упрощение выражений

383—394. Упростить выражения:

383. $\sin^2 x + \cos^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

Решение. Используя тождества I и VI, получим

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) + \operatorname{ctg}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

384. $\dfrac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

Решение. Применив формулы $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$, $1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$ и тождества IV и VI, находим

$$\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Выполнить задание

466 Упростить выражение:

1) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha - 2\sin\alpha$;

2) $\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$;

4) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$.

Упростить выражение и найти его значение

467 Упростить выражение и найти его значение:

1) $\dfrac{\sin^2\alpha - 1}{1 - \cos^2\alpha}$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$;

3) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$;

4) $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\,\operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.