Уральский федеральный университет

Свойства пределов

Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} {}^{f(x)}/_{g(x)} = {}^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} \Big/ {}_{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ (при $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$).

Замечательные пределы, эквивалентные функции

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Бесконечно малые в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$

называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Обозначают: $f(x) \sim g(x)$.

При вычислении пределов функцию можно заменять на эквивалентную (если эта функция является множителем, а не слагаемым).

Примеры эквивалентных функций (в точке $x_0 = 0$)

$$\sin x \sim x \qquad e^x - 1 \sim x$$

$$\operatorname{tg} x \sim x \qquad a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \qquad \ln(1 + x) \sim x$$

$$\arcsin x \sim x \qquad \log_a(1 + x) \sim \frac{x}{\ln a}$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x \qquad (1 + x)^k - 1 \sim k \cdot x$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Свойства пределов

Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} {}^{f(x)}\!/_{g(x)} = {}^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}\Big/_{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ (при $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$).

Свойства пределов

Если существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} {}^{f(x)}\!/_{g(x)} = {}^{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}\!\Big/_{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ (при $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$).

Исследование функции

проводится по следующей схеме

1. Область определения функции $D(f)$.

   Множество значений функции $E(f)$.

2. Четность, нечетность, периодичность

$f(x)$ – четная $\Leftrightarrow \forall x, (-x) \in D(f) \quad f(-x) = f(x)$

(график симметричен относительно оси Oy)

$f(x)$ – нечетная $\Leftrightarrow \forall x, (-x) \in D(f) \quad f(-x) = -f(x)$

(график симметричен относительно начала координат)

Если ни одно условие не выполняется, то

$f(x)$ – функция общего вида.

$f(x)$ – периодическая с периодом $T \Leftrightarrow$

$\forall x, (x-T), (x+T) \in D(f) \quad f(x) = f(x-T) = f(x+T)$

(определяется только для тригонометрических функций)

3. Точки пересечения графика с осями координат

Пересечение с Oy существует, если $x = 0 \in D(f)$, точка пересечения $(0, f(0))$

(график пересекает Oy не более чем в одной точке).

Пересечение с Ox определяется в результате решения уравнения: $f(x) = 0$.

Свойства пределов

Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} {}^{f(x)}\!/_{g(x)} = {}^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}\Big/_{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ (при $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$).

Свойства пределов

Если существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} {}^{f(x)}/_{g(x)} = {}^{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}\Big/_{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ (при $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$).

Свойства пределов

Если существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} {}^{f(x)}\!/_{g(x)} = {}^{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}\Big/_{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ (при $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$).

Свойства пределов

Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} {}^{f(x)}\!/_{g(x)} = {}^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}\Big/_{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ (при $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$).

- Свойства пределов

Если существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то

1) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} {}^{f(x)}\!/\!{}_{g(x)} = {}^{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}\Big/{}_{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ (при $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$).