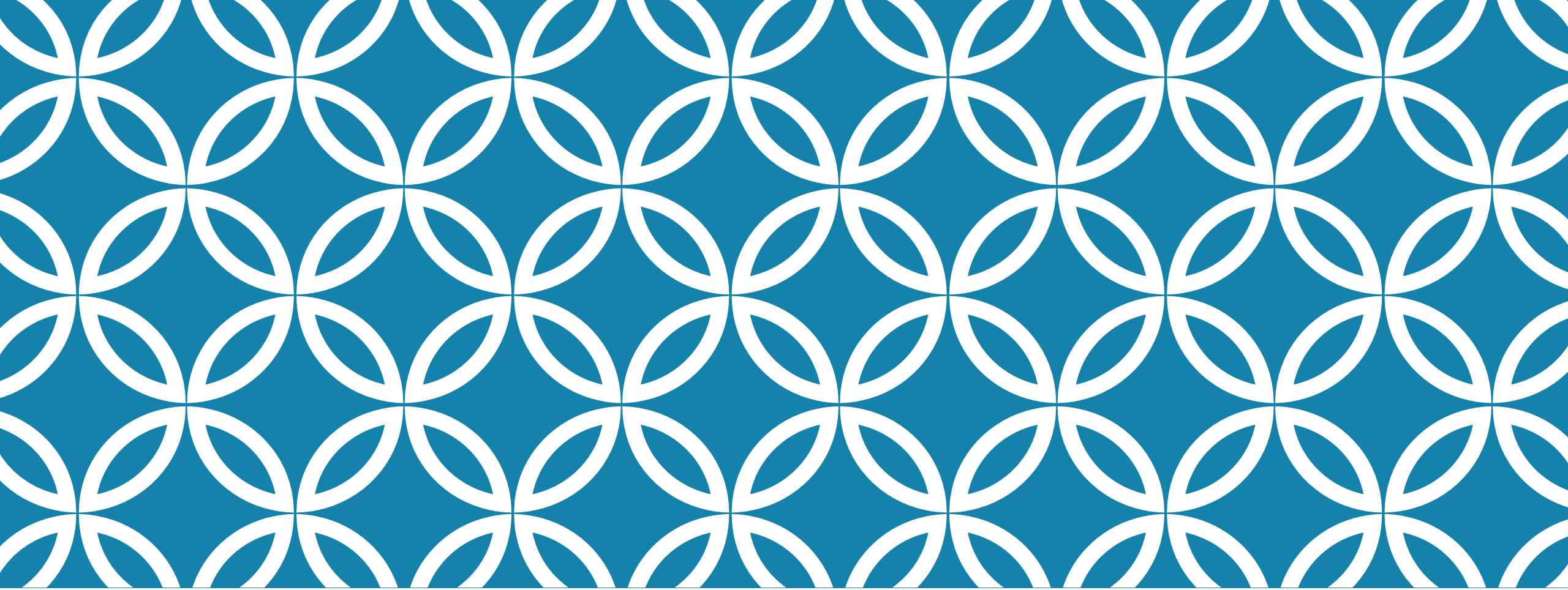

МОРФИЗМЫ АЛГЕБР

Выполнил студент группы
4101 Бреус Александр

Будем рассматривать однотипные алгебры $A = \langle A; \Omega F \rangle$ и $B = \langle B, \Omega G \rangle$, где $\Omega F = (F1, F2, \ldots, Fn)$, $\tau = (m1, m2, \ldots, mn)$, mi – число аргументов Fi ; $\Omega G = (G1, G2, \ldots, Gn)$, $\tau = (m1, m2, \ldots, mn)$, mi – число аргументов Gi . Таким образом, рассматриваем алгебры, в каждой из которых введены одинаковые числа (n) операций и для каждого i, $1 \leq i \leq n$, числа аргументов операций Fi и Gi одинаковы. Всякое отображение ϕ основного множества A в(на) основное множество B называем отображением алгебры A в(на) алгебру B.

Изоморфизмом алгебры A =⟨A; F1, F2, …, Fn⟩ в (на) однотипную алгебру B =⟨B; G1, G2, …, Gn⟩ называется взаимно однозначное (биективное) отображение ϕ множества A в(на) B, сохраняющее главные операции алгебры, т.е. для которого выполняются соотношения: ϕ(Fi(x1, x2, …, xmi))=Gi(ϕ(x1), …, ϕ(xmi)) (2.1) для всех i, 1≤ i ≤ n, и для любых x1, x2,…, xmi∈A. Изоморфизм алгебры на себя называется автоморфизмом. Гомоморфизмом алгебры A =⟨A; F1, F2, …, Fn⟩ в(на) однотипную алгебру B =⟨B; G1, G2, …, Gn⟩ называется отображение ϕ множества A в(на) множество B, сохраняющее главные операции алгебры, т.е. для которого выполняются условия (2.1) для всех i, 1≤ i ≤ n, и для любых x1, x2,…, xmi∈A.

ПРИМЕРЫ

Пусть A=⟨ (0,∞); ×⟩, B=⟨ (-∞,∞);+ ⟩. Обе алгебры имеют тип т = (2). Рассмотрим отображение ϕ(x) = ln(x) множества (0,∞) на множество (-∞,∞). График функции ln(x) приведён на рис. 2.1. Это отображение Рис. 2.1 y=ln x x 35 является взаимно однозначным отображением множества (0,∞) на множество (-∞,∞). Выясним, сохраняется ли операция, т.е. будет ли произведение переходить в сумму. Имеем:

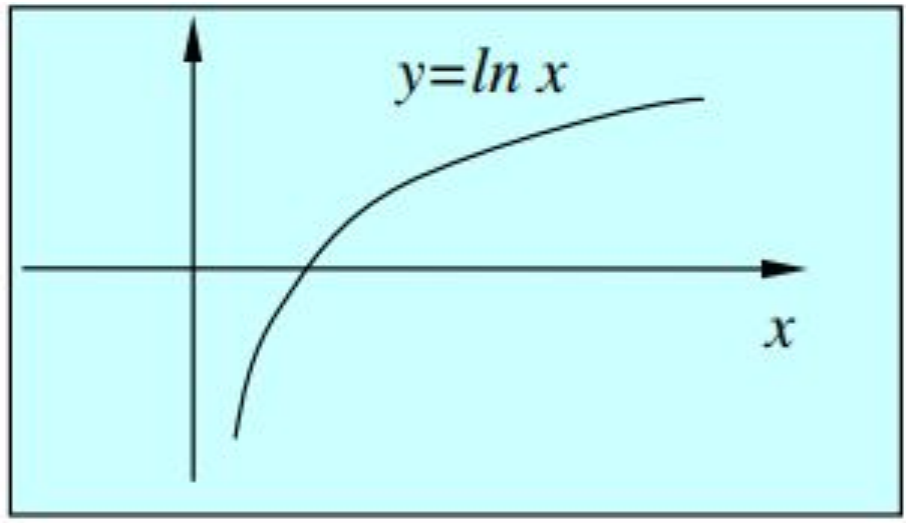

Рис. 2.1

ϕ(a×b)=ln(a×b)=ln a+ln b=ϕ(a)+ϕ(b).

Таким образом, образ произведения равен сумме образов сомножителей. Следовательно, отображение ϕ(x)=ln(x) в данном случае является изоморфизмом A на B.

Пусть A =⟨ (0,∞); + ⟩, B=⟨ (-∞,∞); ×⟩. Введем отображение ϕ(x)=e x . График функции e x приведён на рис. 2.2. Тогда имеем:

ϕ(x+y) = e x+y = e x · e y = ϕ(x) · ϕ(y).

Таким образом, образ суммы равен произведению образов. Следовательно, это отображение является изоморфизмом A в B, так как ϕ отображает взаимно однозначно множество (0,∞) на часть множества (-∞,∞), ибо e x >1 .

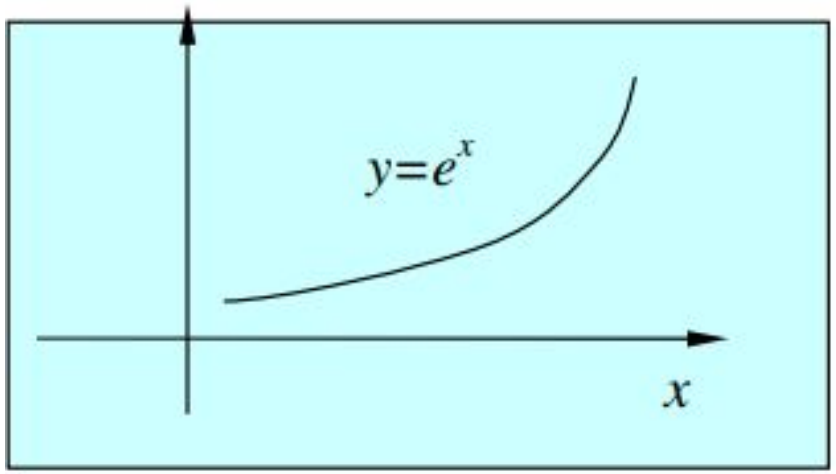

Рис. 2.2

Пусть M - множество квадратных n×n матриц действительных чисел и на M введена операция умножения матриц, т.е. имеем алгебру A =⟨M; ×⟩ типа τ = (2). Положим, что B =⟨ (-∞,∞);•⟩, здесь «•» означает обычное умножение чисел. Введем отображение ϕ (C)=det(C), когда матрице C ставится в соответствие ее определитель (det(C)). Очевидно, имеем

$$\phi(C\times D)= \det(C\times D)= \det C\bullet \det D= \phi(C)\bullet \phi(D).$$

Таким образом, отображение ϕ: A → B сохраняет операцию. Но это отображение не является изоморфным, так как различные матрицы могут иметь одинаковый определитель. Итак, ϕ – гомоморфизм A на B.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ