



Математика

2 семестр

Лекция 14

Системы линейных дифференциальных уравнений

Мини-КР

1. Решить ОЛДУ

$$y'' + 4y' + 8y = 0$$

$$y'' + 4y' - 5y = 0$$

$$y'' + 2y' = 0$$

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$y'' + 4y = 0$$

2. Найти вид частного решения НЛДУ

$$y'' + 4y' + 8y = x \sin x$$

$$y'' + 4y' - 5y = (x^2 + 2)e^{-x}$$

$$y'' + 2y' = e^{-2x}$$

$$y'' + 6y' + 9y = xe^{-3x}$$

$$y'' + 4y' + 4y = 1 + e^{2x}$$

$$y'' + 4y = \sin 2x$$

Введение

- Существуют методы решения систем дифференциальных уравнений, сходные с теорией решения ЛДУ.

Основные понятия теории СЛДУ

Определение. Нормальная система ДУ называется линейной, если в каждом ее уравнении функции

$x'_i(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)); i = \overline{1, n}$ линейны относительно неизвестных функций, т. е. если она имеет вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Запишем систему в векторной форме: $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + B(t)$,

где $\bar{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$.

При $B(t) \equiv 0$ получим систему ОЛДУ вида $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$
 $t \in (a, b)$

Свойства решений СОЛДУ

Обозначим через Y множество всех решений СОЛДУ, Y – линейное пространство.

Теорема. Любые n линейно независимых решений СОЛДУ $\vec{x} = A(t)\vec{x}$ образуют базис пространства Y .

Определение. Базис пространства всех решений СОЛДУ $\vec{x} = A(t)\vec{x}$ называется *фундаментальной системой решений* (ФСР) СОЛДУ.

Матрица, столбцы которой являются ФСР, называется *фундаментальной матрицей* СОЛДУ $\vec{x} = A(t)\vec{x}$.

Теорема о структуре общего решения СОЛДУ

Если $\{\bar{x}_k(t)\}_{k=1}^n$ – фундаментальная система решений СОЛДУ $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$ на (a, b) , то ее общее решение имеет

вид $\bar{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \bar{x}_k(t)$, где $c_k \in \mathbb{R}$

Теорема о структуре общего решения СНЛДУ

Если 1) $\{\bar{x}_k(t)\}_{k=1}^n$ - ФСР СОЛДУ $\bar{x}' = A(t)\bar{x}$;

2) $\bar{\varphi}(t)$ – некоторое решение СНЛДУ $\bar{x}' = A(t)\bar{x} + B(t)$,

то общее решение СНЛДУ находится по формулам:

$$\bar{x}_{\text{общ. СНЛДУ}}(t) = \bar{x}_{\text{общ. СОЛДУ}}(t) + \bar{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \bar{x}_k(t) + \bar{\varphi}(t)$$

или $\bar{x}_{\text{общ. СНЛДУ}}(t) = \Phi(t)\bar{c} + \bar{\varphi}(t), t \in (a, b)$.

Для поиска частного решения $\bar{\varphi}(t)$ можно воспользоваться методом вариации произвольной постоянной (из СОЛДУ):

$$\bar{\varphi}(t) = \Phi(t)\bar{c}(t).$$

СНЛДУ $\bar{x}' = A(t)\bar{x} + B(t)$, имеет решение $\bar{\varphi}(t) = \Phi(t)\bar{c}(t)$.

Тогда $\bar{\varphi}'(t) = \Phi'(t)\bar{c}(t) + \Phi(t)\bar{c}'(t)$, т.е.

$$\Phi'(t)\bar{c}(t) + \Phi(t)\bar{c}'(t) = A\Phi(t)\bar{c}(t) + B(t)$$

Т.к. $\Phi'(t) = A\Phi(t)$, то $\Phi(t)\bar{c}'(t) = B(t)$.

Отсюда $\bar{c}'(t) = \Phi^{-1}(t)B(t)$.

Проинтегрируем обе части: $\bar{c}(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$,

t_0 – любое число (a, b) .

$$\bar{\varphi}(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau.$$

Т.О. $\bar{x}_{\text{общ СНЛДУ}}(t) = \Phi(t)\bar{c} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$ -
формула Коши.

Если $t = t_0$ – значение аргумента для начальных условий

$$\bar{x}(t_0) = \bar{\xi}, \quad \text{то} \quad \bar{\xi} = \Phi(t_0)\bar{c} + \Phi(t_0) \int_{t_0}^{t_0} \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$$

и отсюда $\bar{c} = \Phi^{-1}(t_0)\bar{\xi}$.

Получаем выражение частного решения СНЛДУ

$$\bar{x}_{\text{част. СНЛДУ}}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\bar{\xi} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$$

ОСЛДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ОСЛДУ $\dot{X} = AX$, где $a_{ij} = const$.

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений ($n = 3$). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

Запишем соответствующую систему:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases} \quad (1)$$

Будем искать решения системы в виде:

$$x_1 = \alpha_1 e^{\lambda t}, \quad x_2 = \alpha_2 e^{\lambda t}, \quad x_3 = \alpha_3 e^{\lambda t}, \quad \text{где } \alpha_i = \text{const}.$$

Подставляя эти функции в систему (1), перенося все члены в одну сторону и сократив на $e^{\lambda t}$, получим:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 = 0, \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + (a_{33} - \lambda)\alpha_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для того чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно λ . Это уравнение называется **характеристическим уравнением** и имеет три корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (собственные значения матрицы A). Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы (1).

Рассмотрим различные варианты.

1. Все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения различны, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Ищем решение системы $\dot{X} = AX$ в виде $X = \alpha e^{\lambda t}$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\lambda \alpha e^{\lambda t} = A \alpha e^{\lambda t}, \Rightarrow (A - \lambda E) \alpha = 0, \Rightarrow |A - \lambda E| = 0.$$

Для каждого собственного значения λ_i находим собственный вектор $\alpha^{(i)}$. Так как все λ_i различны, то соответствующие им собственные векторы линейно независимы, т.е. образуют ФСР однородной системы:

$$X_1 = \alpha^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \quad X_2 = \alpha^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \quad X_3 = \alpha^{(3)} e^{\lambda_3 t}, \quad \text{где } \alpha^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \alpha_3^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение ОСЛДУ имеет вид: $X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$.

Рассмотрим различные варианты.

1. Все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения различны, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Ищем решение системы $\dot{X} = AX$ в виде $X = \alpha e^{\lambda t}$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\lambda \alpha e^{\lambda t} = A \alpha e^{\lambda t}, \Rightarrow (A - \lambda E) \alpha = 0, \Rightarrow |A - \lambda E| = 0.$$

Для каждого собственного значения λ_i находим собственный вектор $\alpha^{(i)}$. Так как все λ_i различны, то соответствующие им собственные векторы линейно независимы, т.е. образуют ФСР однородной системы:

$$X_1 = \alpha^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \quad X_2 = \alpha^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \quad X_3 = \alpha^{(3)} e^{\lambda_3 t}, \quad \text{где } \alpha^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \alpha_2^{(i)} \\ \alpha_3^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение ОСЛДУ имеет вид: $X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$.

2. Среди корней характеристического уравнения есть комплексные (причем обязательно сопряженные).

Пусть $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$, тогда $\lambda_3 \in \mathbb{R}$. Этим корням соответствуют фундаментальные решения: $X_1 = \alpha^{(1)} e^{(a+bi)t}$, $X_2 = \alpha^{(2)} e^{(a-bi)t}$, $X_3 = \alpha^{(3)} e^{\lambda_3 t}$, где $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ – векторы с комплексными координатами, причем взаимосопряженные. Но $\operatorname{Re} X_1$ и $\operatorname{Im} X_1$ по свойству решений ОСЛДУ также являются решениями системы, поэтому в вещественной форме решение запишется следующим образом:

$$X = C_1 \cdot \operatorname{Re} \left(\alpha^{(1)} e^{(a+bi)t} \right) + C_2 \cdot \operatorname{Im} \left(\alpha^{(1)} e^{(a+bi)t} \right) + C_3 \alpha^{(3)} e^{\lambda_3 t}.$$

3. Случай кратных корней.

Пусть характеристическое уравнение имеет корень λ кратности $r \geq 2$.

Соответствующее этому корню решение системы будем искать в виде:

$$X = \left(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}t \right) e^{\lambda t} \quad \text{при } r = 2 \text{ и}$$

$$X = \left(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}t + \alpha^{(3)}t^2 \right) e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}t + \alpha_1^{(3)}t^2 \\ \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}t + \alpha_2^{(3)}t^2 \\ \alpha_3^{(1)} + \alpha_3^{(2)}t + \alpha_3^{(3)}t^2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \quad \text{при } r = 3.$$

Коэффициенты $\alpha_j^{(i)}$ определим, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t , после подстановки данного решения X в ОСЛДУ

$$\dot{X} = AX.$$

Замечание. Если имеется ОСЛДУ $\dot{X} = AX$ с симметричной матрицей A , то кратность каждого характеристического числа λ совпадает с количеством линейно независимых собственных векторов $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r)}$, соответствующих данному значению λ . Поэтому данному λ будет соответствовать решение $C_1 \alpha^{(1)} e^{\lambda t} + \dots + C_r \alpha^{(r)} e^{\lambda t}$.

Общее решение НСЛДУ с постоянными коэффициентами можно найти с помощью метода Лагранжа вариации произвольных постоянных, если известно общее решение соответствующей ОСЛДУ. Данный метод не предъявляет никаких требований к виду неоднородности.

Но в некоторых случаях более удобным может оказаться другой метод – **метод неопределенных коэффициентов** (или его иногда называют методом Эйлера).

Метод неопределенных коэффициентов применяется в случаях, когда

1) коэффициенты $a_{ij} = const$;

2) неоднородности в уравнениях имеют вид:

$$f_i(t) = e^{\alpha t} \left(P_{k_i}(t) \cos \beta t + Q_{m_i}(t) \sin \beta t \right), \quad i = \overline{1, n},$$

где $P_{k_i}(t)$, $Q_{m_i}(t)$ – многочлены степеней k_i , m_i соответственно (i – номер уравнения в системе).

Частное решение НСЛДУ будем искать в виде:

$$\mathbb{X}_i(t) = e^{\alpha t} \left(R_{m+s}^i(t) \cos \beta t + T_{m+s}^i(t) \sin \beta t \right), \quad i = \overline{1, n},$$

где $R_{m+s}^i(t)$, $T_{m+s}^i(t)$ – многочлены степени $m+s$, $m = \max\{k_i, m_i\}$, s – кратность корня $\lambda = \alpha + \beta i$ характеристического многочлена ОСЛДУ.

Замечание 1. Число s является показателем наличия или отсутствия резонанса в системе.

Замечание 2. При решении одного дифференциального уравнения частное решение неоднородного ДУ находят по формуле:

$$x(t) = e^{\alpha t} t^s (R_m(t) \cos \beta t + T_m(t) \sin \beta t),$$

т.е. в отличие от СДУ кратность корня учитывается не в степени многочлена при $\cos \beta t$ и $\sin \beta t$, а появляется дополнительный (резонансный) множитель t^s .

Пример. Найти частное решение СНЛДУ $\dot{X} = AX + B$, при этом для решения соответствующей СОЛДУ $\dot{X} = AX$ использовать метод Эйлера, решение СНЛДУ подобрать по виду вектор-функции $B(t)$ правой части СНЛДУ:

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ X(0) = (0; 0)^T. \end{cases}$$

Решение. Найдем решение однородной системы $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X$.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = 0, \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Найдем его корни: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$.

Для каждого собственного значения λ_i находим собственный вектор ξ_i :

$$1) \lambda_1 = -1: (A + E)\xi = \theta, \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ откуда } \begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases},$$

$2\alpha = \beta$ и $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Тогда $X_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ – решение ОСЛДУ.

$$2) \quad \lambda_2 = 2: \quad (A - 2E)\xi = \theta, \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{откуда } \beta = -\alpha \quad \text{и}$$

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \text{Тогда решение ОСЛДУ } X_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение ОСЛДУ имеет вид: $\bar{X}(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t)$, т.е.

$$\bar{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Найдем частное решение неоднородной системы методом неопределенных коэффициентов:

$$\bar{x}_i(t) = e^{\alpha t} \left(R_{m+s}^i(t) \cos \beta t + T_{m+s}^i(t) \sin \beta t \right), \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ X(0) = (0; 0)^\tau. \end{cases}$$

$$\tilde{x}_i(t) = e^{\alpha t} \left(R_{m+s}^i(t) \cos \beta t + T_{m+s}^i(t) \sin \beta t \right), \quad i = \overline{1, n}$$

В нашем случае $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $m = 0$, $s = 0$. Тогда частное решение имеет вид

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} A \cos t + B \sin t \\ C \cos t + D \sin t \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты A , B , C , D найдем из уравнения $\dot{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \tilde{X} + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} -A \sin t + B \cos t \\ -C \sin t + D \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \cos t + B \sin t \\ C \cos t + D \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -A \sin t + B \cos t = A \cos t + B \sin t - C \cos t - D \sin t + \sin t \\ -C \sin t + D \cos t = -2A \cos t - 2B \sin t \end{cases}, \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -A = B - D + 1 \\ B = A - C \\ -C = -2B \\ D = -2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -0,3 \\ B = -0,1 \\ C = -0,2 \\ D = 0,6 \end{cases}$$

Тогда $\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} -0,3 \cos t - 0,1 \sin t \\ -0,2 \cos t + 0,6 \sin t \end{pmatrix}$.

Общее решение СДУ имеет вид: $X(t) = \bar{X}(t) + \tilde{X}(t)$.

Итак, $X(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,3 \cos t - 0,1 \sin t \\ -0,2 \cos t + 0,6 \sin t \end{pmatrix}$.

Найдем решение задачи Коши:

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,3 \\ -0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0,3 \\ 2C_1 - C_2 = 0,2 \end{cases},$$

откуда $C_1 = \frac{1}{6}$, $C_2 = \frac{2}{15}$.

Таким образом, получили искомое частное решение НСЛДУ:

$$X(t) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + \frac{2}{15} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,3 \cos t - 0,1 \sin t \\ -0,2 \cos t + 0,6 \sin t \end{pmatrix}.$$

4. Найти общее решение СНЛДУ используя метод Эйлера для СОЛДУ и подбор решений для СНЛДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 5x + e^t; \\ \dot{y} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$$





5. Найти общее решение СОЛДУ методом Эйлера

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 10x = 0$$



6. Найти общее решение СОЛДУ методом Эйлера

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 1x = 0$$



7. Решить СНЛДУ по формуле Коши

$$\dot{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}(0) = (1, 0)^T$$





Формула Коши

$$\bar{x}_{\text{общ}} \text{ СНЛДУ } (t) = \Phi(t)\bar{c} + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau$$



