

Основные тригонометрические тождества

Решение задач

Основное тригонометрическое тождество

› 1) $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

› следствия:

› $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha;$

› $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

› $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

› $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

› Знак перед корнем зависит от того, в какой четверти находится заданный угол α .

$$\succ 2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\succ 3) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\succ 4) \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\succ 5) 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad \cos \alpha \neq 0$$

$$\succ 6) 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \quad \sin \alpha \neq 0$$

$$5) 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$\cos \alpha \neq 0$$

› следствия:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

› Знак перед корнем зависит от того, в какой четверти находится заданный угол α

$$6) 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha};$$

$$\sin \alpha \neq 0$$

› следствия:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$$

Примеры

π

» 1) Вычислить $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

› Дано:

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

Найти:

$\sin \alpha$ -?

Решение:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то есть в III ч.,

$$\sin \alpha < 0$$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} =$$

$$= -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} =$$

$$= -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

Ответ: $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$

› 2) Вычислить $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

› Дано:

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$$

$\cos \alpha - ?$

Решение:

1. Определим знак косинуса:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 - \text{IV ч.}, \cos \alpha > 0$$

$$2. \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} =$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Ответ: } \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

› 3) Вычислить $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = 0,8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

› Дано:

› $\sin \alpha = 0,8$

› $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

› $\operatorname{tg} \alpha$ -?

›

›

› Ответ: $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$

Решение:

1) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ – II четверть,

$$\cos \alpha < 0$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - 0,8^2} =$$

$$= -\sqrt{0,36} = -0,6;$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,8}{-0,6} = -\frac{4}{3};$$

› 4) Вычислить $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

› Дано:

Решение:

› $\operatorname{tg} \alpha = 3$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

› $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ – III четверть, $\cos \alpha < 0$

› $\cos \alpha - ?$

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} =$$

$$\text{› } = -\sqrt{\frac{1}{1+3^2}} = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\sqrt{0,1}$$

› Ответ: $\cos \alpha = -\sqrt{0,1}$

» 5) Вычислить все тригонометрические функции, если $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

› Дано:

Решение:

› $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$
четверть, $\sin \alpha > 0$

$$\alpha < \frac{\pi}{2}$$

› $\sin \alpha$ - ? $\operatorname{tg} \alpha$ - ?

$$\frac{12}{13}$$

› $\operatorname{ctg} \alpha$ -?

$$\left(-\frac{5}{13}\right) =$$

›

$$-\frac{12 \cdot 13}{13 \cdot 5} = -\frac{12}{5}$$

$$1) \pi < \alpha < \frac{\pi}{2} - \parallel$$

$\pi <$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} =$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{12}{13} :$$

=

Практическое задание

459 По значению одной из тригонометрических функций ($\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$) найти значения остальных трёх:

1) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; 2) $\sin \alpha = 0,8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 4) $\operatorname{ctg} \alpha = -3$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

5) $\cos \alpha = 0,8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 6) $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

7) $\operatorname{tg} \alpha = -2,4$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 8) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{7}{24}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Преобразование тригонометрических выражений (объяснялка)

Тригонометрические функции связаны между собой следующими основными тождествами:

$$\left| \begin{array}{ll} \text{I. } \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. & \text{II. } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \\ \text{III. } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. & \text{IV. } \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1. \\ \text{V. } 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. & \text{VI. } 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \end{array} \right|$$

Примеры применения тождеств

$$384. \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x.$$

Решение. Применив формулы $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$, $1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$ и тождества IV и VI, находим

$$\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$385. (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2.$$

Решение. Воспользуемся формулами квадрата суммы и разности двух чисел:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 &= \operatorname{tg}^2 \alpha + 2\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha + \\ &+ 2\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 4\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 4 \end{aligned}$$

(после приведения подобных членов применили тождество IV).

Упрощение выражений

383—394. Упростить выражения:

383. $\sin^2 x + \cos^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

Решение. Используя тождества I и VI, получим

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) + \operatorname{ctg}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

384. $\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

Решение. Применяя формулы $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$, $1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$ и тождества IV и VI, находим

$$\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Выполнить задание

466 Упростить выражение:

1) $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 2 \sin \alpha$;

2) $\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$;

3) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$;

4) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha}$.

Упростить выражение и найти его значение

467

Упростить выражение и найти его значение:

1) $\frac{\sin^2 \alpha - 1}{1 - \cos^2 \alpha}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

3) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

4) $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$.