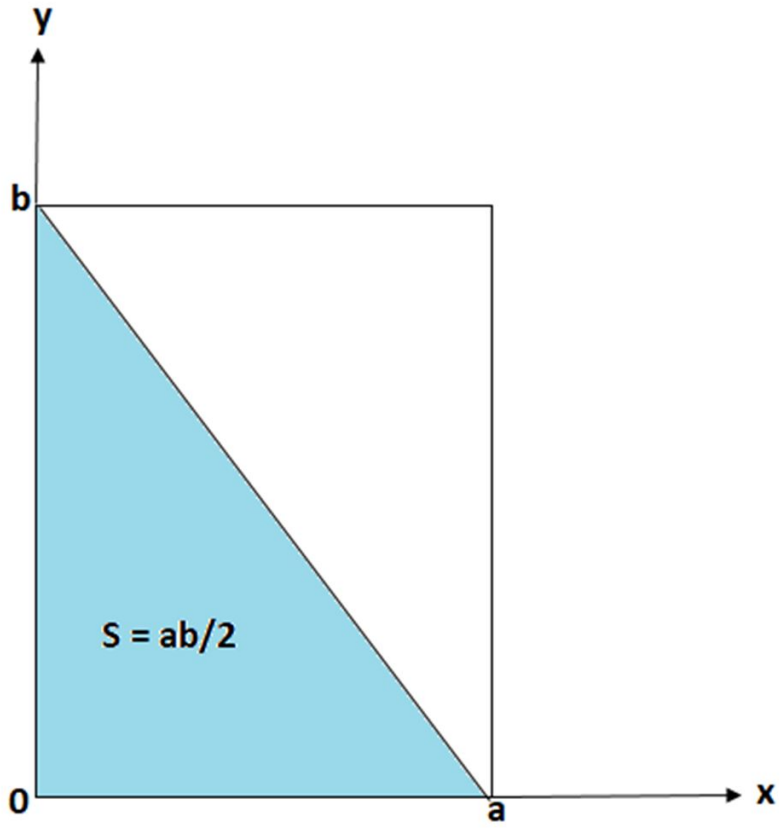
Нахождение площади прямоугольного треугольника методом Монте-Карло

Постановка задачи (этап 1)

Задача. Методом Монте-Карло вычислить площадь прямоугольного треугольника со сторонами a, b.



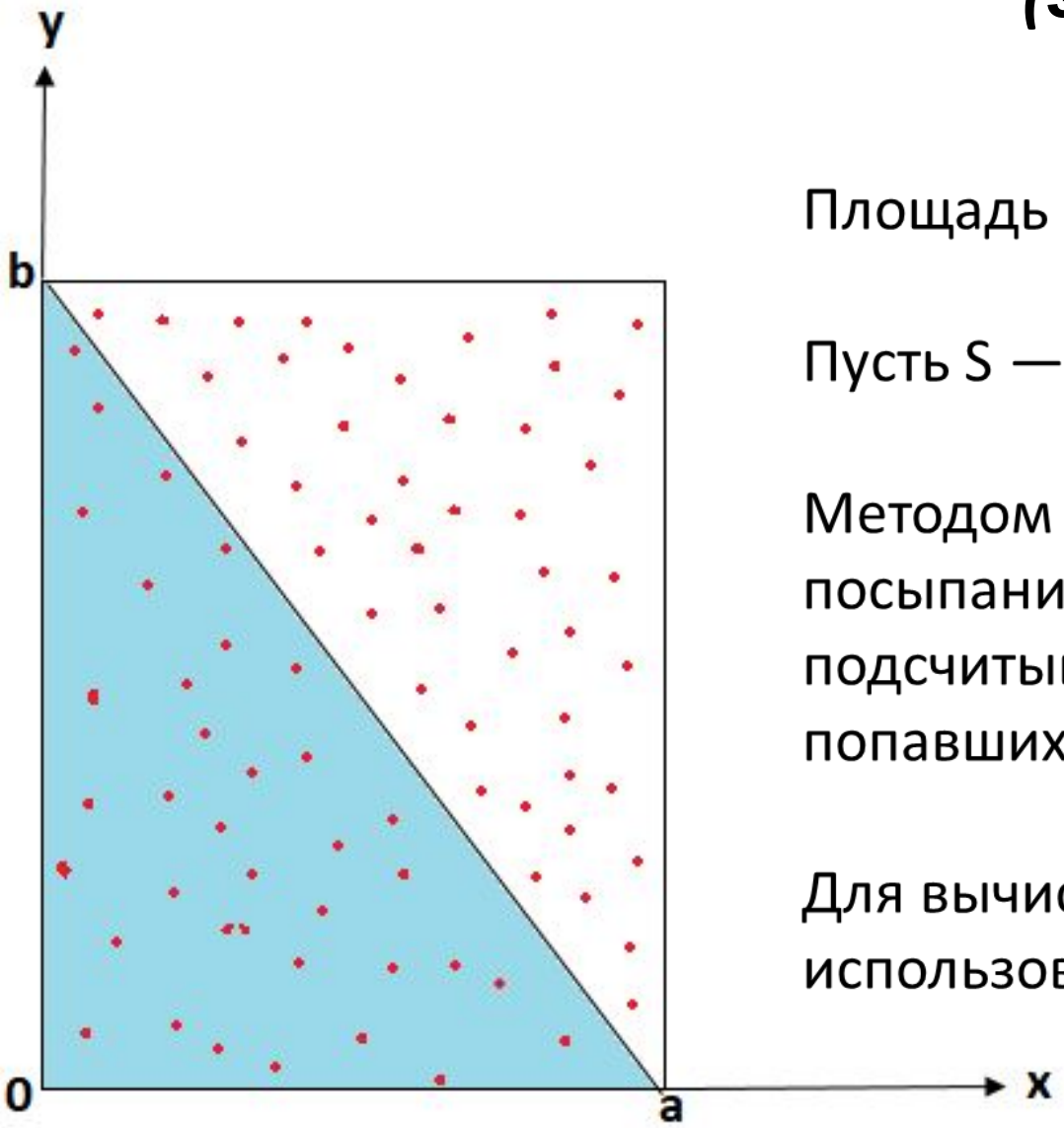
Выбор плана создания модели (этап 2)

Геометрический метод Монте-Карло позволяет вычислять площади плоских фигур.

Изберем следующий план создания модели:

3а) создание документальной математической модели;
3б) создание документальной расчетной модели;
3в) создание компьютерной расчетной модели.

Создание документальной математической модели (этап 3а)



Площадь базового квадрата S_0 = a*b.

Пусть S — искомая площадь треугольника.

Методом Монте-Карло необходимо имитировать процесс посыпания базового квадрата точками-песчинками, подсчитывая общее число n точек и число k точек, попавших в треугольник.

Для вычисления площади треугольника будем использовать основную формулу метода Монте-Карло

$$S = \frac{k}{n} S_0.$$

Создание документальной расчетной модели (этап 3б)

В программе на языке Pascal следует организовать цикл for с числом повторений n и в нем генерировать случайные координаты x и y точек на базовом прямоугольнике.

Для подсчета числа точек, попавших на треугольник, в цикле следует использовать оператор if с условием попадания точки в круг (x – 1)2 + (y – 1)2 ≤ 1 и при выполнении этого условия оператором k:=k+1 организовать накопление значений переменной k, как счетчика. После цикла необходимо организовать вывод результата на экран.

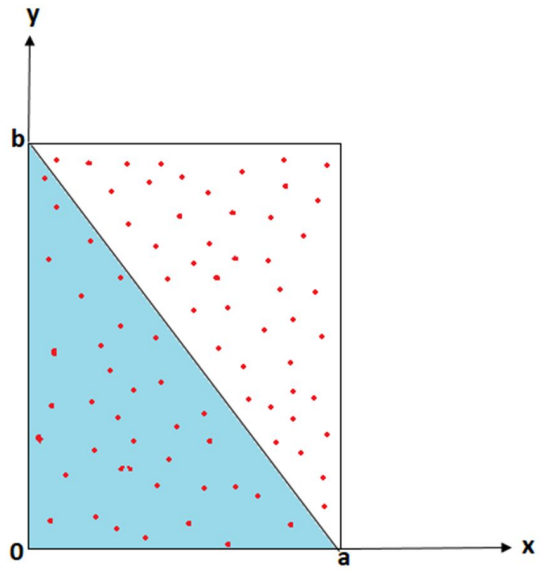
Для генерации координат точек воспользуемся функцией random(). Функция генерирует случайные действительные числа от 0 до 1, а координаты точек-песчинок на базовом прямоугольнике должны принимать значения от $0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b$.

Тогда координаты точек нужно вычислять, используя выражение a*random(), b*random().

Создание компьютерной расчетной модели (этап 3в)

Уравнение прямой, проходящей через две точки (x1,y1), (x2,y2):

$$y - y1 = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}(x - x1)$$



В нашем случае: точки (0,b), (a,0).

$$y - b = \frac{0 - b}{a - 0}(x - 0);$$

$$y - b = \frac{-b}{a} \cdot x;$$

$$x = \frac{y - b}{-\frac{b}{a}}$$

Будем считать, что выбранная случайным образом точка попала внутрь треугольника, если: x ≤ (y-b)/(-b/a).

Проверка адекватности модели (этап 4)

Адекватность модели проверяется сравнением полученного значения числа с точным.

Каждый новый запуск программы меняет рассчитанное значение, так как каждый раз используется новый набор из 1000 точек-песчинок с другими случайными координатами.

•mmk.pas

```
var a,b,x,y,s,s0:real;
    i,n,k:integer;

    begin
      n:=10000000;
      k:=0;
      a:=6;
      b:=5;
      s0:=a*b;
      for i:=1 to n do
      begin
        x:=a*random();
        y:=b*random();
        if x<=(y-b)/(-b/a) then k:=k+1;
      end;
      s:=s0*k/n;
      writeln('Площадь треугольника - ',s);
      writeln('Точно площадь треугольника - ',a*b/2);
    end.
```

Окно вывода

```
Площадь треугольника - 14.99898
Точно площадь треугольника - 15
```

•mmk.pas*

```
var a,b,x,y,s,s0:real;
    i,n,k:integer;

    begin
      n:=10000000;
      k:=0;
      a:=10;
      b:=12;
      s0:=a*b;
      for i:=1 to n do
      begin
        x:=a*random();
        y:=b*random();
        if x<=(y-b)/(-b/a) then k:=k+1;
      end;
      s:=s0*k/n;
      writeln('Площадь треугольника - ',s);
      writeln('Точно площадь треугольника - ',a*b/2);
    end.
```

Окно вывода

```
Площадь треугольника - 59.995872
Точно площадь треугольника - 60
```

•mmk.pas*

```
var a,b,x,y,s,s0:real;
    i,n,k:integer;

    begin
      n:=10000000;
      k:=0;
      a:=21;
      b:=17;
      s0:=a*b;
      for i:=1 to n do
      begin
        x:=a*random();
        y:=b*random();
        if x<=(y-b)/(-b/a) then k:=k+1;
      end;
      s:=s0*k/n;
      writeln('Площадь треугольника - ',s);
      writeln('Точно площадь треугольника - ',a*b/2);
    end.
```

Окно вывода

```
Площадь треугольника - 178.4632647
Точно площадь треугольника - 178.5
```

•mmk.pas*

```
var a,b,x,y,s,s0:real;
    i,n,k:integer;

    begin
      n:=10000000;
      k:=0;
      a:=11;
      b:=7;
      s0:=a*b;
      for i:=1 to n do
      begin
        x:=a*random();
        y:=b*random();
        if x<=(y-b)/(-b/a) then k:=k+1;
      end;
      s:=s0*k/n;
      writeln('Площадь треугольника - ',s);
      writeln('Точно площадь треугольника - ',a*b/2);
    end.
```

Окно вывода

```
Площадь треугольника - 38.5076692
Точно площадь треугольника - 38.5
```

Считаем гипотезу доказанной.
Пока она не опровергнута!

Формула:

$$S = \frac{k}{n} S_0$$

работает!

Конечно, для чистоты эксперимента вычисление надо повторять несколько раз и брать среднее арифметическое.

Следовательно, нужно добавлять внешний цикл.