

VI РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

П.1. Построение разностных схем интегро- интерполяционным

Под *разностной схемой* понимают совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих основное уравнение и дополнительные условия исходной дифференциальной задачи.

Разностное уравнение — уравнение, связывающее значение некоторой неизвестной функции в любой точке с её значением в одной или нескольких точках, отстоящих от данной на определенный интервал.

Рассмотрим краевую задачу

$$(k(x)u'(x))' - q(x)u(x) + f(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

$$-k(0)u'(0) + \beta u(0) = \mu_1, \quad u(l) = \mu_2, \quad (2)$$

где $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $k(x) \geq k_* > 0$, $q(x) \geq 0$, и $\beta \geq 0$, μ_1 , μ_2 — заданные числа.

Введем сетку на отрезке

$$\omega_h^{[0,1]} = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = l\}.$$

$$x_{i \pm 1/2} = x_i \pm 0,5h, \quad \omega(x) = k(x) u'(x), \quad \omega_{i \pm 1/2} = \omega(x_{i \pm 1/2})$$

Проинтегрируем основное уравнение по отрезку

$$[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$$

$$\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2} - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) u(x) dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx = 0,$$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) u(x) dx \approx u_i \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx$$

$$d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx, \quad \varphi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx.$$

$$\frac{\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}}{h} - d_i u_i + \varphi_i = 0.$$

проинтегрируем соотношение $u'(x) = w(x)/k(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

$$u_i - u_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{k(x)} dx \approx w_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}.$$

$$a_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}$$

$$w_{i-1/2} \approx a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = a_i u_{x,i}, \quad w_{i+1/2} = a_{i+1} u_{x,i}.$$

$$\frac{1}{h} (a_{i+1}u_{x,i} - a_i u_{\bar{x},i}) - d_i u_i + \varphi_i = 0$$

$$(au_{\bar{x}})_{x,i} - d_i u_i + \varphi_i = 0. \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

N-1 уравнений относительно N+1
неизвестных

Аппроксимация граничных условий

$$u_N = \mu_2$$

проинтегрируем основное уравнение (1) на $[0, x_{1/2}]$

$$x_{1/2} = 0,5h$$

$$w_{1/2} - w_0 - \int_0^{x_{1/2}} q(x) u(x) dx + \int_0^{x_{1/2}} f(x) dx = 0$$

$$w_{i-1/2} \approx a_i u_{x,i}$$

$$w_{1/2} = a_1 u_{x,1}$$

$$w_0 = -\mu_1 + \beta u_0 \quad \text{Граничное условие.}$$

$$\int_0^{x_{1/2}} q(x) u(x) dx \approx u_0 \int_0^{x_{1/2}} q(x) dx$$

$$a_1 u_{x,1} - \beta u_0 + \mu_1 - u_0 \int_0^{x_{1/2}} q(x) dx + \int_0^{x_{1/2}} f(x) dx = 0.$$

$$d_0 = \frac{1}{0,5h} \int_0^{x_{1/2}} q(x) dx, \quad \varphi_0 = \frac{1}{0,5h} \int_0^{x_{1/2}} f(x) dx$$

$$-a_1 u_{x,0} + (\beta + 0,5hd_0) u_0 = \mu_1 + 0,5h\varphi_0.$$

решение разностной задачи $y_i = y(x_i)$, $x_i \in \omega_h$

$$\begin{aligned} (ay_x)_{x,i} - d_i y_i + \varphi_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ -a_1 y_{x,0} + (\beta + 0,5hd_0) y_0 &= \mu_1 + 0,5h\varphi_0, \quad y_N = \mu_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Разностная
задача

Вопросы:

- 1. Существование и единственность**
- 2. Каким методом решать?**
- 3. Аппроксимация**
- 4. Сходимость**

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \tilde{\mu}_1, \quad y_N = \kappa_2 y_2 + \mu_2,$$

$$A_i = a_i, \quad B_i = a_{i+1}, \quad C_i = a_i + a_{i+1} + h^2 d_i, \quad F_i = h^2 \varphi_i, \quad \kappa_2 = 0,$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{1 + h a_1^{-1} (\beta + 0,5 h d_0)}, \quad \tilde{\mu}_1 = \frac{h (\mu_1 + 0,5 h \varphi_0)}{a_1}.$$

Из условий $a_i > 0$, $\beta \geq 0$, $d_i \geq 0$ следует, что $C_i \geq A_i + B_i > 0$, т. е. выполнены условия устойчивости прогонки.


П.2. Порядок аппроксимации разностной схемы, построенной интегро-

интерполяционным методом
Говорят, что разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L в точке $x = x_i$, если разность $L_h v_i - Lv(x_i)$ стремится к нулю при $h \rightarrow 0$.

*Условия второго порядка
аппроксимации*

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} = k'(x_i) + O(h^2), \quad \frac{a_{i+1} + a_i}{2} = k(x_i) + O(h^2)^{(*)}$$

$$(av_x)_{x,i} - (k(x)v'(x))' |_{x=x_i} = O(h^2). \quad (**)$$

$$d_i = q(x_i) + O(h^2), \quad \varphi_i = f(x_i) + O(h^2)$$


$$L_h v_i - Lv(x_i) = O(h^2) \quad (***)$$

Докажем выполнение условий

$$(*) \\ p(x) = k^{-1}(x)$$

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx = p_{i-1/2} + \frac{h^2}{12} p''_{i-1/2} + O(h^4),$$

$$a_i = k_{i-1/2} - \frac{h^2}{12} \frac{p''_{i-1/2}}{p_{i-1/2}^2} + O(h^4) = k_{i-1/2} - \frac{h^2}{12} \frac{p''_i}{p_i^2} + O(h^4).$$

$$a_{i+1} = k_{i+1/2} - \frac{h^2}{12} \frac{p_i''}{p_i^2} + O(h^3).$$

$$\frac{a_{i+1} + a_i}{2} = k(x_i) + O(h^2),$$

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} = \frac{k_{i+1/2} - k_{i-1/2}}{h} + O(h^2) = k'(x_i) + O(h^2),$$

Докажем

(**)

$$F_{hu} = (au_{\bar{x}})_{x,i} = \frac{1}{h} \left(a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right)$$

$$u_{x,i} = u'_i + \frac{h}{2} u''_i + \frac{h^2}{6} u'''_i + O(h^3),$$

$$u_{\bar{x},i} = u'_i - \frac{h}{2} u''_i + \frac{h^2}{6} u'''_i + O(h^3),$$

$$F_{hu} = \frac{a_{i+1} - a_i}{h} u'_i + \frac{a_{i+1} + a_i}{2} u''_i + \frac{h(a_{i+1} - a_i)}{6} u'''_i + O(h^2).$$

$$Fu = \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = (ku')' = ku'' + k'u',$$

$$\begin{aligned} F_h u - Fu(x_i) &= \left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h} - k_i' \right) u_i' + \left(\frac{a_{i+1} + a_i}{2} - k_i \right) u_i'' + \\ &+ \frac{h (a_{i+1}' - a_i')}{6} u_i''' + O(h^2) \end{aligned}$$

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} = k'(x_i) + O(h^2), \quad \frac{a_{i+1} + a_i}{2} = k_i + O(h^2).$$

$$F_h u - F u = O(h^2)$$

Упр. Доказать
(***)

$$L_h u - L u = O(h^2)$$