

**Численное решение  
дифференциальных уравнений  
модифицированным методом  
ломанных Эйлера с  
использованием редактора  
электронных таблиц MS Excel**

Свирина Анастасия Олеговна, методист ИМЦ

Большинство физических, химических, экономических и прочих процессов описываются дифференциальными уравнениями или системами дифференциальных уравнений. Возникает необходимость получения результатов их решения. И не всегда есть возможность получить точный ответ аналитическим способом.

Поэтому требуются навыки в решении ДУ с использованием численных методов. Один из таких методов – метод ломаных Эйлера. Рассмотрим решение дифференциального уравнения усовершенствованным методом ломаных Эйлера, который имеет большую точность расчетов.



Дано:

Начальные условия:

## Создание таблицы

Даем название столбцам таблицы в соответствии с алгоритмом для решения ДУ аналитически.

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following table structure:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i, y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i))$	$\Delta y_i$	
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									

Длина отрезка равна единице, а шаг разбиения – 0,05. Количество узловых точек – 21. Записываем в таблицу.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	$\Delta y_i$	
1									
2	0								
3	1								
4	2								
5	3								
6	4								
7	5								
8	6								
9	7								
10	8								
11	9								
12	10								
13	11								
14	12								
15	13								
16	14								
17	15								
18	16								
19	17								
20	18								
21	19								
22	20								
23									

- Значение  $x_n = 1$ , а соответствующее ему значение  $y_n = 2$ .

Скриншот интерфейса Microsoft Excel с таблицей для вычисления значений  $x_i$  и  $y_i$  по заданным формулам. В строке 2 выделены значения  $x_1 = 1$  и  $y_1 = 2$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	$\Delta y_i$	
1									
2	0	1	2						
3	1								
4	2								
5	3								
6	4								
7	5								
8	6								
9	7								
10	8								
11	9								
12	10								
13	11								
14	12								
15	13								
16	14								
17	15								
18	16								
19	17								
20	18								
21	19								
22	20								
23									



Рассчитываем координаты  $x_i$ . Их значение находится по формуле:  $x_i + h$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i, y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i))$	$\Delta y_i$	
1									
2	0	1	2						
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

# Находим первый аргумент «внешней функции».

Скриншот интерфейса Microsoft Excel. В строке формул введена формула  $=B2+(0,05/2)$ . Таблица содержит следующие данные:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2}f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2}f(x_i; y_i))$	$\Delta y_i$	
1									
2	0	1	2	1,025					
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									



- Следующим шагом находим значение функции в точке  $y_0$

Экран Excel с формулой в ячейке E2:  $= (B2+5) - ((4*C2)/B2)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	$\Delta y_i$	
1									
2	0	1	2	1,025	-2				
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							

- После чего можно рассчитать второй аргумент «внешней функции». Он находится по формуле:  $y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0; y_0)$

Скриншот интерфейса Microsoft Excel, демонстрирующий расчет второго аргумента «внешней функции».

Формула в ячейке F2:  $=C2+((0,05/2)*E2)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	$\Delta y_i$	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95			
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							

# Ищем значение функции в точке, рассчитанной с учетом погрешности.

ФАЙЛ ГЛАВНАЯ ВСТАВКА РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ ФОРМУЛЫ ДАННЫЕ РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ ВИД

Вставить Шрифт Выравнивание Число

Общий

Условное форматирование

Г2  $\text{fx}$   $= (D2+5) - ((4 * F2) / D2)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	$\Delta y_i$	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098		
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

Полученный результат умножаем на шаг разбиения.

Скриншот интерфейса Microsoft Excel с панелью инструментов и таблицей данных.

Панель инструментов: ФАЙЛ, ГЛАВНАЯ, ВСТАВКА, РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ, ФОРМУЛЫ, ДАННЫЕ, РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ, ВИД.

Буфер обмена: Вставить, Буфер обмена.

Шрифт: Calibri, 11, A<sup>+</sup>, A<sup>-</sup>, Ж, К, Ч, Шрифт.

Выравнивание: Перенести текст, Объединить и поместить в центре, Выравнивание.

Число: Общий, %, 000, 0,00, 0,0, Число.

Условное форматирование, Форматирование, Стили.

Формула в ячейке H2:  $=G2*0,05$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	$\Delta y_i$	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

- Осуществляем поиск следующего значения  $y$ . Делается это по формуле:  $y_{i(n)} = y_{i(n)-1} + \Delta y_{i(n)-1}$

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following data in the spreadsheet:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	$\Delta y_i$	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05	1,920762195						
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									
24									

Копируем полученные значения по образцу. (Выделяем значения полей D, E, F, G, H и «растягиваем» на одну строку вниз)

ФАЙЛ ГЛАВНАЯ ВСТАВКА РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ ФОРМУЛЫ ДАННЫЕ РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ ВИД

Вставить Буфер обмена Шрифт Выравнивание Число Стили

Calibri 11 Перенести текст Общий

Ж К Ч Объединить и поместить в центре % 000 0,00 0,00

Условное форматирование Форма как та

Стили

D2 : X ✓ fx =B2+(0,05/2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	$\Delta y_i$	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05	1,920762195						
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									



(Выделяем значения полей C, D, E, F, G, H и «растягиваем» до конца таблицы)

Файл    ГЛАВНАЯ    ВСТАВКА    РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ    ФОРМУЛЫ    ДАННЫЕ    РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ    ВИД

Вставить    Буфер обмена    Шрифт    Выравнивание    Число    Условное форматирование    Форматирование как стили

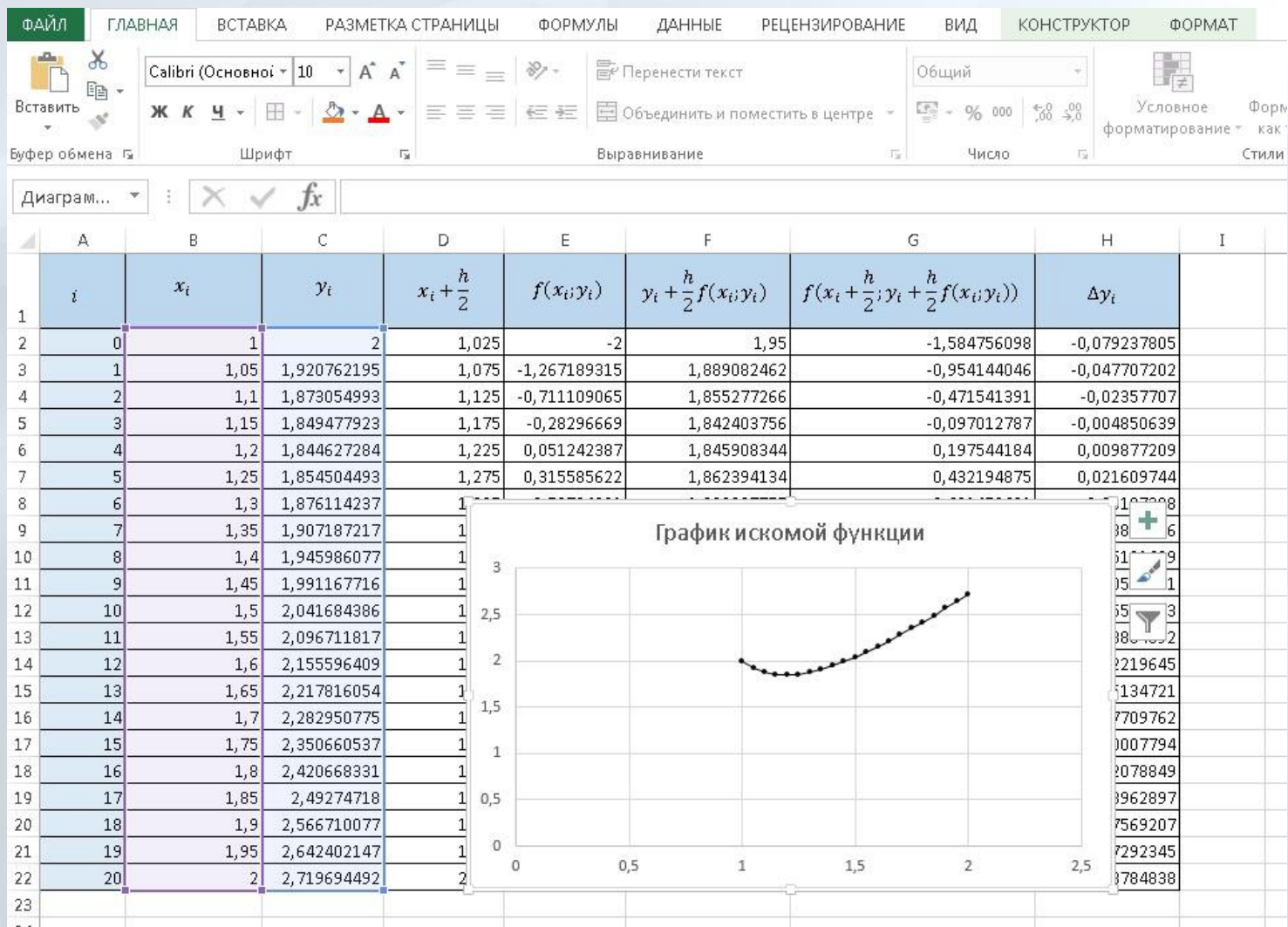
С3     $\times$      $\checkmark$      $fx$     =C2+H2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	$\Delta y_i$	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05	1,920762195	1,075	-1,267189315	1,889082462	-0,954144046	-0,047707202	
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

# Искомое приближенное решение:

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	$\Delta y_i$	
1	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805
2	1	1,05	1,920762195	1,075	-1,267189315	1,889082462	-0,954144046	-0,047707202
3	2	1,1	1,873054993	1,125	-0,711109065	1,855277266	-0,471541391	-0,02357707
4	3	1,15	1,849477923	1,175	-0,28296669	1,842403756	-0,097012787	-0,004850639
5	4	1,2	1,844627284	1,225	0,051242387	1,845908344	0,197544184	0,009877209
6	5	1,25	1,854504493	1,275	0,315585622	1,862394134	0,432194875	0,021609744
7	6	1,3	1,876114237	1,325	0,52734081	1,889297757	0,621459601	0,03107298
8	7	1,35	1,907187217	1,375	0,699074913	1,92466409	0,775977193	0,03879886
9	8	1,4	1,945986077	1,425	0,840039781	1,966987071	0,903632783	0,045181639
10	9	1,45	1,991167716	1,475	0,957123543	2,015095804	1,010333412	0,050516671
11	10	1,5	2,041684386	1,525	1,055508303	2,068072094	1,100548606	0,05502743
12	11	1,55	2,096711817	1,575	1,139130796	2,125190087	1,177691844	0,058884592
13	12	1,6	2,155596409	1,625	1,211008978	2,185871633	1,244392903	0,062219645
14	13	1,65	2,217816054	1,675	1,273476233	2,24965296	1,302694424	0,065134721
15	14	1,7	2,282950775	1,725	1,328351117	2,316159553	1,354195239	0,067709762
16	15	1,75	2,350660537	1,775	1,377061629	2,385087078	1,400155881	0,070007794
17	16	1,8	2,420668331	1,825	1,420737042	2,456186757	1,44157697	0,072078849
18	17	1,85	2,49274718	1,875	1,460276368	2,529254089	1,479257944	0,073962897
19	18	1,9	2,566710077	1,925	1,496399838	2,604120073	1,513841407	0,07569207
20	19	1,95	2,642402147	1,975	1,529687903	2,680644345	1,545846897	0,077292345
21	20	2	<b>2,719694492</b>	2,025	1,560611016	2,758709767	1,575696756	0,078784838
22								
23								
24								

- Строим график. Выделяем пары значений  $x$  и  $y$ , далее «Вставка» → «Диаграммы» → «Точечная с прямыми отрезками и маркерами».



При решении данного ДУ аналитически результат будет равен — **2,71875**.

Вывод: усовершенствованный метод ломаных Эйлера дает более точные результаты в отличие от «классического» метода. Связано это с тем, что производная берется не в начале шага, а как промежуточное или среднее на разных участках одного шага. В процессе использования метода вычисляются несколько производных в разных частях шага, которые впоследствии усредняются. За счет этого точность метода возрастает на порядок.

## Список литературы

1. Эльсгольц Л.Э. «Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление» (61 стр.), 1979г.
2. Демидович Б.П. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу», 1995г.
3. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. «Дифференциальные уравнения» (31 стр.), 1985г.