



МОРФИЗМЫ АЛГЕБР

Выполнил студент группы
4101 Бреус Александр

Будем рассматривать однотипные алгебры $A = \langle A; \Omega_F \rangle$ и $B = \langle B, \Omega_G \rangle$, где $\Omega_F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$, $\tau = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, m_i – число аргументов F_i ; $\Omega_G = (G_1, G_2, \dots, G_n)$, $\tau = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, m_i – число аргументов G_i . Таким образом, рассматриваем алгебры, в каждой из которых введены одинаковые числа (n) операций и для каждого i , $1 \leq i \leq n$, числа аргументов операций F_i и G_i одинаковы. Всякое отображение ϕ основного множества A в(на) основное множество B называем отображением алгебры A в(на) алгебру B .

Изоморфизмом алгебры $A = \langle A; F_1, F_2, \dots, F_n \rangle$ в (на) однотипную алгебру $B = \langle B; G_1, G_2, \dots, G_n \rangle$ называется взаимно однозначное (биективное) отображение ϕ множества A в (на) B , сохраняющее главные операции алгебры, т.е. для которого выполняются соотношения:
$$\phi(F_i(x_1, x_2, \dots, x_{m_i})) = G_i(\phi(x_1), \dots, \phi(x_{m_i})) \quad (2.1)$$
 для всех i , $1 \leq i \leq n$, и для любых $x_1, x_2, \dots, x_{m_i} \in A$. Изоморфизм алгебры на себя называется автоморфизмом.
Гомоморфизмом алгебры $A = \langle A; F_1, F_2, \dots, F_n \rangle$ в (на) однотипную алгебру $B = \langle B; G_1, G_2, \dots, G_n \rangle$ называется отображение ϕ множества A в (на) множество B , сохраняющее главные операции алгебры, т.е. для которого выполняются условия (2.1) для всех i , $1 \leq i \leq n$, и для любых $x_1, x_2, \dots, x_{m_i} \in A$.

ПРИМЕРЫ

Пусть $A = \langle (0, \infty); \times \rangle$, $B = \langle (-\infty, \infty); + \rangle$. Обе алгебры имеют тип $\tau = (2)$. Рассмотрим отображение $\phi(x) = \ln(x)$ множества $(0, \infty)$ на множество $(-\infty, \infty)$. График функции $\ln(x)$ приведён на рис. 2.1. Это отображение Рис. 2.1 $y = \ln x$ является взаимно однозначным отображением множества $(0, \infty)$ на множество $(-\infty, \infty)$. Выясним, сохраняется ли операция, т.е. будет ли произведение переходить в сумму. Имеем:

$$\phi(a \times b) = \ln(a \times b) = \ln a + \ln b = \phi(a) + \phi(b).$$

Таким образом, образ произведения равен сумме образов сомножителей. Следовательно, отображение $\phi(x) = \ln(x)$ в данном случае является изоморфизмом A на B .

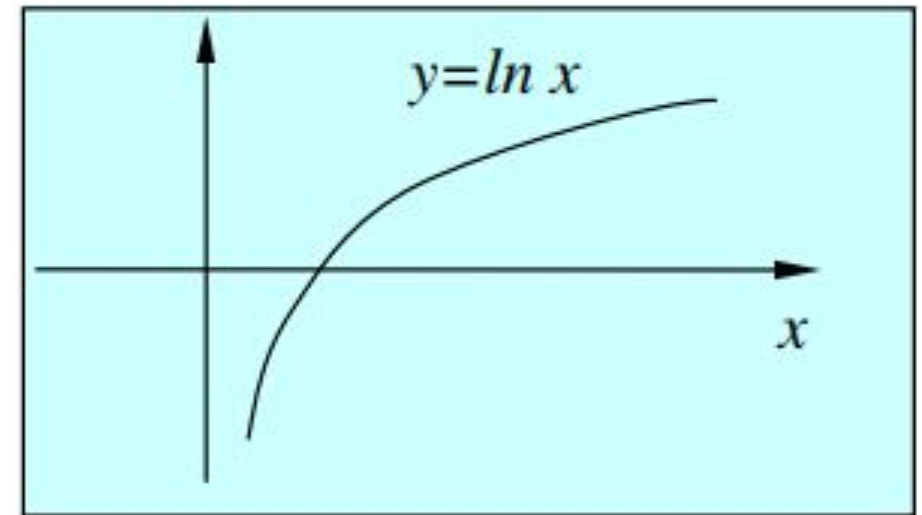


Рис. 2.1

Пусть $A = \langle (0, \infty); + \rangle$, $B = \langle (-\infty, \infty); \times \rangle$.
Введем отображение $\phi(x) = e^x$.
График функции e^x приведён на рис. 2.2. Тогда имеем:

$$\phi(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \phi(x) \cdot \phi(y).$$

Таким образом, образ суммы равен произведению образов. Следовательно, это отображение является изоморфизмом A в B , так как ϕ отображает взаимно однозначно множество $(0, \infty)$ на часть множества $(-\infty, \infty)$, ибо $e^x > 1$.

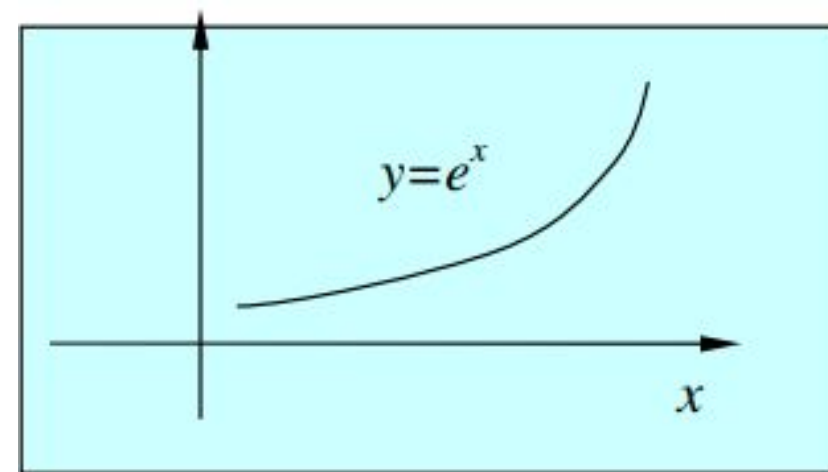


Рис. 2.2

Пусть M - множество квадратных $n \times n$ матриц действительных чисел и на M введена операция умножения матриц, т.е. имеем алгебру $A = \langle M; \times \rangle$ типа $\tau = (2)$. Положим, что $B = \langle (-\infty, \infty); \bullet \rangle$, здесь « \bullet » означает обычное умножение чисел. Введем отображение $\phi(C) = \det(C)$, когда матрице C ставится в соответствие ее определитель ($\det(C)$). Очевидно, имеем

$$\phi(C \times D) = \det(C \times D) = \det C \bullet \det D = \phi(C) \bullet \phi(D).$$

Таким образом, отображение $\phi: A \rightarrow B$ сохраняет операцию. Но это отображение не является изоморфным, так как различные матрицы могут иметь одинаковый определитель. Итак, ϕ – гомоморфизм A на B .



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ