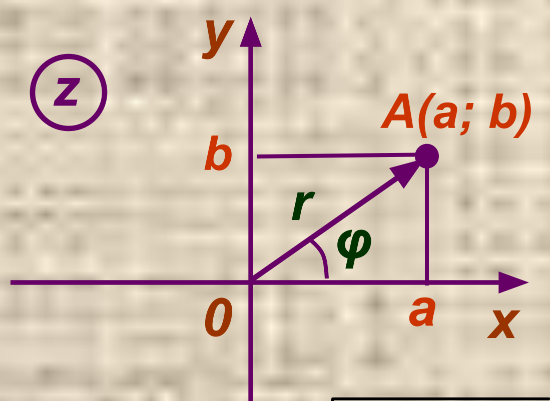
Комплексные числа

- Тригонометрическая форма записи комплексных чисел
- Действия над комплексными числами
- Показательная форма комплексного числа

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

Обозначим через r модуль вектора $\overline{OA}$, через φ угол между вектором $\overline{OA}$ и положительным направлением оси OX.



Тогда имеют место равенства:

$$a = r\cos\varphi; \qquad b = r\sin\varphi$$

Следовательно, комплексное число Z можно представить в виде:

$$a + i \cdot b = r\cos\varphi + i \cdot r\sin\varphi$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

Аргумент комплексного числа

$$\varphi = \arg z = arctg\,\frac{b}{a}$$

Аргумент комплексного числа Z считается положительным, если он отсчитывается от положительного направления оси OX против часовой стрелки. Очевидно, что φ определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi k \quad k \in Z.$

Действия над комплексными числами

Если комплексные числа заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

тогда произведение находится по формуле:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))}$$

Произведение сопряженных комплексных чисел:

$$z \cdot \bar{z} = (a + i \cdot b) \cdot (a - i \cdot b) = a^2 - (i \cdot b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2}$$

Действия над комплексными числами

Если комплексные числа заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))}$$

Действия над комплексными числами

<u>*Возведение в степень комплексного числа*</u>.

При возведении комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в целую положительную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени (формула Муавра)

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

<u>*Извлечение корня из комплексного числа*</u>.

Корень n – ой степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ находится по формуле:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)}$$

Арифметическое значение корня из положительного числа r

Действия над комплексными числами

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)}$$

Придавая k значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$, получим n различных значений корня.

Для других значений k аргументы будут отличаться от полученных на число, кратное 2π, и , следовательно будут получаться значения корня, совпадающие с рассмотренными.

Итак, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Корень n – ой степени из действительного числа также имеет n значений, так как действительное число – частный случай комплексного числа и может быть представлено в тригонометрической форме:

$$A = |A|(\cos 0 + i\sin 0) \quad (A > 0)$$

$$A = |A|(\cos\pi + i\sin\pi) \quad (A < 0)$$

Действия над комплексными числами

Найти все значения кубического корня из единицы

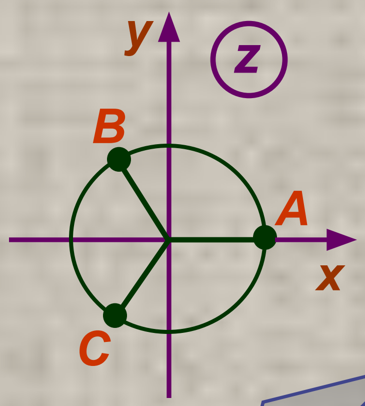
$$1 = \cos 0 + i \sin 0 \qquad (r = 1; \quad \varphi = 0)$$

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{3} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

$$k = 0 \qquad \sqrt[3]{1} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$k = 1 \qquad \sqrt[3]{1} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2 \qquad \sqrt[3]{1} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



Показательная форма комплексного числа

Пусть $z = x + i \cdot y.$ Если x и y – действительные переменные, то z называется комплексной переменной.

Рассмотрим показательную функцию от комплексной переменной z.

$$w = e^{z} \quad \text{или} \quad w = e^{x+i\cdot y}$$

Комплексные значения функции w определяются по формуле:

$$\boxed{e^{x+i\cdot y} = e^{x}(\cos y + i \cdot \sin y)} \quad (1)$$

Пример: $z = 2 + i \cdot \dfrac{\pi}{4}$

$$e^{2+i\cdot\frac{\pi}{4}} = e^{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^{2}\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{e^{2}\sqrt{2}}{2}$$

Показательная форма комплексного числа

Если в формуле *(1)* положим *x = 0*, то получим:

$$\boxed{e^{i\cdot y} = \cos y + i\cdot\sin y} \quad (2)$$

Эта формула называется ***формулой Эйлера***, выражающая показательную функцию с мнимым показателем через тригонометрические функции.

Заменим в формуле *(2)* *y* на *– y*:

$$e^{-i\cdot y} = \cos(-y) + i\cdot\sin(-y) \Rightarrow e^{-i\cdot y} = \cos y - i\cdot\sin y \quad (3)$$

Складывая и вычитая равенства *(2)* и *(3)* получим :

$$\boxed{\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}}$$

Показательная форма комплексного числа

Представим комплексное число **z** в тригонометрической форме::

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

По формуле Эйлера: $\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi = e^{i\varphi}$

Следовательно, всякое комплексное число можно представить в ***показательной форме***:

$$\boxed{z = r\cdot e^{i\varphi}}$$

Действия над комплексными числами в показательной форме:

Пусть имеем: $z_1 = r_1\cdot e^{i\varphi_1};\quad z_2 = r_2\cdot e^{i\varphi_2}.$ Тогда:

$$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};\qquad z^n = r^n\cdot e^{i\varphi n};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};\qquad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}.$$

Извлекать квадратные корни из комплексных чисел можно и в алгебраической форме.

Рассмотрим пример $z^2 = 3 - 4i$.

Будем искать корни в виде $x + iy$.

Имеем: $3 - 4i = (x + iy)^2$; $3 - 4i = x^2 + 2ixy + y^2 i^2$; $3 - 4i = x^2 - y^2 + 2xy \cdot i$.

Из условия равенства двух комплексных чисел следует, что $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4. \end{cases}$

Эта система имеет два решения $(2;-1)$ и $(-2;1)$. Значит $z_1 = 2 - i, z_2 = -2 + i$.

Решите уравнения:

$$z^2 + i = 0. \qquad z^4 - 64 = 0 \qquad z^3 - 1 = 0$$