Тема 2

Математические основы финансово-экономических расчетов при принятии финансово-кредитных решений

Вопросы для рассмотрения:

1. Временной фактор в инвестиционном процессе
2. Операция наращения и определение будущей стоимости инвестиций
3. Операция дисконтирования и определение текущей стоимости инвестиций
4. Денежные потоки и аннуитет
5. Фактор будущей и текущей стоимости в практических расчетах

Концепция временной стоимости денег

- **Причины неравноценности денег во времени**

инфляция

оборачиваемость (возможность вложения)

риск неполучения ожидаемой суммы

«Отцом» понятия «временная ценность денег (time value of money)» является Леонардо Фибоначчи (1202 г.)

Основные понятия финансовых методов расчета:

- **процент** - это доход от предоставления денег в долг в различных формах, либо от инвестиций производственного или финансового характера;
- **процентная ставка** - относительная величина дохода за фиксированный интервал времени, измеряемая в процентах или в виде дроби;
- **период начисления** - интервал времени, к которому приурочена процентная ставка;
- **интервал начисления** - это минимальный период, по прошествии которого происходит начисление процентов;
- **капитализация процента** - присоединение начисленных процентов к основной сумме;
- **наращение** - увеличение первоначальной суммы в связи с капитализацией;
- **дисконтирование -** приведение стоимостной величины, относящейся к будущему, на некоторый, обычно более ранний момент времени.

В финансовых расчетах используются следующие виды процентных ставок

- **в зависимости от базы для начисления процента:**
  - различают простые проценты (постоянная база);
  - сложные проценты (переменная база);
- **по принципу расчета:**
  - ставка приращения - декурсивная ставка;
  - учетная ставка - антисипативная ставка;
- **по постоянству значения процентной ставки в течение действия контракта:**
  - фиксированные
  - плавающие

Сущность инвестиционного процесса с учетом временного фактора:

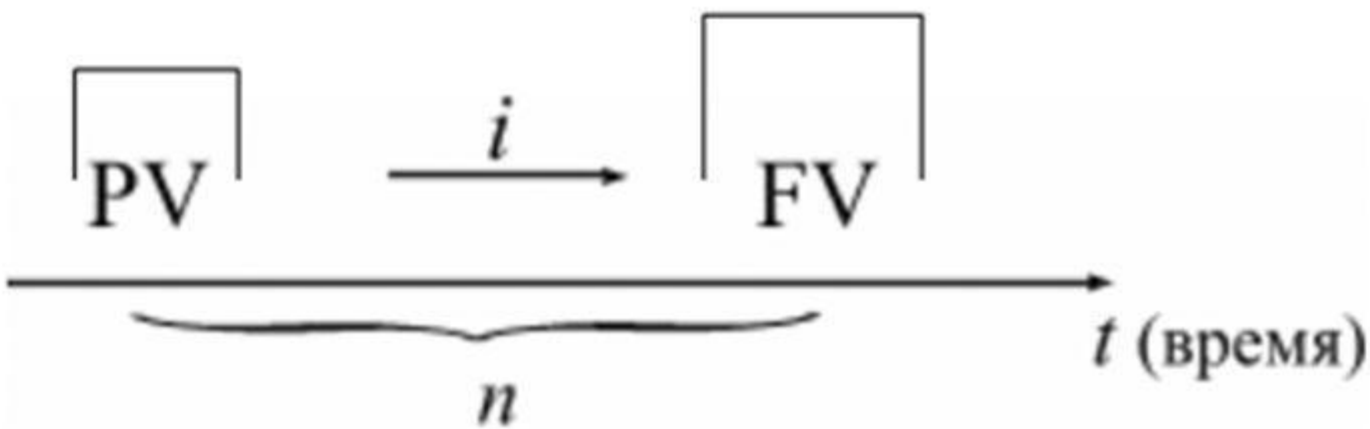
Инвестирование – это вложение средств в некоторой первоначальной сумме **(PV)** на период **(t)** ради возврата их в будущем с прибылью в сумме **(FV)** в виде поступлений по результатам реализации проекта.

Иллюстрация процессов наращения и дисконтирования

Настоящее		Будущее
1. Исходная сумма **PV** 2. Процентная ставка r_t	Наращение →	**Возвращаемая сумма FV**
Приведенная сумма PV	← Дисконтирование	1. Ожидаемая к поступлению сумма **FV** 2. Коэффициент дисконтирования d_t

процентная ставка равна r_t = к-ту дисконтирования d_t

Логика финансовой операции наращения



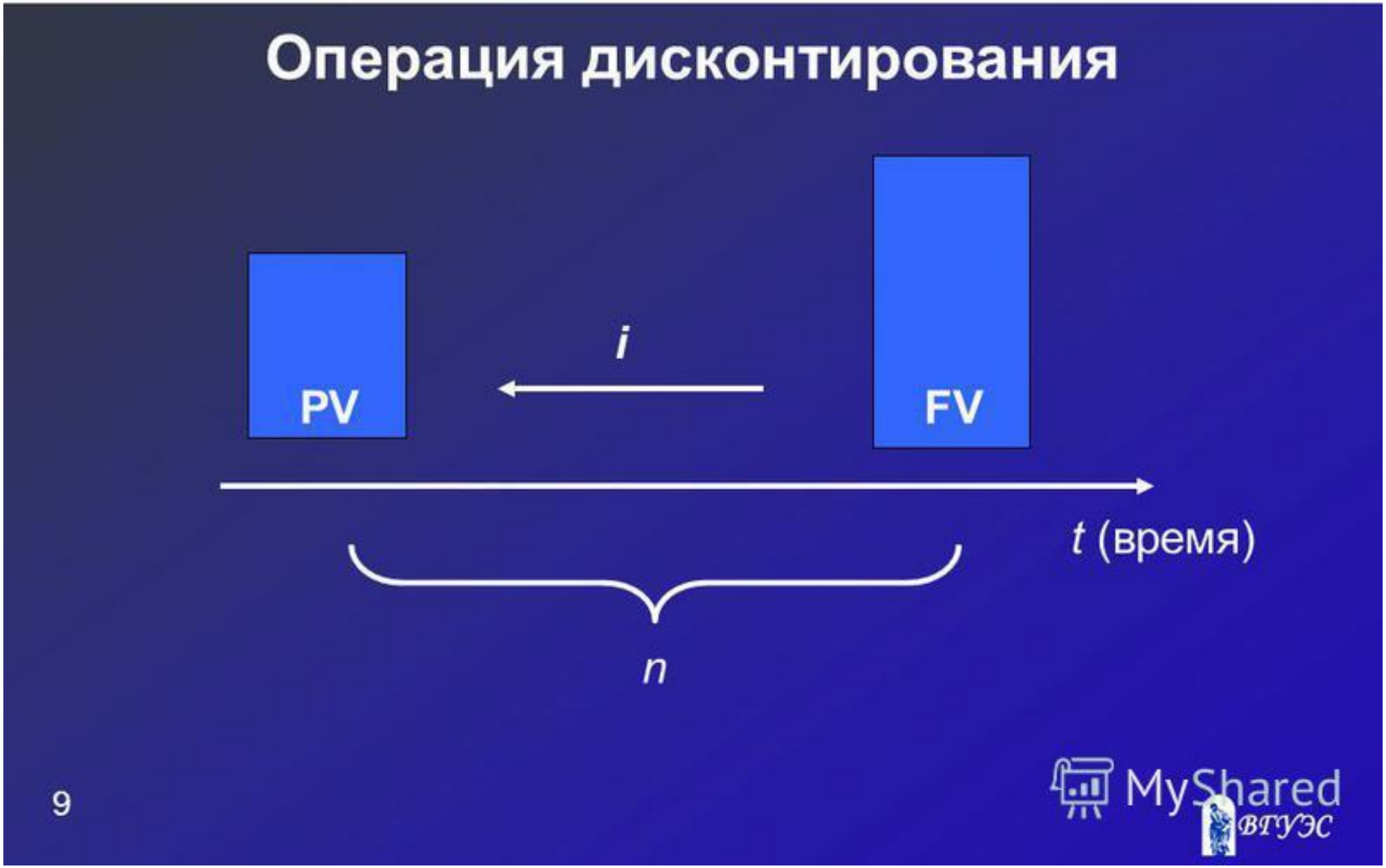
Понятие и экономический смысл наращения

Процесс, в котором заданы исходная сумма **(PV)** и процентная ставка называется **наращением**

Экономический смысл наращения – определение величины той суммы, которую получит инвестор по завершению реализации инвестпроекта

Величина (FV) отображает будущую стоимость сегодняшней величины (PV) при заданном ставке доходности

УЧЕБНЫЙ МАТЕРИАЛ



Понятие и экономический смысл дисконтирования

Процесс, в котором заданы ожидаемая к получению в будущем сумма **(FV)** и коэффициент дисконтирования, называется **дисконтированием**

Экономический смысл дисконтирования – определение ценности будущих поступлений от реализации инвестиционного проекта с позиции текущего момента

Коэффициент дисконтирования (по смыслу также процентная ставка) показывает, какой ежегодный процент возврата может иметь инвестор на вложенный капитал

В этом случае искомая величина (PV) отображает текущую "сегодняшнюю" стоимость будущей величины (FV).

Вопрос 2:

Операция наращения и определение будущей стоимости инвестиций (FV)

Расчет будущей стоимости (FVn)

Проценты

простые	**сложные**
доход только **с первоначальной суммы инвестиций** в течение всего срока реализации проекта	доход **периодически добавляется** к сумме начальной инвестиции
$FVn = PV * (1 + n * r)$	$FVn = PV * (1 + r)^{n}$

где **FVn – возвращаемая сумма капитала**;

PV – первоначальная инвестиция (исходная сумма);

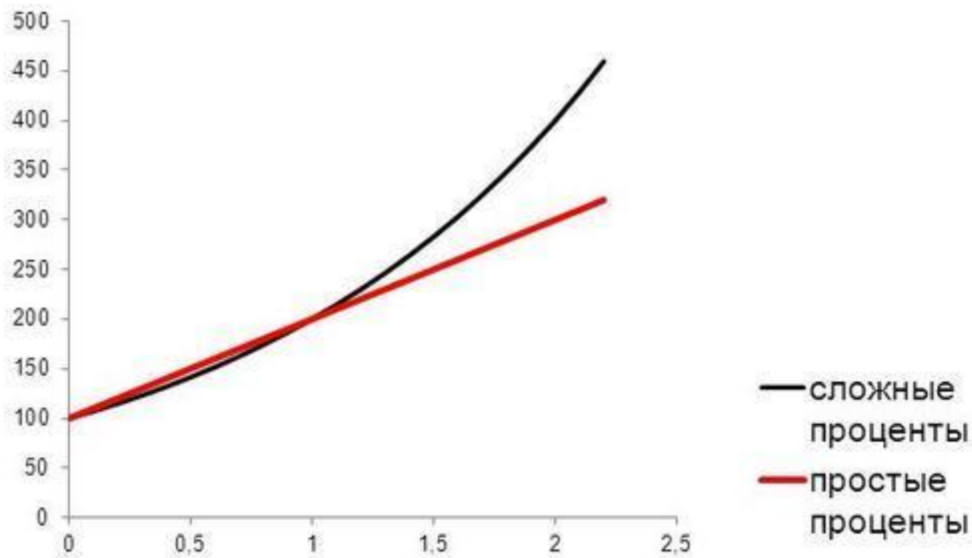
n – срок реализации инвестиционного проекта (годы);

r – годовая процентная ставка (темп прироста денежных средств).

Сравнение простой и сложной схемы наращения капитала

$$FV = PV(1 + nr)$$

$$FV = PV(1 + r)^n$$



Три способа расчета простых процентов :

- **Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды** («германская практика расчета») - продолжительность года условно принимается за 360 дней, а целого месяца – за 30 дней. Этот способ обычно используется в Германии, Дании, Швеции.
- **Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды**, («французская практика расчета») - продолжительность года условно принимается за 360 дней, а продолжительность ссуды рассчитывается точно по календарю. Этот способ имеет распространение во Франции, Бельгии, Испании, Швейцарии.
- **Точные проценты с точным числом дней ссуды** («английская практика расчета») - продолжительность года и продолжительность ссуды берутся точно по календарю. Этот способ применяется в Португалии, Англии, США.

Особенности расчета будущей стоимости

Сложные проценты

начисление 1 раз в год	начисление чаще 1 раза в год
$FVn = PV * (1 + r)^{n}$	$FVn = PV * (1 + r/m)^{n*m}$

где **m** – количество начислений % за год (раз)

ВНИМАНИЕ: при расчете будущей стоимости с применением простых % количество начислений в течение года не влияет на конечную сумму, поскольку база начисления остается неизменной

Финансовые контракты могут заключаться на период, отличающийся от целого числа лет.

В этом случае существуют различные методы подсчета наращенной суммы:

- по схеме ***сложных процентов***: $FV = PV(1+r)^{a+b}$
- по ***смешанной схеме*** : $FV = PV(1+r)^{a}(1+br)$

$a = [n]$ – целое число лет

$b = n - [n]$ – дробная часть года.

Пример 1.3.1. Банк предоставил сумму в 20 тыс. р. на 40 месяцев под 10 % годовых. Найдем сумму, которую предстоит вернуть банку по истечении срока.

$$a = 3 \qquad b = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$FV = PV(1+r)^{a+b} = 20(1+0,1)^{\frac{40}{12}} = 20 \cdot 1,373 = 27,48$$

$$FV = PV(1+r)^{a}(1+br) = 20(1+0,1)^{3}\left(1+0,1\cdot\frac{1}{3}\right) = 27,5$$

Начисление сложных процентов несколько раз в году:

$r^{(m)}$ – годовая процентная ставка при **m**-разовом количестве начислений в году (***номинальная ставка***)

$1/m$ – длительность периода наращения

$\dfrac{r^{(m)}}{m}$ – процентная ставка за период

Формула наращения при **m**-разовом количестве начислений процентов в году:

$$FV = PV\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^{m\cdot n}$$

$$FV = PV \cdot FM1\left(\frac{r^{(m)}}{m}, mn\right)$$

Вопрос 3 :

Операция дисконтирования и определение текущей стоимости инвестиций (PV)

Особенности расчета текущей стоимости (PVn)

Сложные проценты

начисление 1 раз в год	начисление чаще 1 раза в год
$PVn = FV / (1 + r)^{n}$	$PVn = FV / (1 + r/m)^{n*m}$
$1 / (1 + r)^{n} = PVIF_{r,n}$	$1/(1 + r/m)^{n*m} = PVIF_{r/m,n*m}$
$PVn = FV * PVIF_{r,n}$	$PVn = FV * PVIF_{r/m,n*m}$

Вопрос 4 :

Денежные потоки и аннуитет

Роберт Кийосаки:

- Пассивный доход — это такой вид денежного дохода, который поступает Вам постоянно, даже когда Вы не работаете, за ту работу, которую Вы проделали однажды. Это доход, не зависящий от каждодневной деятельности, он является основной частью такого понятия как финансовая независимость. Интересно, да? Что же такого можно сделать однажды, чтобы начать получать пассивный доход?

90% людей ***10% людей***

E
Employers
Рабочие

B
Businessmen
Крупные Бизнесмены

S
Self Employers (Solo)
Специалисты и мелкие предприниматели

I
Investments
Крупные Инвесторы

10% денег ***90% денег***

Виды денежных потоков в инвестиционной деятельности

Равные денежные потоки – это периодическое поступление денежных средств равными суммами через одинаковые промежутки времени.

Денежные потоки считаются неравными, если денежные средства поступают в неравных суммах.

Денежный поток, элементы которого имеют место в начале каждого периода, называется потоком пренумерандо (Рис. 2).

На практике большее распространение получил поток постнумерандо, который лежит в основе методики инвестиционного анализа.

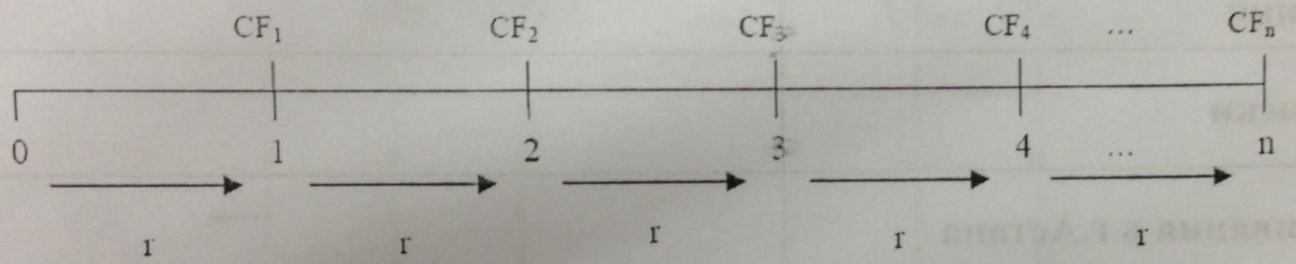


Рис.4 Денежный поток постнумерандо

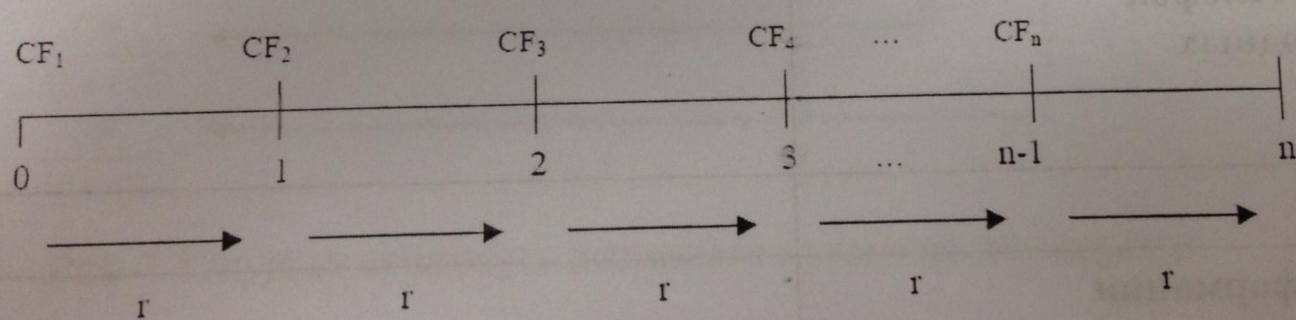


Рис.5 Денежный поток пренумерандо

Оценку будушей стоимости денежного потока постнумерандо можно представить следуюшим образом:

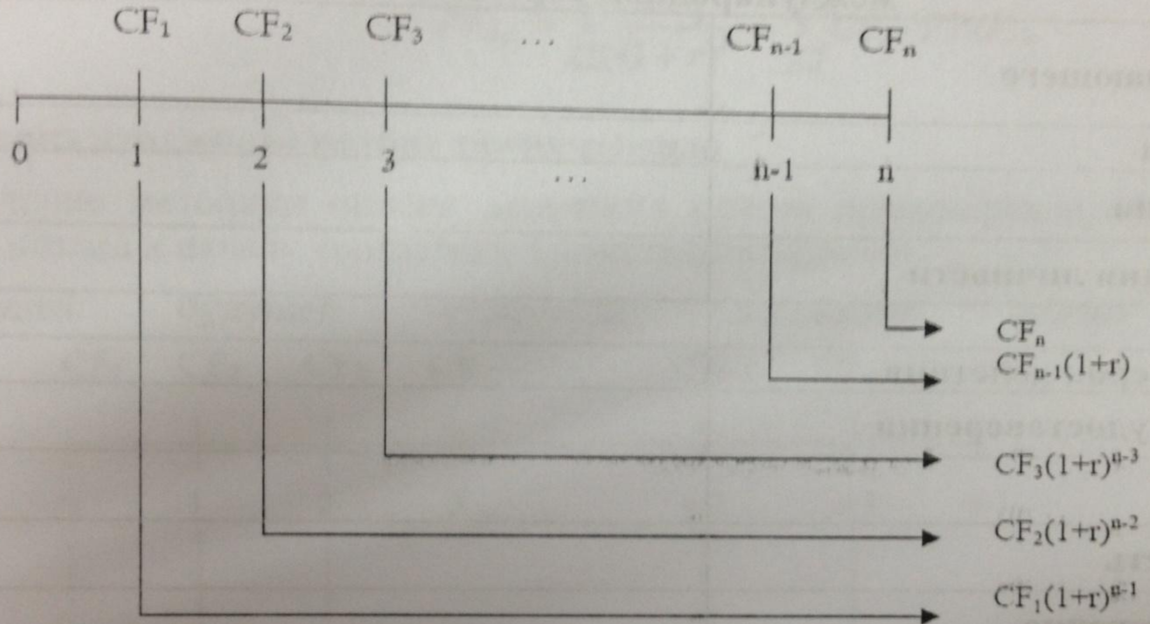


Рис. 6 Будушая стоимость денежного потока постнумерандо

На первое денежное поступление CF_1 начисляются проценты за n-1 период, на второе денежное поступление за n-2 периода и т.д. на последнее денежное поступление проценты не начисляются. Будушая стоимость потока постнумерандо рассчитывается по формуле:

$$FV_{pst} = \sum_{k=1}^{n} CF_k (1+r)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} CF_k \cdot FVIF_{r,n-k}$$

$k=1$ $k=1$

Текущая стоимость денежного потока постнумерандо рассчитывается путем дисконтирования каждого элемента денежного потока и их последующего суммирования.

Оценку текущей стоимости денежного потока постнумерандо можно представить следующим образом:

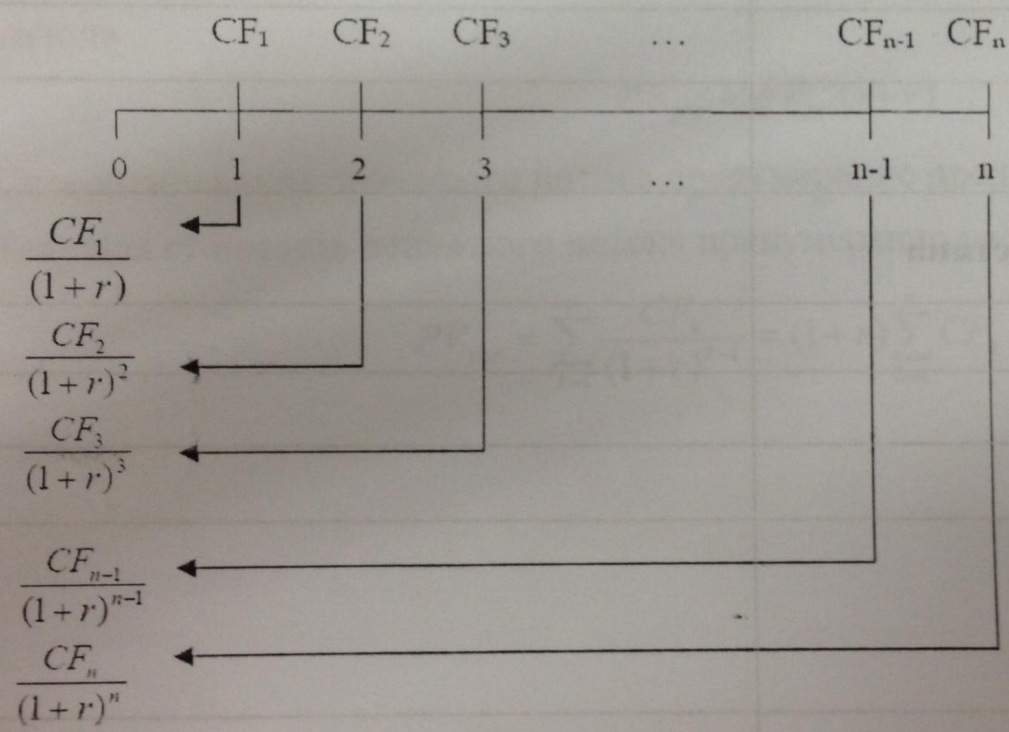


Рис. 7 Текущая стоимость денежного потока постнумерандо

Оценка денежного потока пренумерандо

Отличие методики оценки денежного потока пренумерандо объясняется сдвиг элементов потока к началу соответствующих подынтервалов.

отсюда

$$FV_{pre} = FV_{pst}(1+r)$$

Дисконтирование денежного потока пренумерандо представлено на рисунке 9.

Текушая стоимость денежного потока пренумерандо рассчитывается по формуле:

$$PV_{pre} = \sum_{k=1}^{n} \frac{CF_k}{(1+r)^{k-1}} = (1+r)\sum_{k=1}^{n} CF_k \cdot PVIF_{r,k}$$

отсюда

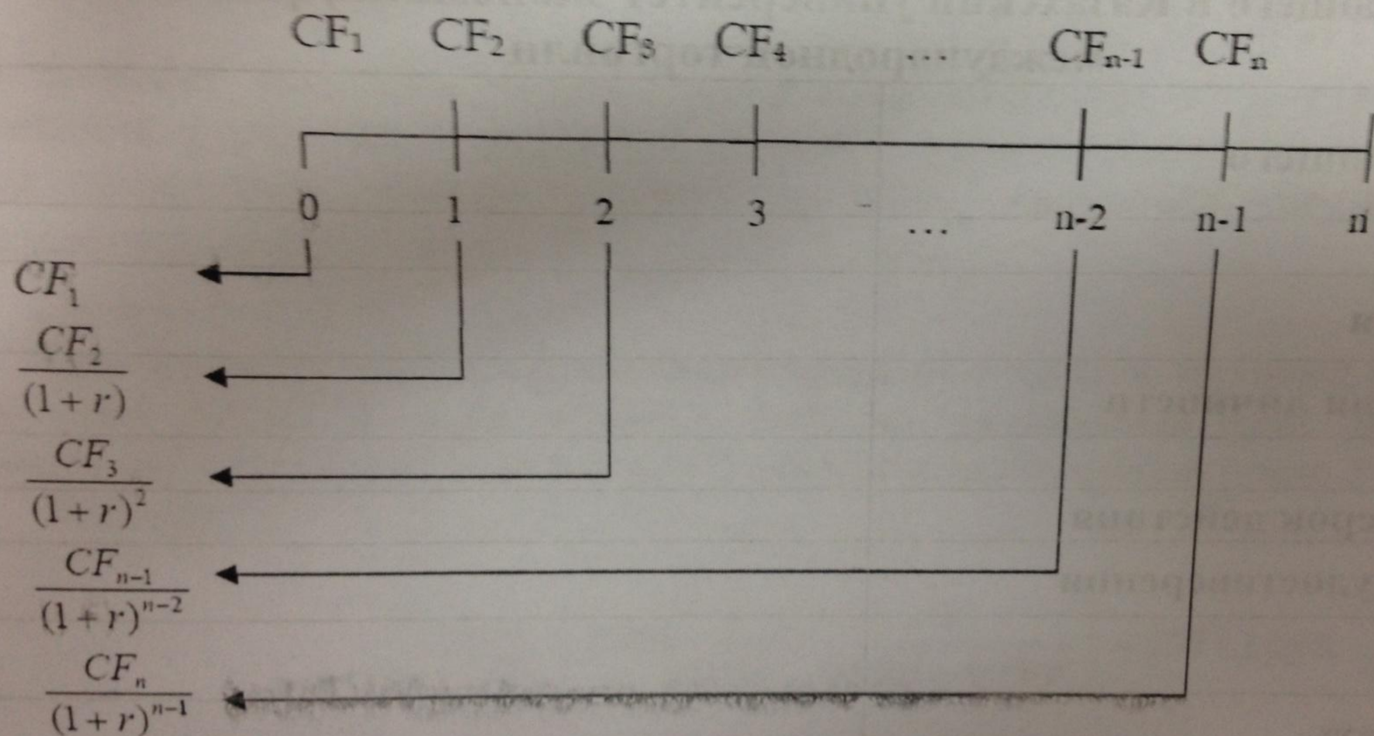


Рис. 9 Текущая стоимость денежного потока пренумерандо

5. Оценка аннуитетов

Аннуитет: понятие и сущность

Аннуитет представляет собой равные по величине денежные потоки в течение точно определенного срока

При аннуитете:

во-первых, поступления денежных средств происходят равными суммами через равные промежутки времени;

во-вторых, есть четко оговоренный период действия аннуитета.

С помощью аннуитета можно оценивать будущую и приведенную стоимости инвестиций в любой промежуток времени в том случае, если инвестиционный проект генерирует равный денежный поток.

Будушая стоимость аннуитета постнумерандо рассчитывается по формуле:

$$FV^{A}_{pst} = A\sum_{k=1}^{n}(1+r)^{n-k} = A\left[\frac{(1+r)^{n}-1}{r}\right]$$

Мультиплицирующий множитель аннуитета $FVIFA_{r,n} = \frac{(1+r)^{n}-1}{r}$ показывает, чему будет равна будущая стоимость аннуитета в одну денежную единицу к концу срока его действия. Значения множителя для различных комбинаций r и n содержатся в финансовых таблицах. Будущая стоимость аннуитета определяется: $FV^{A}_{pst} = A \times FVIFA_{r,n}$

Пример 6.

Предположим, вы инвестируете по 1000 рублей в конце каждого года на протяжении 3 лет под 8% годовых. Какую сумму вы сможете получить в конце срока?

Решение

$$FV^{A}_{pst} = 1000\left[\frac{(1+0{,}08)^{3}-1}{0{,}08}\right] = 3246{,}4 \text{ руб.}$$

Текушая стоимость аннуитета постнумерандо вычисляется по формуле:

$$PV^{A}_{pst} = A\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^{k}} = A\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{r(1+r)^{n}}\right]$$

Бессрочный аннуитет (Perpetuity)

Аннуитет с неограниченным периодом постоянных денежных поступлений называется бессрочным или вечным. Примером бессрочного аннуитета являются консоли - выпускаемые правительствами некоторых стран облигации, по которым производят регулярные купонные выплаты, но которые не имеют фиксированного срока. В западной практике к бессрочным относятся аннуитеты, рассчитанные на 50 и более лет.

Оценка текущей стоимости бессрочного аннуитета производится по формуле:

$$PV^A = \frac{A}{r}$$

Пример 9

Предположим, вы владеете бессрочной облигацией номиналом 1000 рублей и купонной ставкой 6%. Какова текущая стоимость облигации, если ставка дисконтирования – 9%?

Решение

$$PV^A = \frac{60}{0{,}09} = 667 \text{ руб.}$$

Текущая стоимость облигации будет равна номинальной в случае равенства купонной доходности и ставки дисконтирования.

Разновидностью бессрочного аннуитета является бессрочный аннуитет с постоянным темпом роста. Текущая стоимость такого аннуитета рассчитывается как:

При $n \to \infty$ $PV^A = A\frac{(1+g)}{(r-g)}$

Заметим, что формула работает, когда g<r.

Амортизация ссуды

Амортизация ссуды (loan amortization) – это процесс постепенного погашения кредита равными платежами. Периодичность погашения может быть месячная, квартальная или годовая. Величина ежегодного платежа включает процент и частичное погашение основной суммы. Разбивка величины ежегодного платежа на две части: процентную и погасительную называется структурой амортизируемой ссуды. Проценты начисляются не на первоначальную сумму долга, а на фактически оставшуюся задолженность на начало каждого года. Такой метод начисления процентов называется актуарным. Процентная составляющая ежегодного платежа рассчитывается домножением значения ссуды на начало каждого периода на процентную ставку. Погасительная составляющая может быть найдена как разность общей величины платежа за период и процентной составляющей.

Пример 11

Величина ссуды 6000 долларов США. Срок ссуды 4 года. Процентная ставка – 15% годовых. Ссуда погашается ежегодно равными платежами с начислением процентов на непогашенный остаток. Требуется составить план погашения ссуды.

Решение

Для расчета величины годового платежа необходимо приравнять текущую оценку (величину кредита) к текущей стоимости четырехлетнего аннуитета.

$$A = \frac{6000}{\left[\frac{1}{0{,}15} - \frac{1}{0{,}15(1+0{,}15)^4}\right]} = 2101{,}58 \text{ долл. США}$$

Год	Задолженность на начало года	Величина годового платежа	Процентная составляющая	Погасительная составляющая	Остаток ссуды на конец года
1	2	3	4	5	6

Будущая стоимость аннуитета (FVA)

$$\mathrm{FVA}_{\mathrm{n}} = P * \sum_{t=1}^{n} \mathrm{FVIF}_{\mathrm{r,t}} = P * F\mathrm{VIFA}_{\mathrm{r,n}}$$

где **P –** сумма равных по величине периодических поступлений **(чистая, без %);**

PVIFAr,n – фактор будущей стоимости аннуитета (коэфф.из табл);

n – количество периодов;

t - текущий период.

$$\mathrm{FVIFA}_{\mathrm{r,n}} = \sum_{t=1}^{n} (1+r)^{t} = \frac{(1+r)^{n} - 1}{r}$$

Коэффициент **PVIFAr,n** - отражает будущую стоимость одной денежной единицы в конце срока реализации инвестиционного проекта.

Текущая стоимость аннуитета (PVA)

$$PVA_n = P * \sum_{t=1}^{n} PVIF_{r,t} = P * PVIFA_{r,n}$$

где **P –** сумма равных по величине периодических поступлений **(с %);**
PVIFAr,n – фактор будущей стоимости аннуитета (коэфф.из табл);
n – количество периодов;
t - текущий период.

$$PVIFA_{r,n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^t} = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r}$$

Коэффициент **PVIFAr,n** - характеризует текущую стоимость 1-й денежной единицы потока, регулярно поступающего в течение установленного срока с определенной нормой рентабельности **r.**

Текущая и будущая стоимость инвестиций при неравном денежном потоке

Текущая стоимость (PV)

$$PV = \frac{P_1}{1+r} + \frac{P_2}{(1+r)^2} + \ldots \frac{P_n}{(1+r)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{P_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{n} (P_t * PVIF_{r,n})$$

Будущая стоимость (FV)

$$FV = \sum_{t=1}^{n} P_t * (1+r)^t = \sum_{t=1}^{n} (P_t * FVIF_{r,n})$$

где **Pt** - денежный поток в конкретном периоде t;

r - ставка дисконтирования

Вопрос 5:

Фактор будущей и текущей стоимости в практических расчетах

Определение будущей и текущей стоимости инвестиций

При денежном потоке, состоящем из 2-х элементов:

1) Начальные инвестиции
2) Конечный доход по результатам реализации проекта

$$\mathrm{FV} = PV * (1 + r)^n = PV * \mathrm{FVIF}_{\mathrm{r,n}}$$

$$\mathrm{PV} = \frac{\mathrm{FV}}{(1+\mathrm{r})^{\mathrm{n}}} = \mathrm{FV} * \mathrm{PVIF}_{\mathrm{r,n}}$$

Пример: вложение средств на депозит без снятия % и пополнения вклада; долевое финансирование проекта без изъятия % от прибыли и т.п.

Определение будущей и текущей стоимости при равном денежном потоке (аннуитет):

Пример 1: **расчет будущей суммы средств на депозите при условии применения сложных % и возможности пополнения равными суммами**

$$\mathrm{FVA}_{n} = P * F\mathrm{VIFA}_{r,n}$$

Примечание: Р – платеж чистый без %, будущая сумма депозита FVA = первоначальная сумма + %

Пример 2: **расчет платежей по кредиту при условии применения сложных % и погашения долга равными суммами (% + тело кредита)**

$$\mathrm{PVA}_{n} = P * P\mathrm{VIFA}_{r,n}$$

Примечание: Р – платеж = гашение тела + %, текущая сумма кредита PVA – без %

Рыночная цена акции на бирже – 700 руб. Следовательно, такая цена может считаться справедливой только при более высоких темпах роста (приблизительно 8%).

На практике часто встречаются комбинации из различных денежных потоков (аннуитетов, растущих аннуитетов, денежных потоков с неравными поступлениями), которые используются для оценки финансовых (облигации, акции) и реальных активов.

Подробно модели оценки финансовых активов и инвестиционных проектов будут рассмотрены в лекциях «Модели оценки финансовых активов» и «Принятие решений по инвестиционным проектам».

6. Амортизация ссуды

Амортизация ссуды (loan amortization) – это процесс постепенного погашения кредита равными платежами. Периодичность погашения может быть месячная, квартальная или годовая. Величина ежегодного платежа включает процент и частичное погашение основной суммы. Разбивка величины ежегодного платежа на две части: процентную и погасительную называется структурой амортизируемой ссуды. Проценты начисляются не на первоначальную сумму долга, а на фактически оставшуюся задолженность на начало каждого года. Такой метод начисления процентов называется актуарным. Процентная составляющая ежегодного платежа рассчитывается домножением значения ссуды на начало каждого периода на процентную ставку. Погасительная составляющая может быть найдена как разность общей величины платежа за период и процентной составляющей.

Пример 11

Величина ссуды 6000 долларов США. Срок ссуды 4 года. Процентная ставка – 15% годовых. Ссуда погашается ежегодно равными платежами с начислением процентов на непогашенный остаток. Требуется составить план погашения ссуды.

Решение

Для расчета величины годового платежа необходимо приравнять текущую оценку (величину кредита) к текущей стоимости четырехлетнего аннуитета.

$$A = \frac{6000}{\left[\frac{1}{0{,}15} - \frac{1}{0{,}15(1+0{,}15)^4}\right]} = 2101{,}58 \text{ долл. США}$$

Год	Задолженность на начало года	Величина годового платежа	Процентная составляющая	Погасительная составляющая	Остаток ссуды на конец года
1	2	3	4	5	6
0					6000
1	6000	2101,58	900	1210,58	4798,42
2	4798,42	2101,58	719,76	1381,82	3416,6
3	3416,6	2101,58	512,49	1589,09	1827,51
4	1827,51	2101,58	274,07	1827,51	0