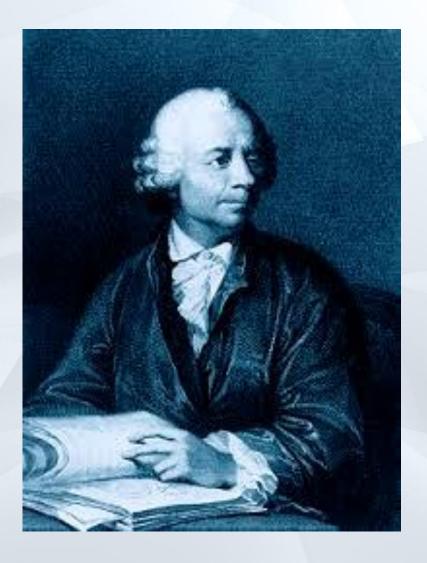


Численное решение дифференциальных уравнений модифицированным методом ломаных Эйлера с использованием редактора электронных таблиц MS Excel

Свирина Анастасия Олеговна, методист ИМЦ

Большинство физических, химических, экономических и прочих процессов описываются дифференциальными уравнениями или системами дифференциальных уравнений. Возникает необходимость получения результатов их решения. И не всегда есть возможность получить точный ответ аналитическим способом. Поэтому требуются навыки в решении ДУ с использованием численных методов. Один из таких методов – метод ломаных Эйлера. Рассмотрим решение дифференциального уравнения усовершенствованным методом ломаных Эйлера, который имеет большую точность расчетов.



Дано:

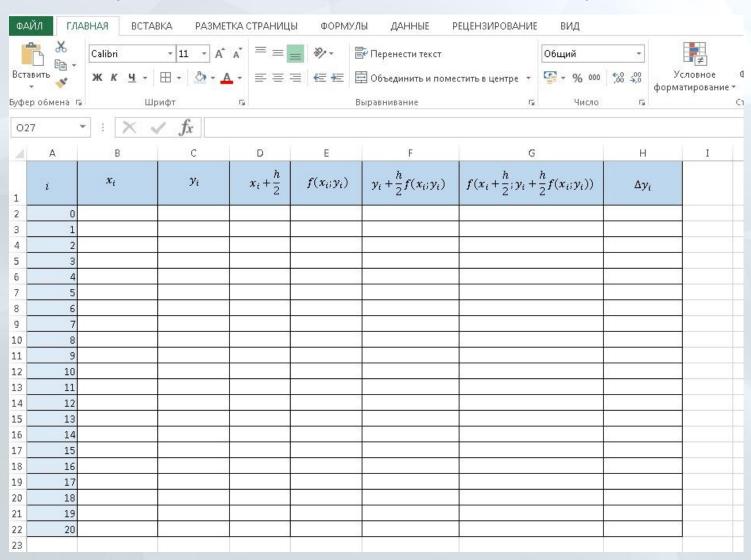
Начальные условия:

Создание таблицы

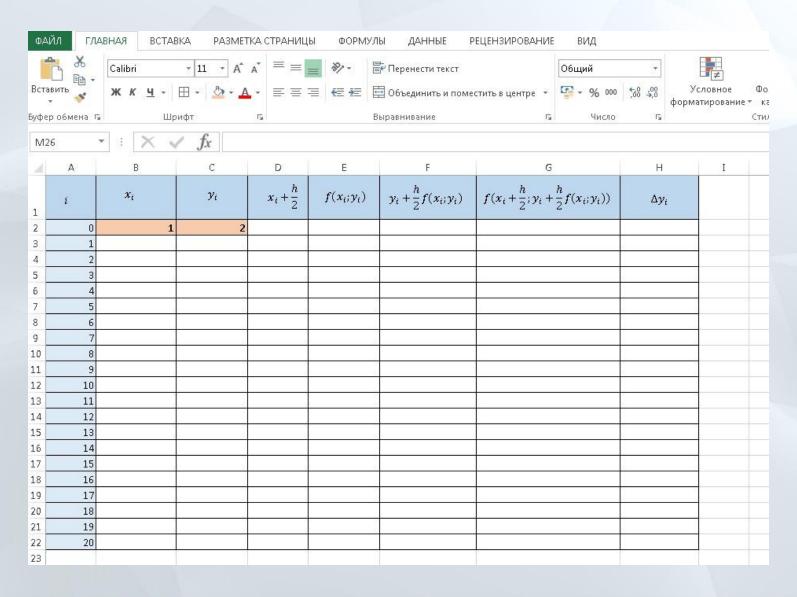
Даем название столбцам таблицы в соответствии с алгоритмом для решения ДУ аналитически.

ΦΑί	រែវា ក្រ	АВНАЯ ВСТА	BKA PA3MI	ЕТКА СТРАНИЦІ	ы форму.	лы данные г	РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ	вид		
-0	Ж • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	Calibri	- 11 - A	` _A = ≡	■ 8/-	👺 Перенести текст		Общий	-	#
Встав	вить	ж к ч - 🖽 - 💆 - 🛕 -		▲ - ≡ = =	≣ € ₹	🛱 Объединить и поме	стить в центре 🔻	- % 000	00, 00, 0,€ 00,	Условное форматирование *
Буфер	обмена	ъ ш	рифт	G .		Выравнивание	G	Число	F ₂	
027	7	· : × .	$\sqrt{f_x}$							
4	А	В	С	D	E	F	G		Н	I
1	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2}f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i +$	$\frac{h}{2}f(x_i;y_i))$	Δχ	t
2							68			
3										
4			i.							
5		ī	:				8			
7						+	123			
8	3		:		:	:	8			
9										
10	3				:		82			
11										
12										
13	á					:	6:	- 3		
14			9	-	9	-	2			
15 16	3	ř	:			:		-		
17			, c			+				
18	ā	i	:		:	3.		3		
19										
20			3		2	1.				
21	_									
22										

Длина отрезка равна единице, а шаг разбиения – 0,05. Количество узловых точек – 21. Записываем в таблицу.



• Значение $x_0 = 1$, а соответствующее ему значение $y_0 = 2$.



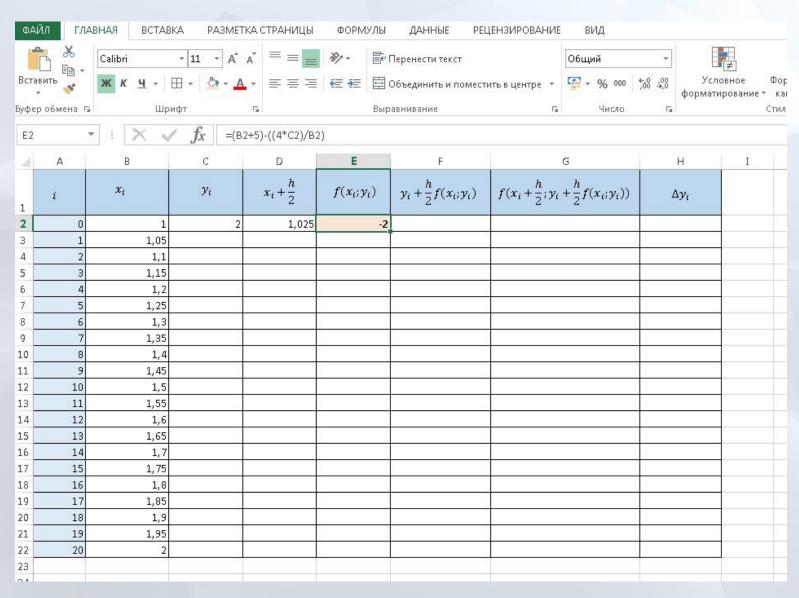
Рассчитываем координаты x_i . Их значение находится по формуле: $x_i + h$.

ΦД	йл гли	АВНАЯ ВСТАЕ	ВКА РАЗМЕТ	КА СТРАНИЦ	Ы ФОРМУ.	ЛЫ ДАННЫЕ Е	РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ	вид			
	\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\	Calibri	+ 11 + A	A [*] ≡ ≡	■ 8/-	Перенести текст		О6щий	*	#	
	ж к ч - 🖽 - 🛆 - 🖃 = =			≣ ∉ #	🛱 Объединить и поме	стить в центре 💌	₽ → % 000	.00 →00 ,00 →,0	Условн форматиро	ioe Фі ваниет к	
Буфеј	ообмена Б	Шр	ифт	Ľ.		Выравнивание	ē	Число	F3		Сти
M2	6	* : X v	f_x								
2	А	В	С	D	Е	F	G		Н		I
1	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2}f(x_{ii}y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i +$	$\frac{h}{2}f(x_i,y_i))$	Δy	ť	
2	0	1	2								
3	1	1,05				7					
4	2	1,1									
5	3	1,15		3					Š		
6	4	1,2									
7	5	1,25									
8	6	1,3									
9	7	1,35		3		7			1		
10	8	1,4		-	7					-	
11	9	1,45	0						5		-
12	10 11	1,5 1,55		-					-		
14	12	1,6	0			7			Υ		-
15	13	1,65									
16	14	1,7		S					\		
17	15	1,75		-							
18	16	1,8									
19	17	1,85				7					
20	18	1,9									
21	19	1,95				7			<u> </u>		
22	20	2									
23											

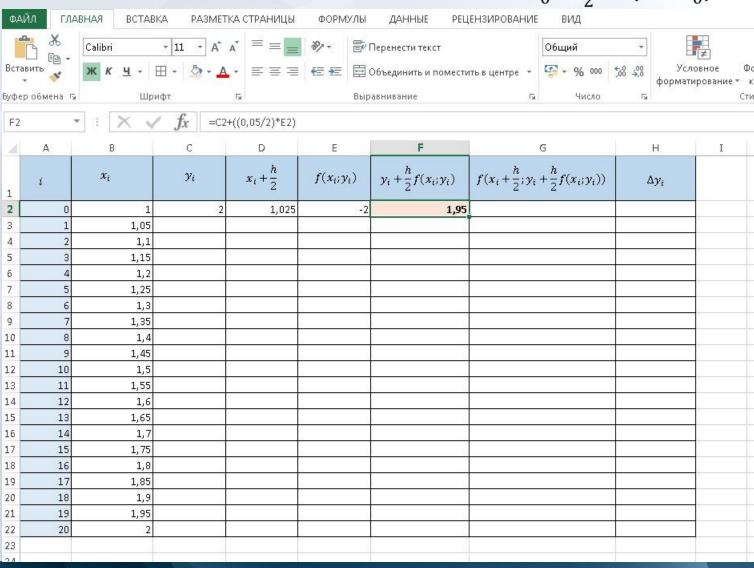
Находим первый аргумент «внешней функции».

ФΑΙ	йл гли	АВНАЯ ВСТАВ	КА РАЗМЕТ	"КА СТРАНИЦЫ	ФОРМУЛЫ	ДАННЫЕ РЕІ	ДЕНЗИРОВАНИЕ	вид			
9	Вить «	ж к ч	⊞ - ♣ - ▲		€ € 🗏	Перенести текст Объединить и помест равнивание	ить в центре 🔻		*00 ,00 ,00 →00	форматирование	Ф • ▼ П
D2		- : X v	f_X =B2	+(0,05/2)							
al.	А	В	С	D	E	F		G		н і	
1	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2}f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i)$	$+\frac{h}{2}f(x_i;y_i))$		ly _i	
2	0	1	2	1,025							
3	1	1,05	- 28								
4	2	1,1									
5	3	1,15	29								
6	4	1,2									
7	5	1,25									
8	6	1,3									
9	7	1,35									_
10	8	1,4									
11	9	1,45					1				_
12	10	1,5					3				
13	11	1,55							-		-
14	12	1,6							8		-
15 16	13 14	1,65 1,7				1	1				-
17	15	1,75		3		3	3		8		-
18	16	1,73					1				-
19	17	1,85	-								
20	18	1,9			5					-	
21	19	1,95	*	3							
22	20	2			E		1	-			\exists
23		,=									

ullet Следующим шагом находим значение функции в точке y_0



• После чего можно рассчитать второй аргумент «внешней функции». Он находится по формуле: $y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0; y_0)$



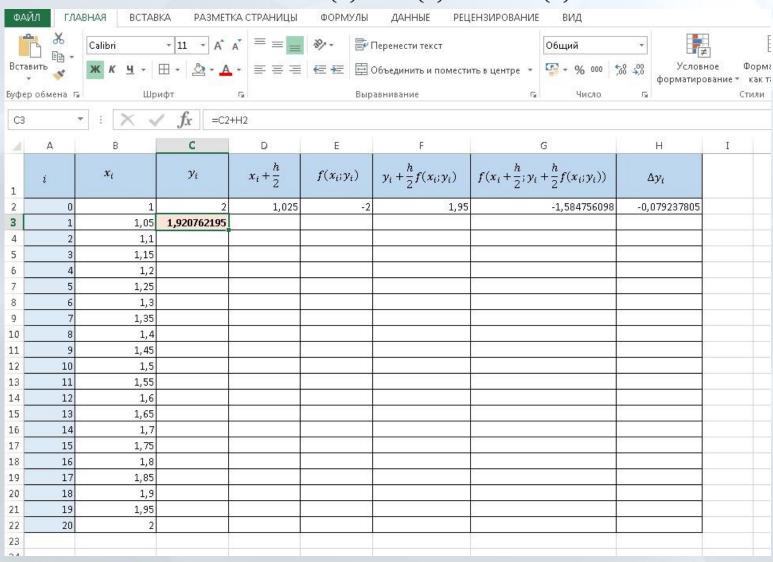
Ищем значение функции в точке, рассчитанной с учетом погрешности.

фΑ	йл гл	АВНАЯ ВСТАВІ	КА РАЗМЕТ			ДАННЫЕ РЕЦ	ЕНЗИРОВАНИЕ	вид			
	3	Calibri	- 11 - A	A* = = =	87 - E-1	Перенести текст		Общий	•		→
Вста	вить	ж к <u>ч</u> -	⊞ - <u></u>	· ===	€ ₩ 目	Эбъединить и помести	♀ + % ∞ ·	,00 4,00 ,00 4,00	Усло формати	— овное Фо¦ рованиет ка	
Буфе	р обмена т	≨ Шри		Tig.	Выр	авнивание	Fa		[B		Стил
G2		- : × v	f_x =(D	2+5)-((4*F2)/D:	2)						
a	Α	В	С	D	E	F	7	G		Н	I
1	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2}f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i)$	$+\frac{h}{2}f(x_i;y_i))$	Z	Δy_i	
2	0	1	2	1,025	-2	1,95		-1,584756098	3		
3	1	1,05			5. S	, (3) T					
4	2	1,1									
5	3	1,15	25								
6	4	1,2									
7	5	1,25									
8	6	1,3									
9	7	1,35									
10	8	1,4			5						
11	9	1,45									
12	10 11	1,5 1,55	- 3		5	- 3		2			
14	12	1,55									
15	13	1,65			š						
16	14	1,7									
17	15	1,75	3		3			*			
18	16	1,8									
19	17	1,85			S						
20	18	1,9									
21	19	1,95	3		S						
22	20	2									
23			73								

Полученный результат умножаем на шаг разбиения.

ФАЙЛ	ГЛА	авная встав	ВКА РАЗМЕТ	КА СТРАНИЦЫ	ФОРМУЛЫ	ДАННЫЕ РЕЦ	ЕНЗИРОВАНИЕ	вид		
Вставить 	· • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	ж к ч -			€ € □	Перенести текст Объединить и помести авнивание		Общий	.00 300 форматир	
H2		- X V		*0,05	569	abilitio alline		12111010	7.41	
	A	В	C	D	E	F	Ti and the second	G	н	I
i		x_i		$x_i + \frac{h}{2}$		$y_i + \frac{h}{2}f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i)$		Δy_i	
2	0	1	2	1,025	-2	1,95		-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05								
4	2	1,1			5 3		8,			
5	3	1,15		9						
7	5	1,2 1,25		-	5 8		\$			
8	6	1,3							-	
9	7	1,35			8		8			
10	8	1,4								
11	9	1,45								
12	10	1,5								
13	11	1,55								
14	12	1,6			5 8		8			
15	13	1,65								
16 17	14 15	1,7			3		8.			
18	16	1,75 1,8								
19	17	1,85			5 3		3	2		
20	18	1,9								
21	19	1,95		3	5		3			
22	20	2								
23										

• Осуществляем поиск следующего значения y. Делается это по формуле: $y_{i(n)} = y_{i(n)-1} + \Delta y_{i(n)-1}$



Копируем полученные значения по образцу. (Выделяем значения полей D, E, F, G, H и «растягиваем» на одну строку вниз)

ΦА	йл гла	АВНАЯ ВСТАВ	ВКА РАЗМЕТ	КА СТРАНИЦЫ	ФОРМУЛЫ	ДАННЫЕ РЕЦ	ЕНЗИРОВАНИЕ ВИД	J - 1 - 1	,
Вста	Ж вить №	Calibri ж <i>к</i> <u>ч</u> +	- 11 - A*				О6щий тъв центре → № 000 1	т Услов форматир	
Буфе	робмена Б		ифт	Fa .		авнивание	G Число	Б	Стили
D2		- : X v	f x =B2-	+(0,05/2)	12.00.00		1, 50 1000		3.730,7000
a	А	В	С	D	E	F	G	Н	I
1	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i, y_i)$	$y_i + \frac{h}{2}f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2}f(x_i; y_i))$	Δy_i	
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05	1,920762195						挂
4	2	1,1		-					
5	3	1,15	6		× .	· 6	7		
6	4	1,2							
7	5	1,25	0				Ž		
8	6	1,3							
9	7	1,35	0			6			
10	8	1,4							
11	9	1,45	63			0	9		
12	10	1,5							
13	11	1,55	6		3		78		0.
14	12	1,6							
15	13	1,65	0		3	9	\(\lambda\)		
16	14	1,7							
17	15	1,75	0		× 3	9	<u> </u>		
18	16	1,8	100						
19	17	1,85	0		3		73		0. 10
20	18	1,9			+				
21	19 20	1,95 2			3	0	\(\frac{1}{2}\)		
23	20	2							
23	1								

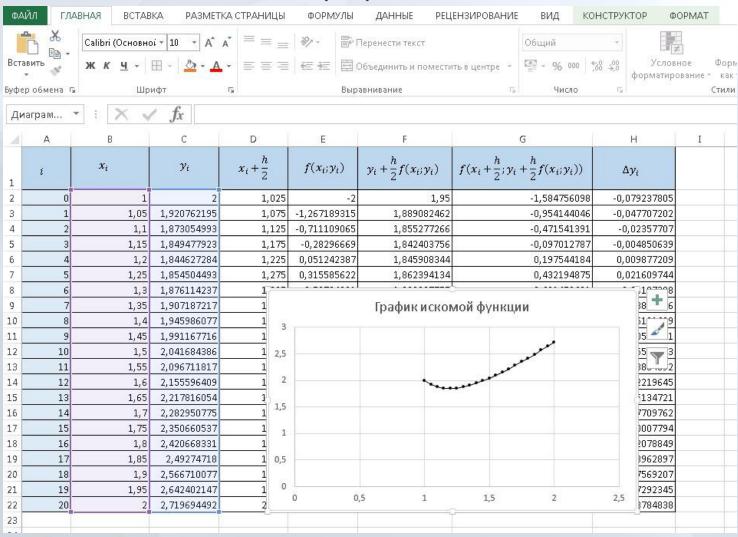
(Выделяем значения полей C, D, E, F, G, H и «растягиваем» до конца таблицы)

ФΑΙ	йл гла	авная встав	BKA PA3MET	КА СТРАНИЦЫ	фОРМУЛЫ	ДАННЫЕ РЕЦ	ЕНЗИРОВАНИЕ	вид		
Вста	вить 🗳	Calibri жк <u>ч</u> +	т 11 т А [*] ⊞ т <u>А</u> *	A* ≡ ≡ <u></u>	● ● □			О6щий № 000 5	√ 58 \$00 форматир	
СЗ	,	× × v	f_x =C2	+H2						
24	А	В	С	D	E	F	- 0	G	Н	I
1	i	x_i	\mathcal{Y}_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2}f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i)$	$+\frac{h}{2}f(x_i;y_i))$	Δy_i	
2	0	1	2	1,025	-2	1,95		-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05	1,920762195		-1,267189315	1,889082462		-0,954144046	-0,047707202	
4	2	1,1						3		生
5	3	1,15								
6	4	1,2								
7	5	1,25	90		X 3	0		λ:		
8	6	1,3	-							
9	7	1,35	93		X 3	6		7.		
10	8 9	1,4 1,45	7-1		÷	-		7		
12	10	1,45	93		3			25		
13	11	1,55								
14	12	1,6			· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·					
15	13	1,65	9					7		
16	14	1,7								
17	15	1,75	93		5 S	6		Ž.		
18	16	1,8								
19	17	1,85	(r)		8					
20	18	1,9						-		
21	19	1,95	6		× 3	÷		7:		
22	20	2								
23								1,		

Искомое приближенное решение:

фΔ	йл гл	авная встав	ВКА РАЗМЕТ	КА СТРАНИЦЫ	ФОРМУЛЫ	ДАННЫЕ РЕЦ	ЕНЗИРОВАНИЕ	вид				
6	%	Calibri	- 11 - A	A* = =	87 - E	Перенести текст		О6щий	-	#		
Вста	вить	ж к <u>ч</u> -	⊞ - Ø - A	· = = =	€ € □	Эбъединить и помести	ть в центре 💌	\$ - % 000 5	30 → ,0	Условн форматиро	ное Фи	орм как т
Буфе	робмена 1	ъ Шр	ифт	T _M	Выр	авнивание	Fg.	Число	Fa.	66 33 33		или
C2	2	• : X •	f _X =C2	1+H21				ithfort or	0.1.		15000	
4	А	В	С	D	Е	F.		G		н	I	
1	i	x_i	Уt	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2}f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i)$	$+\frac{h}{2}f(x_i;y_i))$	Δ	y_i		
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	S	-1,584756098	-0.1	079237805		
3	1	1,05	1,920762195	1,075	-1,267189315	1,889082462		-0,954144046	- 5	047707202		
4	2	1,1	1,873054993	1,125	-0,711109065	1,855277266		-0,471541391		,02357707		
5	3	1,15	1,849477923	1,175	-0,28296669	1,842403756		-0,097012787				
6	4	1,2	1,844627284	1,225	0,051242387	1,845908344	2)	0,197544184	0,009877209			
7	5	1,25	1,854504493	1,275	0,315585622	1,862394134	K	0,432194875	0,021609744			
8	6	1,3	1,876114237	1,325	0,52734081	1,889297757		0,621459601	0,03107298			
9	7	1,35	1,907187217	1,375	0,699074913	1,92466409	×	0,775977193	0	,03879886		
10	8	1,4	1,945986077	1,425	0,840039781	1,966987071		0,903632783	0,1	045181639		
11	9	1,45	1,991167716	1,475	0,957123543	2,015095804	×	1,010333412	0,1	050516671		
12	10	1,5	2,041684386	1,525	1,055508303	2,068072094	5.0	1,100548606	0	,05502743		
13	11	1,55	2,096711817	1,575	1,139130796	2,125190087	×	1,177691844	0,1	058884592		
14	12	1,6	2,155596409	1,625	1,211008978	2,185871633		1,244392903	0,1	062219645		
15	13	1,65	2,217816054	1,675	1,273476233	2,24965296	Š.	1,302694424	0,1	065134721		
16	14	1,7	2,282950775	1,725	1,328351117	2,316159553		1,354195239	0,1	067709762		
17	15	1,75	2,350660537	1,775	1,377061629	2,385087078	×.	1,400155881	0,1	70007794		
18	16	1,8	2,420668331	1,825	1,420737042	2,456186757		1,44157697	0,1	072078849		
19	17	1,85	2,49274718	1,875	1,460276368	2,529254089		1,479257944	0,1	073962897		
20	18	1,9	2,566710077	1,925	1,496399838	2,604120073		1,513841407	0	,07569207		
21	19	1,95	2,642402147	1,975	1,529687903	2,680644345		1,545846897	0,1	077292345		
22	20	2	2,719694492	2,025	1,560611016	2,758709767		1,575696756	0,1	78784838		
23												
24												

Строим график. Выделяем пары значений x и y, далее «Вставка» → «Диаграммы» → «Точечная с прямыми отрезками и маркерами».



При решении данного ДУ аналитически результат будет равен — **2,71875**.

Вывод: усовершенствованный метод ломаных Эйлера дает более точные результаты в отличие от «классического» метода. Связано это с тем, что производная берется не в начале шага, а как промежуточное или среднее на разных участках одного шага. В процессе использования метода вычисляются несколько производных в разных частях шага, которые впоследствии усредняются. За счет этого точность метода возрастает на порядок.

Список литературы

- 1. Эльсгольц Л.Э. «Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление» (61 стр.), 1979г.
- 2. Демидович Б.П. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу», 1995г.
- 3. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. «Дифференциальные уравнения» (31 стр.), 1985г.