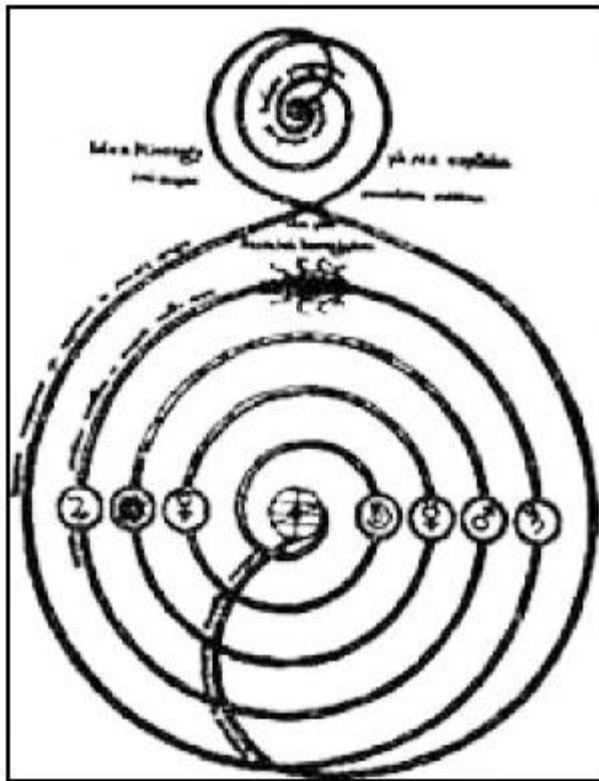


Атрактори.

Атрактор (від англ. *attract* - притягувати) — множина станів (точок фазового простору) динамічної системи, до якої вона прямує з часом.

Атрактор (філософ.) —
найменша множина, до
якої все прямує.



Нехай у фазовому просторі R^n існує деяка область G_1 що містить підобласть G_0 . Області G_1 та G_0 задовільняють наступним вимогам:

- ✓ для довільних початкових умов $x_i(0) \in G_1$ при $t \rightarrow \infty$ всі фазові траєкторії досягають G_0
- ✓ область G_0 є мінімальною компактною підмножиною фазового простору
- ✓ якщо фазова траєкторія у якийсь момент часу належить G_0 , то вона йому належить в усі наступні моменти часу

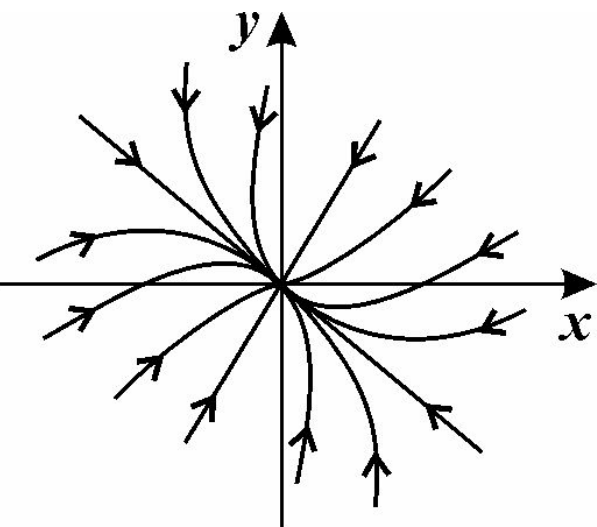
G_0 називається атрактором динамічної системи,
а G_1 – областю (басейном) його притягування:

**Іллюстрація з книги XVII ст.
«Едип Єгипетський»
Атанасіуса Кірхера**

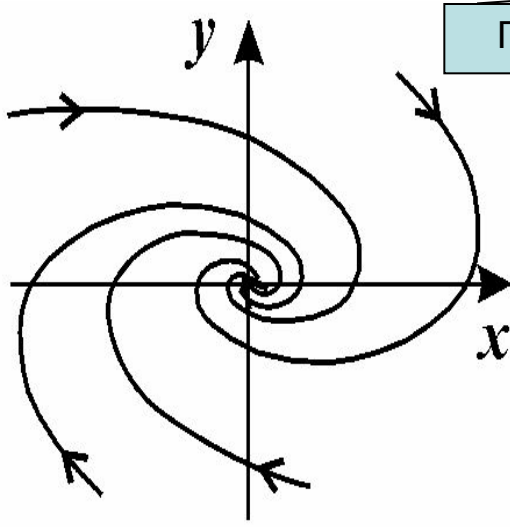
Регулярні атрактори.

Точка тяжіння ($N \geq 1$).

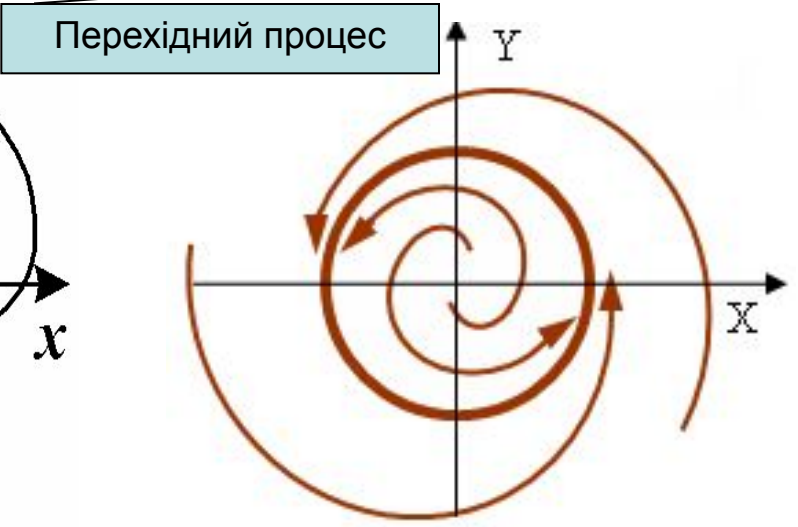
Граничний цикл ($N \geq 2$).



Стійкий вузол

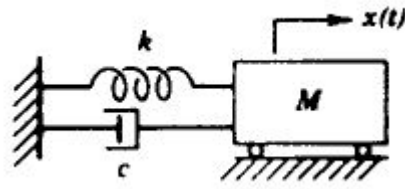


Стійкий фокус



граничний цикл.

Регулярні атрактори є асимптотично стійкими та мають цілочисельну розмірність, що співпадає з метричною.



Періодичні коливання у лінійних системах із затуханням є вимушеними.

$$m\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t$$

$$\gamma = \frac{c}{2m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Omega \rightarrow \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} - \text{резонанс}$$

Нелінійні системи.

З фізичної точки зору зростання будь-якого параметра системи не може відбуватись до безмежності. Обмеженість енергетичних ресурсів рано чи пізно змусить це зростання зупинитись.

$$f(x) = kx - bx^3$$

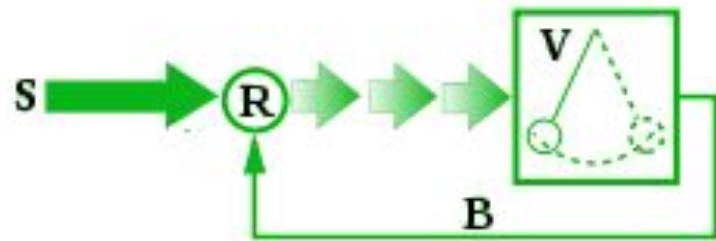
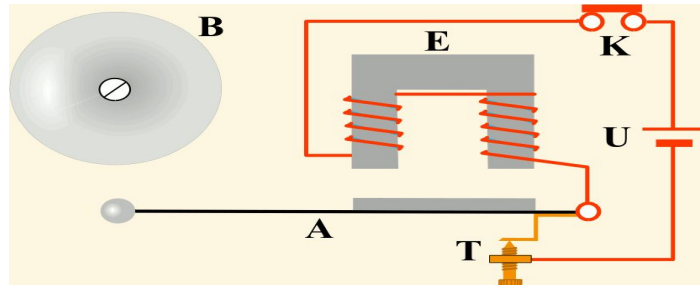
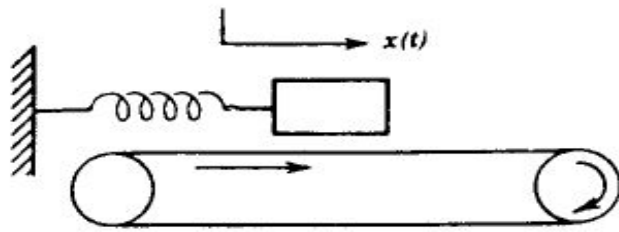
$$\text{для } x \ll 1 \quad kx \gg bx^3 \quad \text{отож} \quad f(x) \cong kx$$

Нехай $f(x)$ описує деяке збудження системи. Спочатку воно лінійно наростає, а потім швидко спадає до нуля. Якщо до збудження система була у стійкому рівноважному стані, то з часом вона до нього знову релаксує.

Якщо ж стартова точка системи є станом нестійкої рівноваги, то після збудження і слідуючого за ним повернення у початковий окіл рівноваги нестійкість знову почне викидати траєкторію за межі околу. Отож саме за рахунок нелінійності та нестійкості у системі реалізується режим періодичних коливань.

У системах з одним ступенем вільності (двовимірний ФП) в силу єдиності розв'язку коливальний режим може реалізовуватись виключно на граничному циклі.

Автоколивання.



Від'ємне тертя – джерело енергії

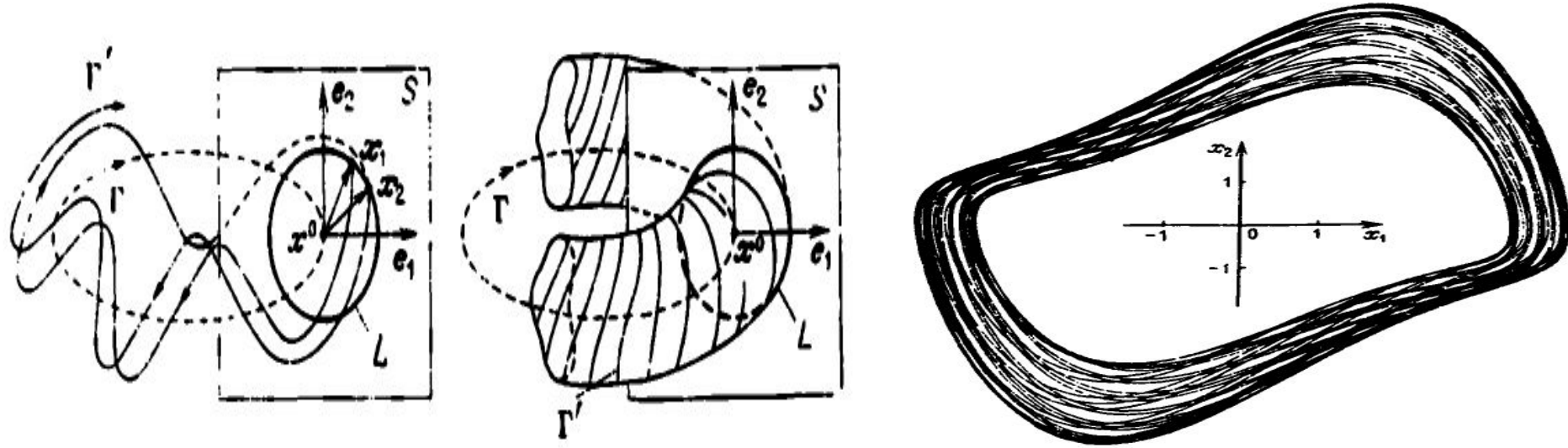
$$m\ddot{x} - \mu(1 - x^2) + x = 0$$

Зворотній зв'язок – нелінійне затування

Більш складною є задача з вимушеною періодичною силою. Наприклад, у системі Ван дер Поля:

$$m\ddot{x} - \mu(1 - \beta x^2) + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega_1 t$$

При зростанні $\omega_0 - \omega_1$ захоплений періодичний розв'язок стає нестійким і за умови ірраціонального співвідношення між цими частотами з'являється новий тип руху – комбінаційні коливання, що отримали назву квазіперіодичних.



хАос і ХаОс

Випадкові рухи – умови і причини, що рух викликають є невідомими.

Хаотичні рухи – детеремінізовні задачі із заданими силами та параметрами.

Нелінійне диференціальне рівняння може мати обмежений неперіодичний розв'язок з хаотичною поведінкою навіть за умови, що рівняння не містить випадкових параметрів.

Джерелом хаосу є сильна нелінійність

Хаотична динаміка розвивається в рамках певної структури

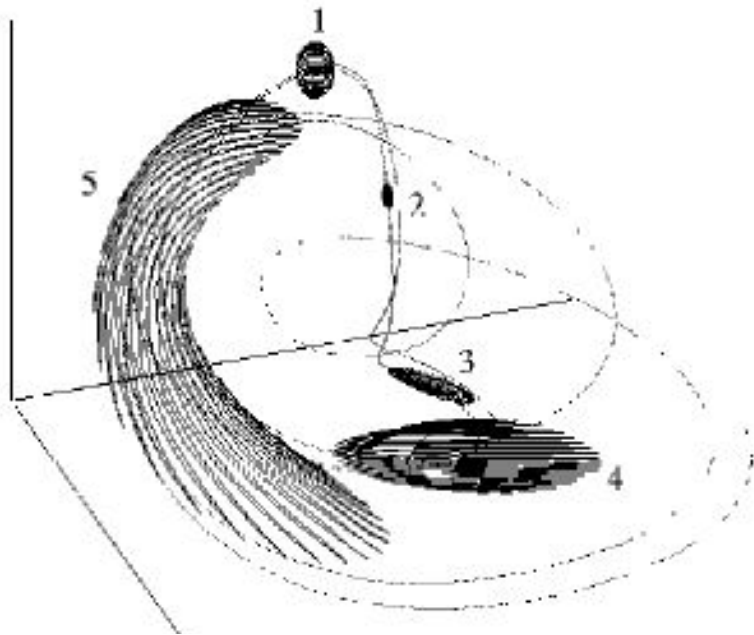
ДИВНІ (нерегулярні, хаотичні) атрактори ($N \geq 3$).

Тип руху	Атрактор
Рівновага	Точка
Періодичний	Граничний цикл
Квазіперіодичний	Поверхня (тор)
ХАОС	???

Перемішування.

Нестійкість експоненціально збільшує початкове збурення системи системи. У той же час через втрати енергії фазовий об'єм нелінійних дисипативних систем з часом прямує до нуля. Де компроміс ???

Фазовий об'єм в нелінійних дисипативних системах може збільшуватися в одних напрямках і одночасно зменшуватися в інших з превалюванням (у середньому) останніх.

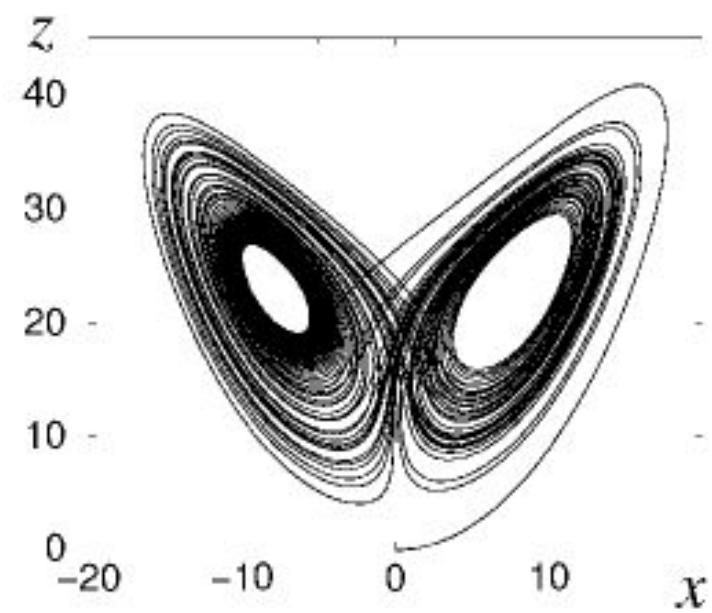
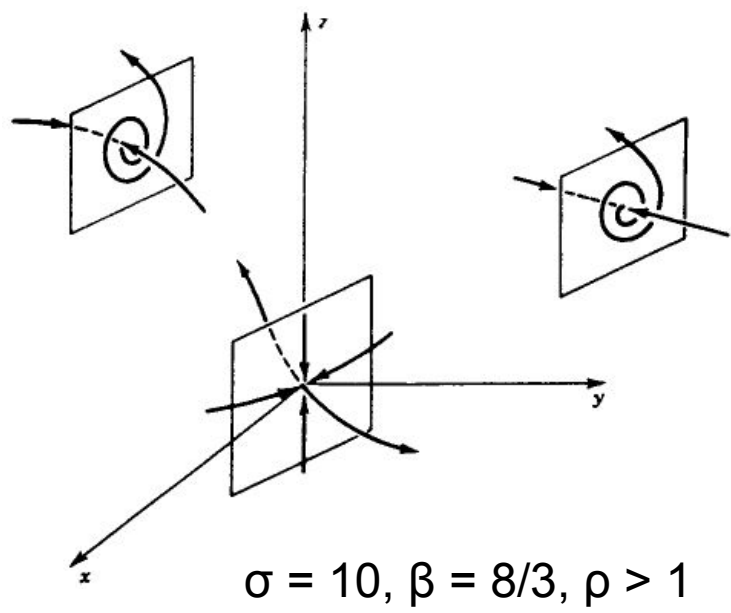
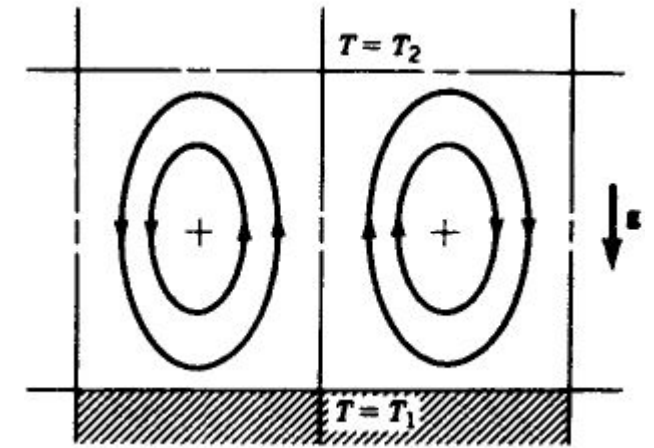


Атрактор Лоренца

В силу теореми про єдиність розв'язку фазові траєкторії перетинатись не можуть (що є головним інструментом доведення теореми Бендиксона-Пуанкаре про двохвимірний фазовий простір).

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

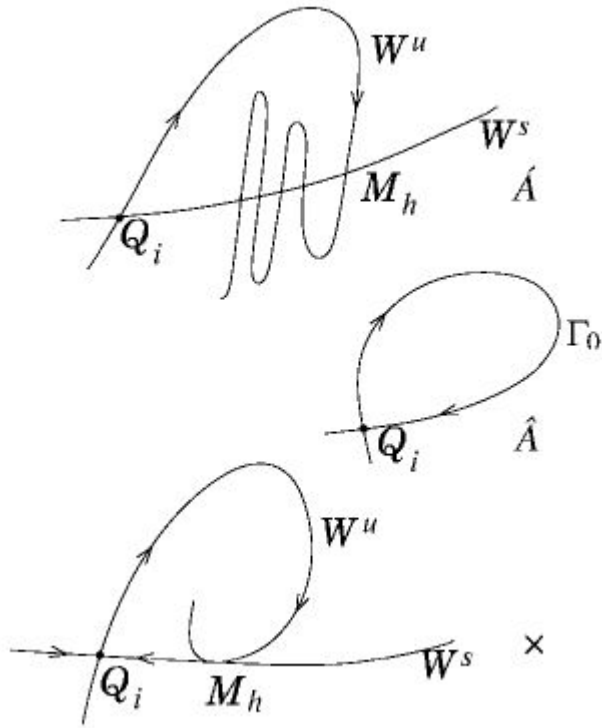
Система Лоренца.
 σ – число Прандтля,
 ρ – параметр Релея,
 β – описує геометрію системи.



Дивний атрактор є математичним образом “ідеального” хаосу, який задовільняє певним математичним вимогам, але в реальних умовах практично не реалізується. У більшості практичних випадків реалізується режим квазігіперболічного атрактора (квазіатактора).

Система називається грубою, якщо мале збурення правої частини рівняння і варіації керуючих параметрів якісно не змінюють її фазовий портрет.

Система називається гіперболічною, якщо всі фазові траєкторії є сідловими.

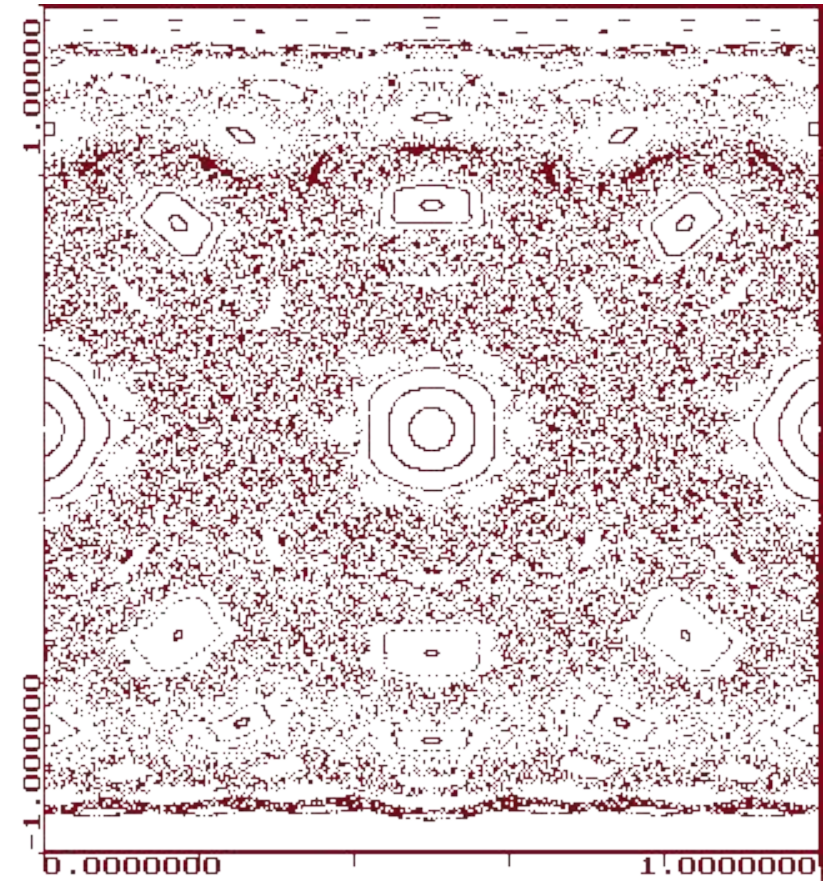
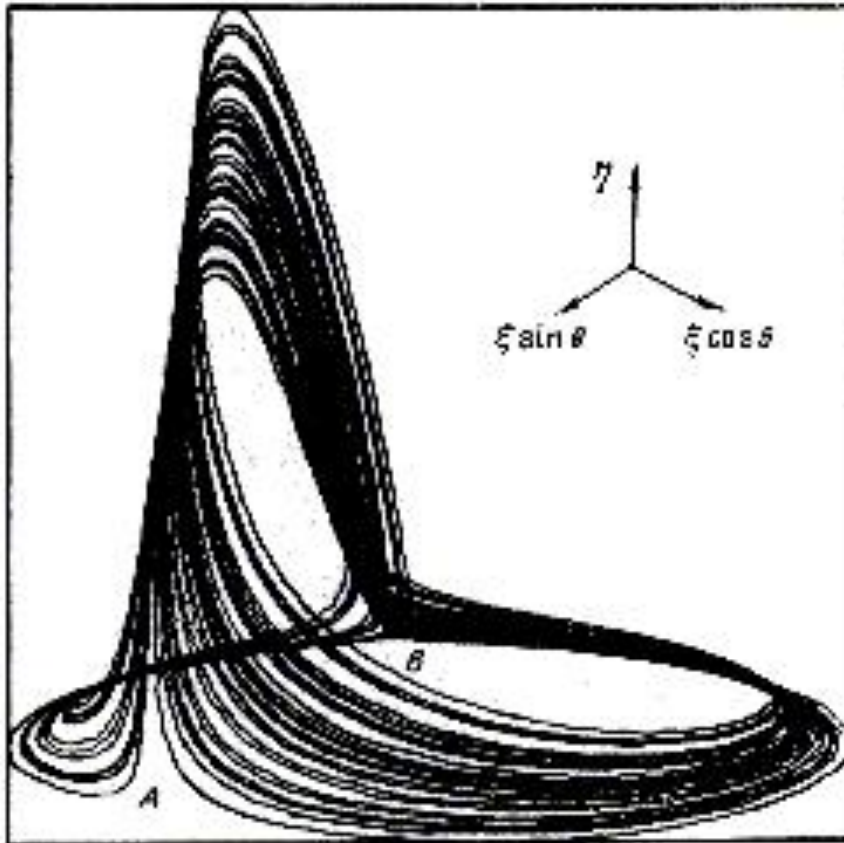


Можливі перетини стійкої та нестійкої сепаратрис сідлової точки на січенні Пуанкаре.



Фрактальна природа дивних атракторів

Динамічний хаос має фрактальну будову.



Порядок Шарковського

Яким показником оцінювати складність динамічної системи?

$$x_{n+1} = f(x_n, k)$$

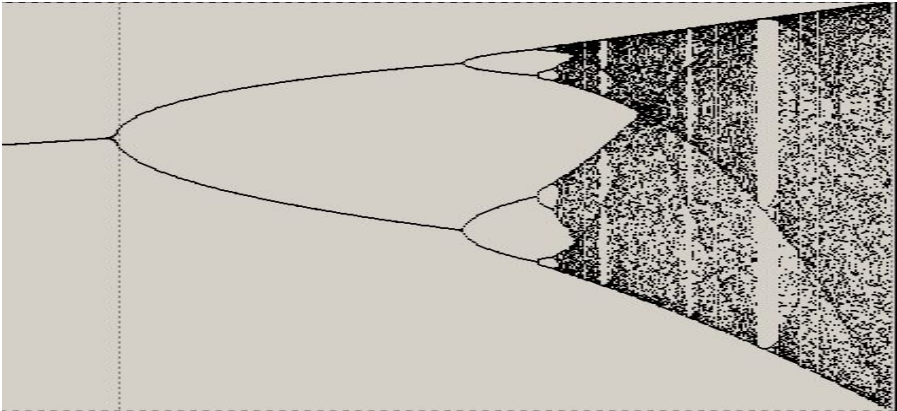
$$при\ n\ f(x_n) \neq x_n - \text{го порядку} \qquad 1 -$$

$$при\ n+2\ f(f(x_n)) = x_n - \qquad 2 -$$

$$при\ n+k\ f(\underbrace{f \circ \dots \circ f}_k(x_n)) = x_n - \qquad -$$

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$$

- 3 < 5 < 7 < 9 < ...
- 2*3 < 2*5 < 2*7 ...
- 2²*3 < 2²*5 < 2²*7 < ...
- 2³*3 < 2³*5 < 2³*7 ...
- ...
- 2ⁿ < 2ⁿ⁻¹ ... < 2 < 1



Література.

1. Анищенко В.С. Знакомство с нелинейной динамикой: Лекции соросовского профессора: Учеб. пособие. Москва-Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2002, 144 с.
2. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 312 с.