# VI РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## П.1. Построение разностных схем интегро-интерполяционным

Под *разностной схемой* понимают совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих основное уравнение и дополнительные условия исходной дифференциальной задачи.

**Ра́зностное уравне́ние** — **уравнение**, связывающее значение некоторой неизвестной функции в любой точке с её значением в одной или нескольких точках, отстоящих от данной на определенный интервал.

Рассмотрим краевую задачу

$$(k(x)u'(x))' - q(x)u(x) + f(x) = 0, \qquad 0 < x < l, \tag{1}$$

$$-k(0)u'(0) + \beta u(0) = \mu_1, \qquad u(l) = \mu_2, \tag{2}$$

где $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $k(x) \geqslant k_* > 0$, $q(x) \geqslant 0$, и $\beta \geqslant 0$, $\mu_1$, $\mu_2$ — заданные числа.

Введем сетку на отрезке [0,l]

$$\omega_h = \{x_i = ih,\ i = 0,\ 1,\ \dots,\ N,\ hN = l\}.$$

$$x_{i\pm 1/2} = x_i \pm 0{,}5h,\quad w(x) = k(x)\,u'(x),\quad w_{i\pm 1/2} = w(x_{i\pm 1/2})$$

Проинтегрируем основное уравнение по отрезку $[x_{i-1/2},\ x_{i+1/2}]$

$$w_{i+1/2} - w_{i-1/2} - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,u(x)\,dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx = 0,$$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,u(x)\,dx \approx u_i \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,dx$$

$$d_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,dx, \quad \varphi_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx.$$

$$\frac{w_{i+1/2} - w_{i-1/2}}{h} - d_i u_i + \varphi_i = 0.$$

проинтегрируем соотношение $u'(x)=w(x)/k(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

$$u_i - u_{i-1} = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{k(x)}\,dx \approx w_{i-1/2} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}\,.$$

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}$$

$$w_{i-1/2} \approx a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = a_i u_{\bar{x},i}, \quad w_{i+1/2} = a_{i+1} u_{x,i}.$$

$$\frac{1}{h}\left(a_{i+1}u_{x,i} - a_i u_{\bar{x},i}\right) - d_i u_i + \varphi_i = 0$$

$$(a u_{\bar{x}})_{x,i} - d_i u_i + \varphi_i = 0. \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

N-1 уравнений относительно N+1 неизвестных

# Аппроксимация граничных условий

$$u_N = \mu_2$$

проинтегрируем основное уравнение (1) на $[0, x_{1/2}]$

$x_{1/2} = 0{,}5h$

$$w_{1/2} - w_0 - \int_0^{x_{1/2}} q(x)\,u(x)\,dx + \int_0^{x_{1/2}} f(x)\,dx = 0$$

$$w_{i-1/2} \approx a_i u_{\bar{x},i}, \qquad w_{1/2} = a_1 u_{\bar{x},1}.$$

$$w_0 = -\mu_1 + \beta u_0$$ *Граничное условие.*

$$\int_0^{x_{1/2}} q(x)\,u(x)\,dx \approx u_0 \int_0^{x_{1/2}} q(x)\,dx$$

$$a_1 u_{\bar{x},1} - \beta u_0 + \mu_1 - u_0 \int_0^{x_{1/2}} q(x)\,dx + \int_0^{x_{1/2}} f(x)\,dx = 0.$$

$$d_0 = \frac{1}{0,5h} \int_0^{x_{1/2}} q(x)\,dx, \quad \varphi_0 = \frac{1}{0,5h} \int_0^{x_{1/2}} f(x)\,dx$$

$$-a_1 u_{x,0} + (\beta + 0{,}5hd_0)\, u_0 = \mu_1 + 0{,}5h\varphi_0.$$

решение разностной задачи $y_i = y(x_i),\ x_i \in \omega_h$

$$\boxed{\begin{aligned} &(ay_{\bar{x}})_{x,i} - d_i y_i + \varphi_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ &-a_1 y_{x,0} + (\beta + 0{,}5hd_0)\, y_0 = \mu_1 + 0{,}5h\varphi_0, \quad y_N = \mu_2. \end{aligned}} \quad (3)$$

Разностная
задача

**Вопросы:**

1. **Существование и единственность**
2. **Каким методом решать?**
3. **Аппроксимация**
4. **Сходимость**

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \tilde{\mu}_1, \quad y_N = \varkappa_2 y_2 + \mu_2,$$

$$A_i = a_i,\ B_i = a_{i+1},\ C_i = a_i + a_{i+1} + h^2 d_i,\ F_i = h^2 \varphi_i,\ \varkappa_2 = 0,$$
$$\varkappa_1 = \frac{1}{1 + h a_1^{-1} (\beta + 0{,}5 h d_0)}, \quad \tilde{\mu}_1 = \frac{h (\mu_1 + 0{,}5 h \varphi_0)}{a_1}.$$

Из условий $a_i > 0$, $\beta \geqslant 0$, $d_i \geqslant 0$ следует, что $C_i \geqslant A_i + B_i > 0$, т. е. выполнены условия устойчивости прогонки.

# П.2. Порядок аппроксимации разностной схемы, построенной интегро-интерполяционным методом

Говорят, что разностный оператор $L_h$ аппроксимирует дифференциальный оператор $L$ в точке $x=x_i$, если разность $L_h v_i - Lv(x_i)$ стремится к нулю при $h \to 0$.

*Условия второго порядка аппроксимации*

$$\frac{a_{i+1}-a_i}{h} = k'(x_i) + O(h^2), \qquad \frac{a_{i+1}+a_i}{2} = k(x_i) + O(h^2) \quad (*)$$

$$(av_{\bar{x}})_{x,i} - (k(x)\,v'(x))'\big|_{x=x_i} = O(h^2). \qquad (**)$$

$$d_i = q(x_i) + O(h^2), \quad \varphi_i = f(x_i) + O(h^2)$$

$$L_h v_i - Lv(x_i) = O(h^2) \qquad (***)$$

*Докажем выполнение условий (*)*

$$p(x) = k^{-1}(x)$$

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{h} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx = p_{i-1/2} + \frac{h^2}{12} p''_{i-1/2} + O(h^4),$$

$$a_i = k_{i-1/2} - \frac{h^2}{12} \frac{p''_{i-1/2}}{p^2_{i-1/2}} + O(h^4) = k_{i-1/2} - \frac{h^2}{12} \frac{p''_i}{p^2_i} + O(h^3).$$

$$a_{i+1} = k_{i+1/2} - \frac{h^2}{12} \frac{p_i''}{p_i^2} + O(h^3).$$

$$\frac{a_{i+1} + a_i}{2} = k(x_i) + O(h^2),$$

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} = \frac{k_{i+1/2} - k_{i-1/2}}{h} + O(h^2) = k'(x_i) + O(h^2),$$

*Докажем*
*(**)*

$$F_h u = (a u_{\bar{x}})_{x,i} = \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - a_i\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)$$

$$u_{x,i} = u_i' + \frac{h}{2}u_i'' + \frac{h^2}{6}u_i''' + O(h^3),$$

$$u_{\bar{x},i} = u_i' - \frac{h}{2}u_i'' + \frac{h^2}{6}u_i''' + O(h^3),$$

$$F_h u = \frac{a_{i+1}-a_i}{h}u_i' + \frac{a_{i+1}+a_i}{2}u_i'' + \frac{h(a_{i+1}-a_i)}{6}u_i''' + O(h^2).$$

$$\boldsymbol{F}u = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = (ku')' = ku'' + k'u',$$

$$\boldsymbol{F}_h u - \boldsymbol{F}u(x_i) = \left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h} - k_i'\right)u_i' + \left(\frac{a_{i+1} + a_i}{2} - k_i\right)u_i'' +$$

$$+ \frac{h(a_{i+1}' - a_i)}{6}u_i''' + O(h^2)$$

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} = k'(x_i) + O(h^2), \quad \frac{a_{i+1} + a_i}{2} = k_i + O(h^2).$$

$$\boldsymbol{F}_h u - \boldsymbol{F} u = O(h^2)$$

***Упр***. *Доказать (***)*

$$L_h u - L u = O(h^2)$$