Математика
2 семестр

Лекция 14
Системы линейных дифференциальных уравнений

Мини-КР

1. Решить ОЛДУ

$$y''+4y'+8y=0$$

$$y''+2y'=0$$

$$y''+4y'+4y=0$$

$$y''+4y'-5y=0$$

$$y''+6y'+9y=0$$

$$y''+4y=0$$

2. Найти вид частного решения НЛДУ

$$y''+4y'+8y=x\sin x$$

$$y''+2y'=e^{-2x}$$

$$y''+4y'+4y=1+e^{2x}$$

$$y''+4y'-5y=\left(x^2+2\right)e^{-x}$$

$$y''+6y'+9y=xe^{-3x}$$

$$y''+4y=\sin 2x$$

Введение

- Существуют методы решения систем дифференциальных уравнений, сходные с теорией решения ЛДУ.

Основные понятия теории СЛДУ

Определение. Нормальная система ДУ называется линейной, если в каждом ее уравнении функции

$x_i'(t) = f_i\left(t, x_1(t), \dots, x_n(t)\right); i = \overline{1,n}$ линейны относительно неизвестных функций, т. е. если она имеет вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i(t), \quad i = \overline{1,n}.$$

Запишем систему в векторной форме: $\overline{x} = A(t)\overline{x} + B(t)$,

где $\overline{x} = \left(x_1(t), \dots, x_n(t)\right)^T$.

При $B(t) \equiv 0$ получим систему ОЛДУ вида $\overline{x} = A(t)\overline{x}$

$t \in (a, b)$

Свойства решений СОЛДУ

Обозначим через Y множество всех решений СОЛДУ, Y – линейное пространство.

Теорема. Любые n линейно независимых решений СОЛДУ $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$ образуют базис пространства Y.

Определение. Базис пространства всех решений СОЛДУ $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$ называется *фундаментальной системой решений* (ФСР) СОЛДУ.

Матрица, столбцы которой являются ФСР, называется *фундаментальной матрицей* СОЛДУ $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$.

Теорема о структуре общего решения СОЛДУ

Если $\left\{\overline{x}_k(t)\right\}_{k=1}^{n}$ – фундаментальная система решений СОЛДУ $\dot{\overline{x}} = A(t)\overline{x}$ на (a, b), то ее общее решение имеет вид $\overline{x}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \overline{x}_k(t)$, где $c_k \in \mathbb{R}$

Теорема о структуре общего решения СНЛДУ

Если 1) $\left\{\overline{x}_k(t)\right\}_{k=1}^{n}$ - ФСР СОЛДУ $\dot{\overline{x}} = A(t)\overline{x}$;

2) $\overline{\varphi}(t)$ – некоторое решение СНЛДУ $\dot{\overline{x}} = A(t)\overline{x} + B(t)$,

то общее решение СНЛДУ находится по формулам:

$$\overline{x}_{\text{общ. СНЛДУ}}(t) = \overline{x}_{\text{общ. СОЛДУ}}(t) + \overline{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{x}_k(t) + \overline{\varphi}(t)$$

или $\overline{x}_{\text{общ. СНЛДУ}}(t) = \Phi(t)\overline{c} + \overline{\varphi}(t),\ t \in (a, b).$

Для поиска частного решения $\overline{\varphi}(t)$ можно воспользоваться методом вариации произвольной постоянной (из СОЛДУ): $\overline{\varphi}(t) = \Phi(t)\overline{c}(t).$

СНЛДУ $\overline{\boldsymbol{x}}' = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})$, имеет решение $\overline{\varphi}(t) = \Phi(t)\overline{c}(t)$.

Тогда $\overline{\varphi}'(t) = \Phi'(t)\overline{c}(t) + \Phi(t)\overline{c}'(t)$, т.е.

$$\Phi'(t)\overline{c}(t) + \Phi(t)\overline{c}'(t) = A\Phi(t)\overline{c}(t) + B(t)$$

Т.к. $\Phi'(t) = A\Phi(t)$, то $\Phi(t)\overline{c}'(t) = B(t)$.

Отсюда $\overline{c}'(t) = \Phi^{-1}(t)B(t)$.

Проинтегрируем обе части: $\overline{c}(t) = \int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$,

t_0 – любое число *(a,b)*.

$$\overline{\varphi}(t) = \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Т.О. $\overline{x}_{\text{общ СНЛДУ}}(t) = \Phi(t)\overline{c} + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$ - **формула Коши.**

Уральский федеральный университет

Если $t = t_0$ – значение аргумента для начальных условий

$\overline{x}(t_0) = \overline{\xi}$, то $\overline{\xi} = \Phi(t_0)\overline{c} + \Phi(t_0)\int\limits_{t_0}^{t_0}\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$

и отсюда $\overline{c} = \Phi^{-1}(t_0)\overline{\xi}.$

Получаем выражение частного решения СНЛДУ

$$\overline{x}_{\text{част. СНЛДУ}}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\overline{\xi} + \Phi(t)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$$

ОСЛДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ОСЛДУ $\dot{X} = AX$, где $a_{ij} = const$.

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений (n = 3). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

Запишем соответствующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Будем искать решения системы в виде:

$x_1 = \alpha_1 e^{\lambda t}, \quad x_2 = \alpha_2 e^{\lambda t}, \quad x_3 = \alpha_3 e^{\lambda t}$, где $\alpha_i = const$.

Подставляя эти функции в систему (1) , перенося все члены в одну сторону и сократив на $e^{\lambda t}$, получим:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 = 0, \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + (a_{33} - \lambda)\alpha_3 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Для того чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно λ. Это уравнение называется ***характеристическим уравнением*** и имеет три корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (собственные значения матрицы *A*). Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы (1).

Рассмотрим различные варианты.

1. Все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения различны, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Ищем решение системы $\dot{X} = AX$ в виде $X = \alpha e^{\lambda t}$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\lambda \alpha e^{\lambda t} = A \alpha e^{\lambda t}, \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda E)\alpha = \theta, \quad \Rightarrow \quad |A - \lambda E| = 0.$$

Для каждого собственного значения λ_i находим собственный вектор $\alpha^{(i)}$. Так как все λ_i различны, то соответствующие им собственные векторы линейно независимы, т.е. образуют ФСР однородной системы:

$$X_1 = \alpha^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \quad X_2 = \alpha^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \quad X_3 = \alpha^{(3)} e^{\lambda_3 t}, \text{ где } \alpha^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \alpha_3^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение ОСЛДУ имеет вид: $X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$.

Рассмотрим различные варианты.

1. Все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения различны, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Ищем решение системы $\dot{X} = AX$ в виде $X = \alpha e^{\lambda t}$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\lambda \alpha e^{\lambda t} = A\alpha e^{\lambda t}, \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda E)\alpha = \theta, \quad \Rightarrow \quad |A - \lambda E| = 0.$$

Для каждого собственного значения λ_i находим собственный вектор $\alpha^{(i)}$. Так как все λ_i различны, то соответствующие им собственные векторы линейно независимы, т.е. образуют ФСР однородной системы:

$$X_1 = \alpha^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \quad X_2 = \alpha^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \quad X_3 = \alpha^{(3)} e^{\lambda_3 t}, \text{ где } \alpha^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \alpha_3^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение ОСЛДУ имеет вид: $X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$.

2. Среди корней характеристического уравнения есть комплексные (причем обязательно сопряженные).

Пусть $\lambda_1 = a + bi,\ \lambda_2 = a - bi$, тогда $\lambda_3 \in \mathbb{R}$. Этим корням соответствуют фундаментальные решения: $\tilde{X}_1 = \alpha^{(1)} e^{(a+bi)t}$, $\tilde{X}_2 = \alpha^{(2)} e^{(a-bi)t}$, $X_3 = \alpha^{(3)} e^{\lambda_3 t}$, где $\alpha^{(1)},\ \alpha^{(2)}$ – векторы с комплексными координатами, причем взаимосопряженные. Но $\operatorname{Re}\tilde{X}_1$ и $\operatorname{Im}\tilde{X}_1$ по свойству решений ОСЛДУ также являются решениями системы, поэтому в вещественной форме решение запишется следующим образом:

$$X = C_1 \cdot \operatorname{Re}\left(\alpha^{(1)} e^{(a+bi)t}\right) + C_2 \cdot \operatorname{Im}\left(\alpha^{(1)} e^{(a+bi)t}\right) + C_3 \alpha^{(3)} e^{\lambda_3 t}.$$

3. Случай кратных корней.

Пусть характеристическое уравнение имеет корень λ кратности $r \geq 2$. Соответствующее этому корню решение системы будем искать в виде:

$$X = \left(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} t\right) e^{\lambda t} \quad \text{при} \quad r = 2 \quad \text{и}$$

$$X = \left(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} t + \alpha^{(3)} t^2\right) e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} t + \alpha_1^{(3)} t^2 \\ \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} t + \alpha_2^{(3)} t^2 \\ \alpha_3^{(1)} + \alpha_3^{(2)} t + \alpha_3^{(3)} t^2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \quad \text{при } r = 3.$$

Коэффициенты $\alpha_j^{(i)}$ определим, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, после подстановки данного решения X в ОСЛДУ $X' = AX$.

Замечание. Если имеется ОСЛДУ $\dot{X} = AX$ с <u>симметричной</u> матрицей A, то кратность каждого характеристического числа λ совпадает с количеством линейно независимых собственных векторов $\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(r)}$, соответствующих данному значению λ. Поэтому данному λ будет соответствовать решение $C_1\alpha^{(1)}e^{\lambda t} + \dots + C_r\alpha^{(r)}e^{\lambda t}$.

Общее решение НСЛДУ с постоянными коэффициентами можно найти с помощью метода Лагранжа вариации произвольных постоянных, если известно общее решение соответствующей ОСЛДУ. Данный метод не предъявляет никаких требований к виду неоднородности.

Но в некоторых случаях более удобным может оказаться другой метод – ***метод неопределенных коэффициентов*** (или его иногда называют методом Эйлера).

Метод неопределенных коэффициентов *применяется в случаях*, когда

1) коэффициенты $a_{ij} = const$;

2) неоднородности в уравнениях имеют вид:

$$f_i(t) = e^{\alpha t}\left(P_{k_i}(t)\cos\beta t + Q_{m_i}(t)\sin\beta t\right), \ \ i = \overline{1,n},$$

где $P_{k_i}(t)$, $Q_{m_i}(t)$ – многочлены степеней k_i, m_i соответственно (i – номер уравнения в системе).

Частное решение НСЛДУ будем искать в виде:

$$\tilde{x}_i(t) = e^{\alpha t}\left(R^i_{m+s}(t)\cos\beta t + T^i_{m+s}(t)\sin\beta t\right), \ \ i = \overline{1,n},$$

где $R^i_{m+s}(t)$, $T^i_{m+s}(t)$ – многочлены степени $m+s$, $m = \max\{k_i, m_i\}$, s – кратность корня $\lambda = \alpha + \beta i$ характеристического многочлена ОСЛДУ.

Замечание 1. Число s является показателем наличия или отсутствия резонанса в системе.

Замечание 2. При решении одного дифференциального уравнения частное решение неоднородного ДУ находят по формуле:

$$\tilde{x}(t) = e^{\alpha t} t^{s} \left(R_m(t) \cos \beta t + T_m(t) \sin \beta t \right),$$

т.е. в отличие от СДУ кратность корня учитывается не в степени многочлена при $\cos \beta t$ и $\sin \beta t$, а появляется дополнительный (резонансный) множитель t^{s}.

Пример. Найти частное решение СНЛДУ $\overset{'}{X} = AX + B$, при этом для решения соответствующей СОЛДУ $\overset{'}{X} = AX$ использовать метод Эйлера, решение СНЛДУ подобрать по виду вектор-функции $B(t)$ правой части СНЛДУ:

$$\begin{cases} \overset{'}{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ X(0) = (0;\ 0)^{\tau}. \end{cases}$$

Решение. Найдем решение однородной системы $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X$.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Найдем его корни: $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2$.

Для каждого собственного значения λ_i находим собственный вектор ξ_i:

1) $\lambda_1 = -1$: $(A+E)\xi = \theta, \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, откуда $\begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$,

$2\alpha = \beta$ и $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Тогда $X_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ – решение ОСЛДУ.

2) $\lambda_2 = 2: \quad (A-2E)\xi = \theta, \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$ откуда $\beta = -\alpha$ и

$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Тогда решение ОСЛДУ $X_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Общее решение ОСЛДУ имеет вид: $\bar{X}(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t)$, т.е.

$$\bar{X}(t) = C_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Найдем частное решение неоднородной системы методом неопределенных коэффициентов:

$$\tilde{x}_i(t) = e^{\alpha t}\left(R^i_{m+s}(t)\cos\beta t + T^i_{m+s}(t)\sin\beta t\right), \quad i = \overline{1,n}.$$

$$\begin{cases} X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ X(0) = (0;\ 0)^{\tau}. \end{cases}$$

$$\tilde{x}_i(t) = e^{\alpha t}\left(R^i_{m+s}(t)\cos\beta t + T^i_{m+s}(t)\sin\beta t\right), \quad i = \overline{1,n}$$

В нашем случае $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $m = 0$, $s = 0$. Тогда частное решение имеет вид

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} A\cos t + B\sin t \\ C\cos t + D\sin t \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты A, B, C, D найдем из уравнения $\tilde{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \tilde{X} + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -A\sin t + B\cos t \\ -C\sin t + D\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\cos t + B\sin t \\ C\cos t + D\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -A\sin t + B\cos t = A\cos t + B\sin t - C\cos t - D\sin t + \sin t \\ -C\sin t + D\cos t = -2A\cos t - 2B\sin t \end{cases}, \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -A = B - D + 1 \\ B = A - C \\ -C = -2B \\ D = -2A \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -0,3 \\ B = -0,1 \\ C = -0,2 \\ D = 0,6 \end{cases}.$$

Тогда $\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} -0,3\cos t - 0,1\sin t \\ -0,2\cos t + 0,6\sin t \end{pmatrix}$.

Общее решение СДУ имеет вид: $X(t) = \bar{X}(t) + \tilde{X}(t)$.

Итак, $X(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,3\cos t - 0,1\sin t \\ -0,2\cos t + 0,6\sin t \end{pmatrix}$.

Найдем решение задачи Коши:

$$X(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad C_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0,3\\-0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}C_1+C_2=0,3\\2C_1-C_2=0,2\end{cases},$$

откуда $C_1=\dfrac{1}{6},\ C_2=\dfrac{2}{15}$.

Таким образом, получили искомое частное решение НСЛДУ:

$$X(t)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}e^{-t}\\2e^{-t}\end{pmatrix}+\frac{2}{15}\begin{pmatrix}e^{2t}\\-e^{2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0,3\cos t-0,1\sin t\\-0,2\cos t+0,6\sin t\end{pmatrix}.$$

4. Найти общее решение СНЛДУ используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 5x + e^{t}; \\ \dot{y} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$$

Уральский федеральный университет

5. Найти общее решение СОЛДУ методом Эйлера

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}.$$

6. Найти общее решение СОЛДУ методом Эйлера

$$\left\{ \dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}. \right.$$

7. Решить СНЛДУ по формуле Коши

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \overline{x} + \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \overline{x}(0) = (1, 0)^T \end{cases}$$

Формула Коши

$$\overline{x}_{\text{общ СНЛДУ}}\left(t\right)=\Phi\left(t\right)\overline{c}+\Phi\left(t\right)\int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}\left(\tau\right)B\left(\tau\right)d\tau$$