Численное решение дифференциальных уравнений модифицированным методом ломаных Эйлера с использованием редактора электронных таблиц MS Excel

Свирина Анастасия Олеговна, методист ИМЦ

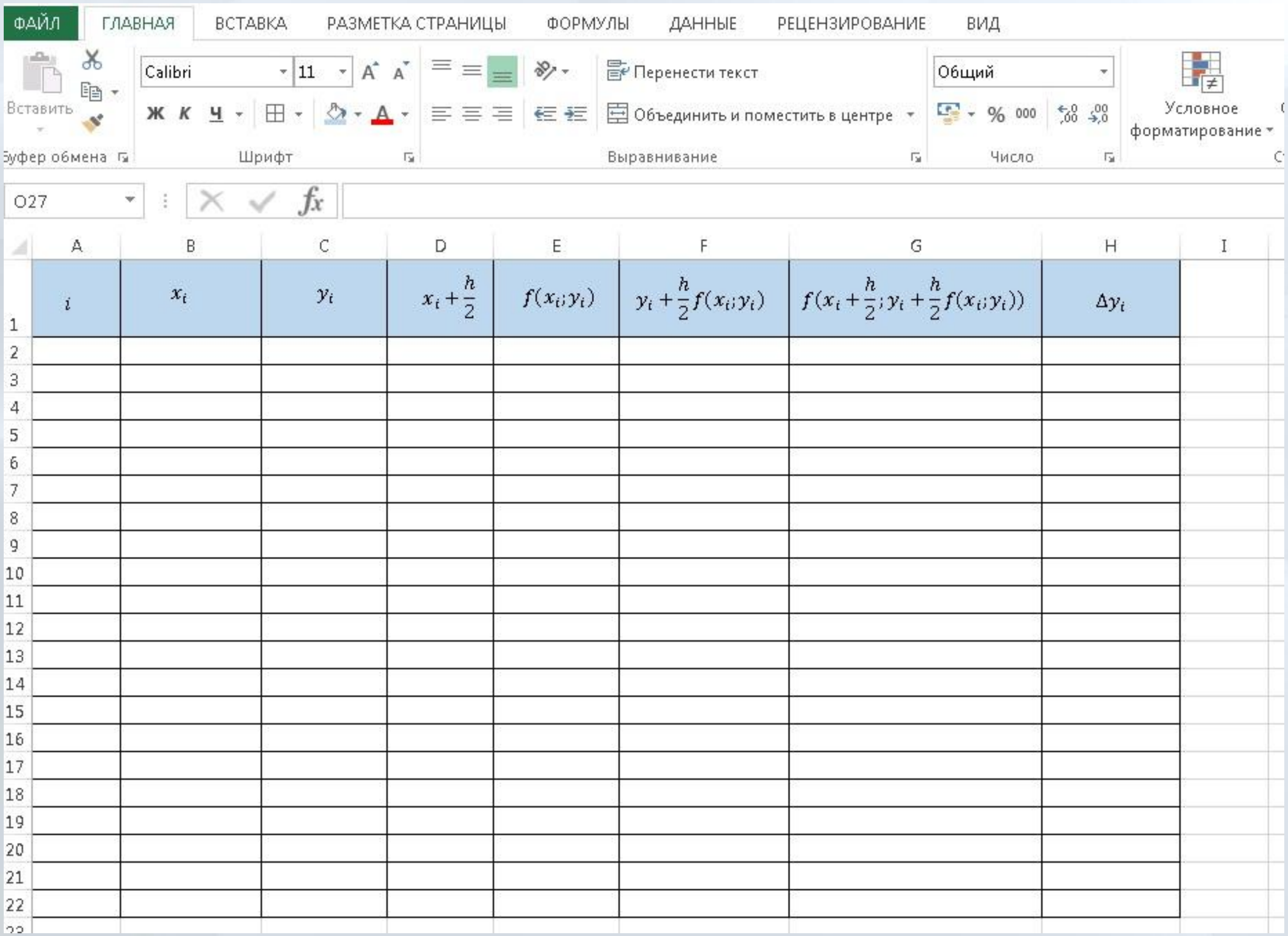
Большинство физических, химических, экономических и прочих процессов описываются дифференциальными уравнениями или системами дифференциальных уравнений. Возникает необходимость получения результатов их решения. И не всегда есть возможность получить точный ответ аналитическим способом.

Поэтому требуются навыки в решении ДУ с использованием численных методов. Один из таких методов – метод ломаных Эйлера. Рассмотрим решение дифференциального уравнения усовершенствованным методом ломаных Эйлера, который имеет большую точность расчетов.

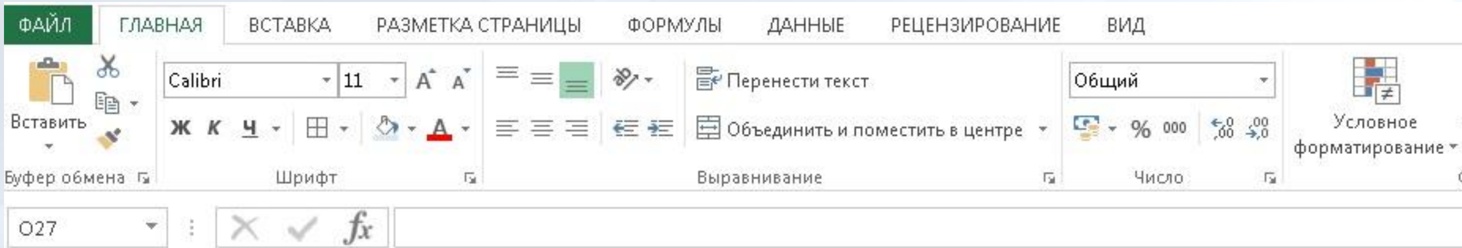
Дано:
Начальные условия:

Создание таблицы

Даем название столбцам таблицы в соответствии с алгоритмом для решения ДУ аналитически.

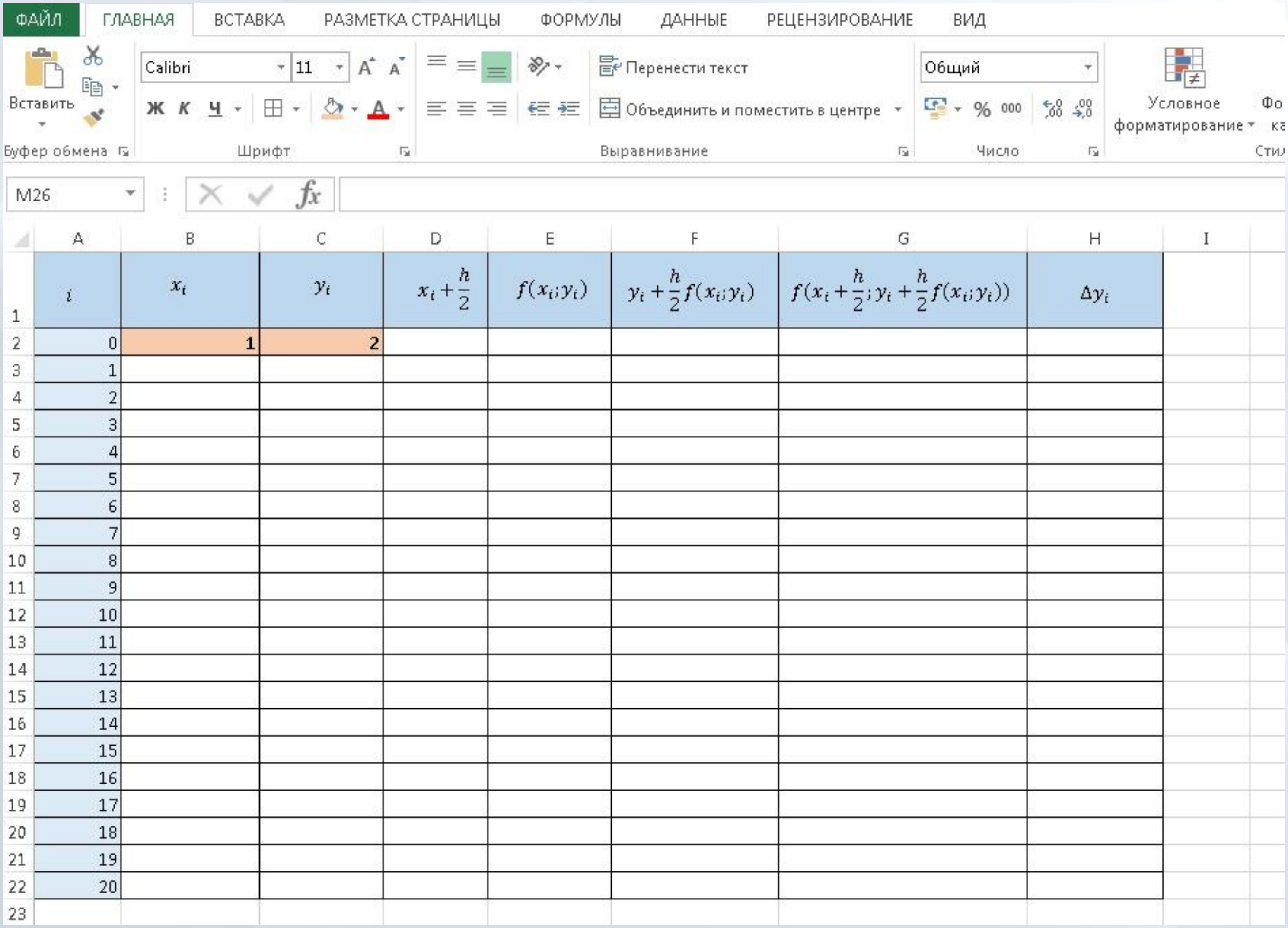


Длина отрезка равна единице, а шаг разбиения – 0,05. Количество узловых точек – 21. Записываем в таблицу.



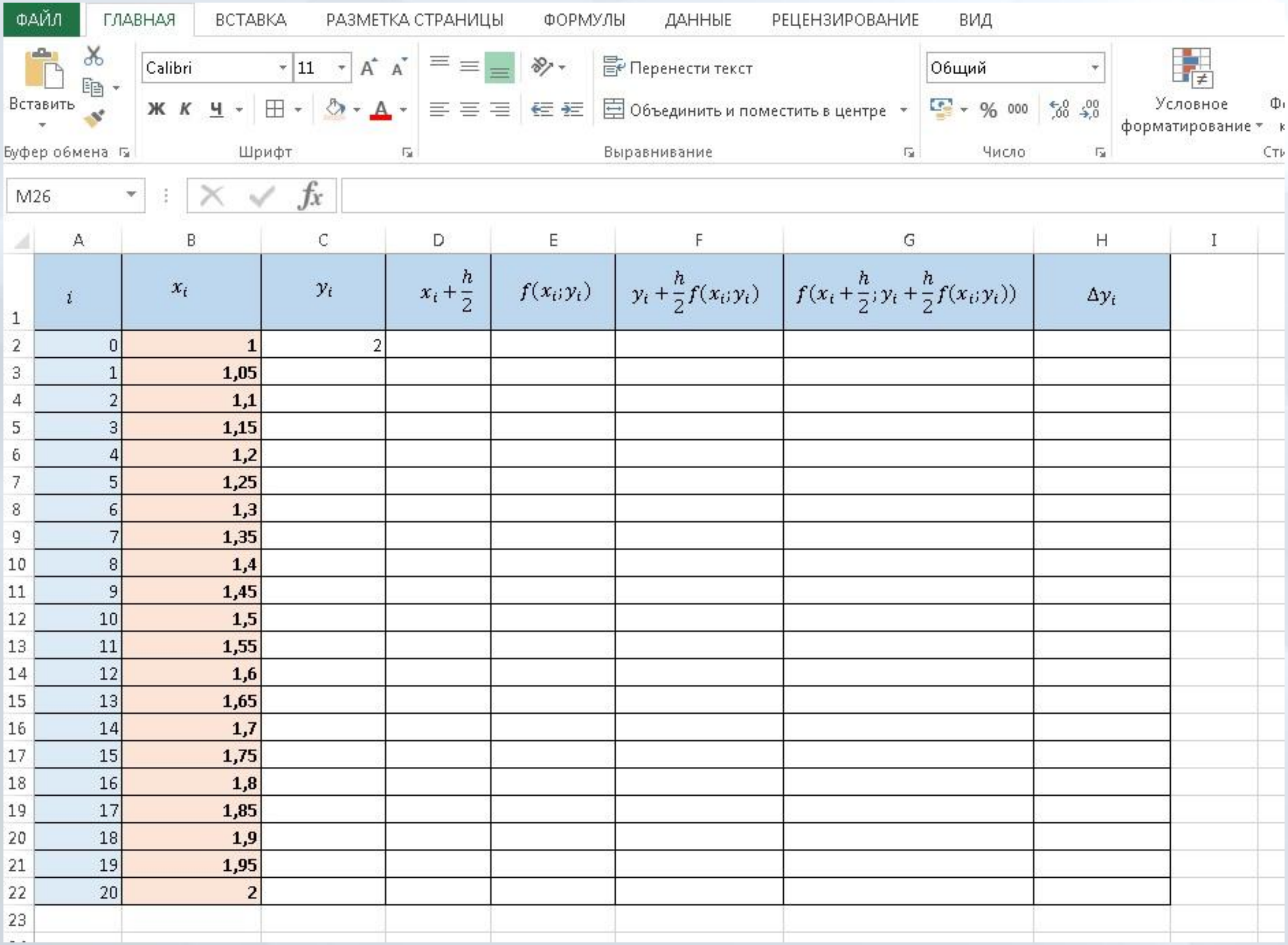
i	x_i	y_i	$x_i+\frac{h}{2}$	$f(x_i;y_i)$	$y_i+\frac{h}{2}f(x_i;y_i)$	$f(x_i+\frac{h}{2};y_i+\frac{h}{2}f(x_i;y_i))$	Δy_i
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

- Значение $x_0 = 1$, а соответствующее ему значение $y_0 = 2$.



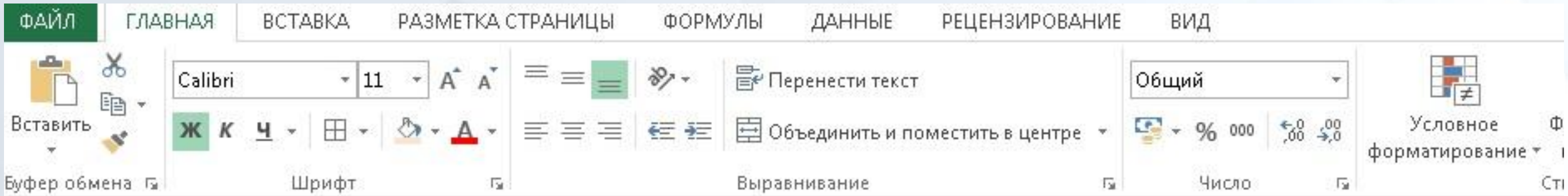
i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i;y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i;y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i;y_i))$	Δy_i
0	1	2					
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

- Рассчитываем координаты x_i. Их значение находится по формуле: $x_i + h$.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i;y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i;y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i;y_i))$	Δy_i
2	0	1	2					
3	1	1,05						
4	2	1,1						
5	3	1,15						
6	4	1,2						
7	5	1,25						
8	6	1,3						
9	7	1,35						
10	8	1,4						
11	9	1,45						
12	10	1,5						
13	11	1,55						
14	12	1,6						
15	13	1,65						
16	14	1,7						
17	15	1,75						
18	16	1,8						
19	17	1,85						
20	18	1,9						
21	19	1,95						
22	20	2						

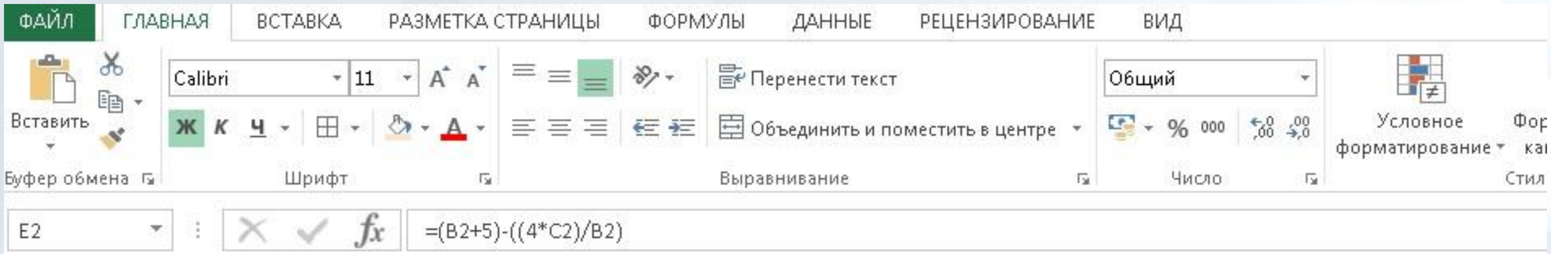
Находим первый аргумент «внешней функции».



D2 | f_x | =B2+(0,05/2)

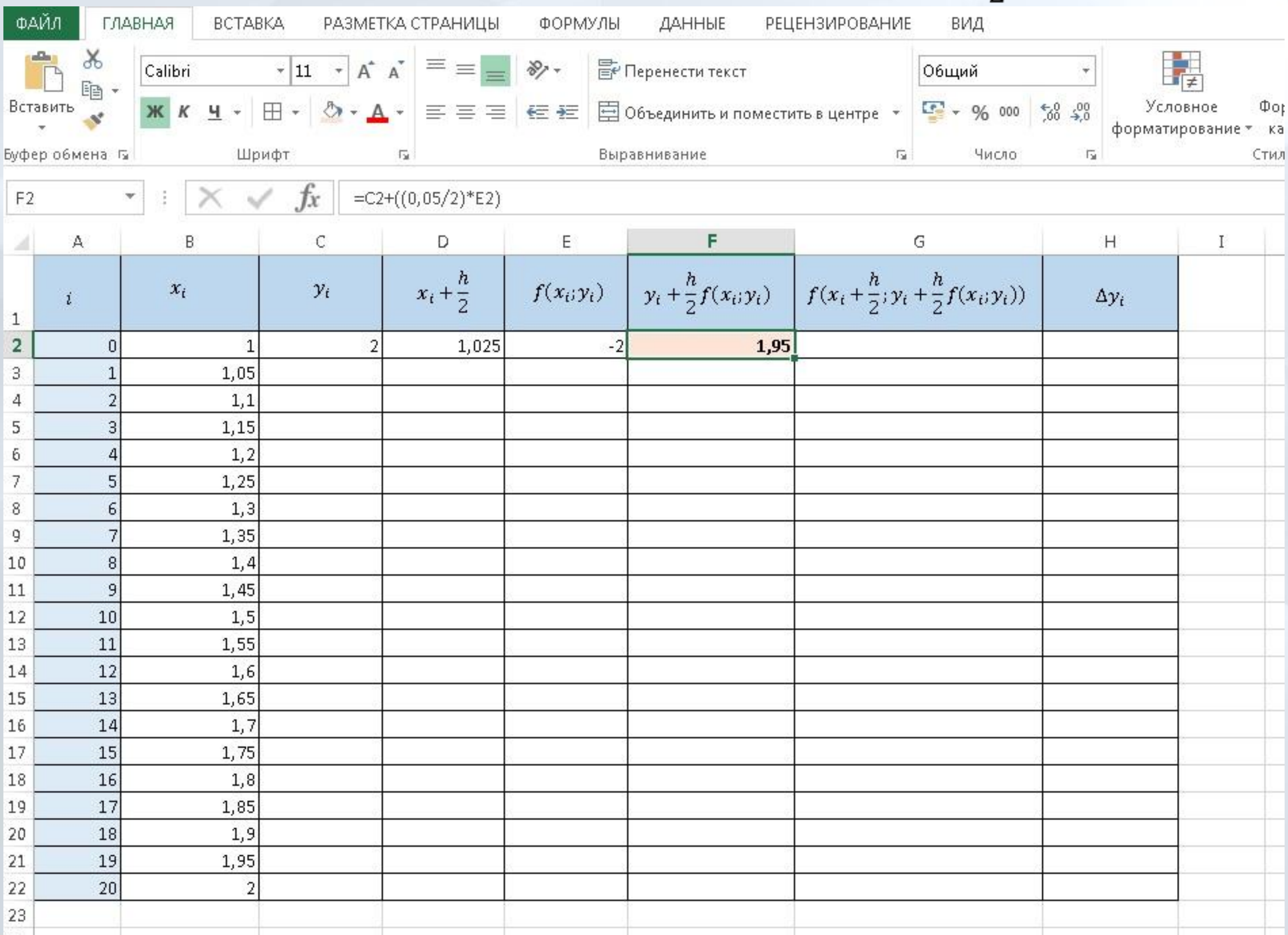
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	x_i	y_i	$x_i+\frac{h}{2}$	$f(x_i;y_i)$	$y_i+\frac{h}{2}f(x_i;y_i)$	$f(x_i+\frac{h}{2};y_i+\frac{h}{2}f(x_i;y_i))$	Δy_i
2	0	1	2	**1,025**				
3	1	1,05						
4	2	1,1						
5	3	1,15						
6	4	1,2						
7	5	1,25						
8	6	1,3						
9	7	1,35						
10	8	1,4						
11	9	1,45						
12	10	1,5						
13	11	1,55						
14	12	1,6						
15	13	1,65						
16	14	1,7						
17	15	1,75						
18	16	1,8						
19	17	1,85						
20	18	1,9						
21	19	1,95						
22	20	2						
23								

- Следующим шагом находим значение функции в точке y_0



i	x_i	y_i	$x_i+\frac{h}{2}$	$f(x_i;y_i)$	$y_i+\frac{h}{2}f(x_i;y_i)$	$f(x_i+\frac{h}{2};y_i+\frac{h}{2}f(x_i;y_i))$	Δy_i
0	1	2	1,025	-2			
1	1,05						
2	1,1						
3	1,15						
4	1,2						
5	1,25						
6	1,3						
7	1,35						
8	1,4						
9	1,45						
10	1,5						
11	1,55						
12	1,6						
13	1,65						
14	1,7						
15	1,75						
16	1,8						
17	1,85						
18	1,9						
19	1,95						
20	2						

- После чего можно рассчитать второй аргумент «внешней функции». Он находится по формуле: $y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0; y_0)$



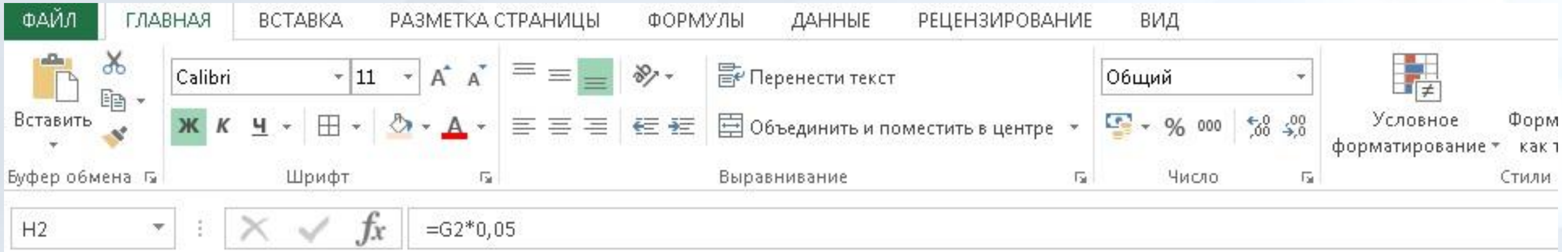
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i
2	0	1	2	1,025	-2	1,95		
3	1	1,05						
4	2	1,1						
5	3	1,15						
6	4	1,2						
7	5	1,25						
8	6	1,3						
9	7	1,35						
10	8	1,4						
11	9	1,45						
12	10	1,5						
13	11	1,55						
14	12	1,6						
15	13	1,65						
16	14	1,7						
17	15	1,75						
18	16	1,8						
19	17	1,85						
20	18	1,9						
21	19	1,95						
22	20	2						

Ищем значение функции в точке, рассчитанной с учетом погрешности.

G2 =(D2+5)-((4*F2)/D2)

i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i;y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i;y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i;y_i))$	Δy_i
0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	
1	1,05						
2	1,1						
3	1,15						
4	1,2						
5	1,25						
6	1,3						
7	1,35						
8	1,4						
9	1,45						
10	1,5						
11	1,55						
12	1,6						
13	1,65						
14	1,7						
15	1,75						
16	1,8						
17	1,85						
18	1,9						
19	1,95						
20	2						

Полученный результат умножаем на шаг разбиения.



	i	x_i	y_i	$x_i+\frac{h}{2}$	$f(x_i;y_i)$	$y_i+\frac{h}{2}f(x_i;y_i)$	$f(x_i+\frac{h}{2};y_i+\frac{h}{2}f(x_i;y_i))$	Δy_i
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	**-0,079237805**
3	1	1,05						
4	2	1,1						
5	3	1,15						
6	4	1,2						
7	5	1,25						
8	6	1,3						
9	7	1,35						
10	8	1,4						
11	9	1,45						
12	10	1,5						
13	11	1,55						
14	12	1,6						
15	13	1,65						
16	14	1,7						
17	15	1,75						
18	16	1,8						
19	17	1,85						
20	18	1,9						
21	19	1,95						
22	20	2						

- Осуществляем поиск следующего значения y. Делается это по формуле: $y_{i(n)} = y_{i(n)-1} + \Delta y_{i(n)-1}$

C3 =C2+H2

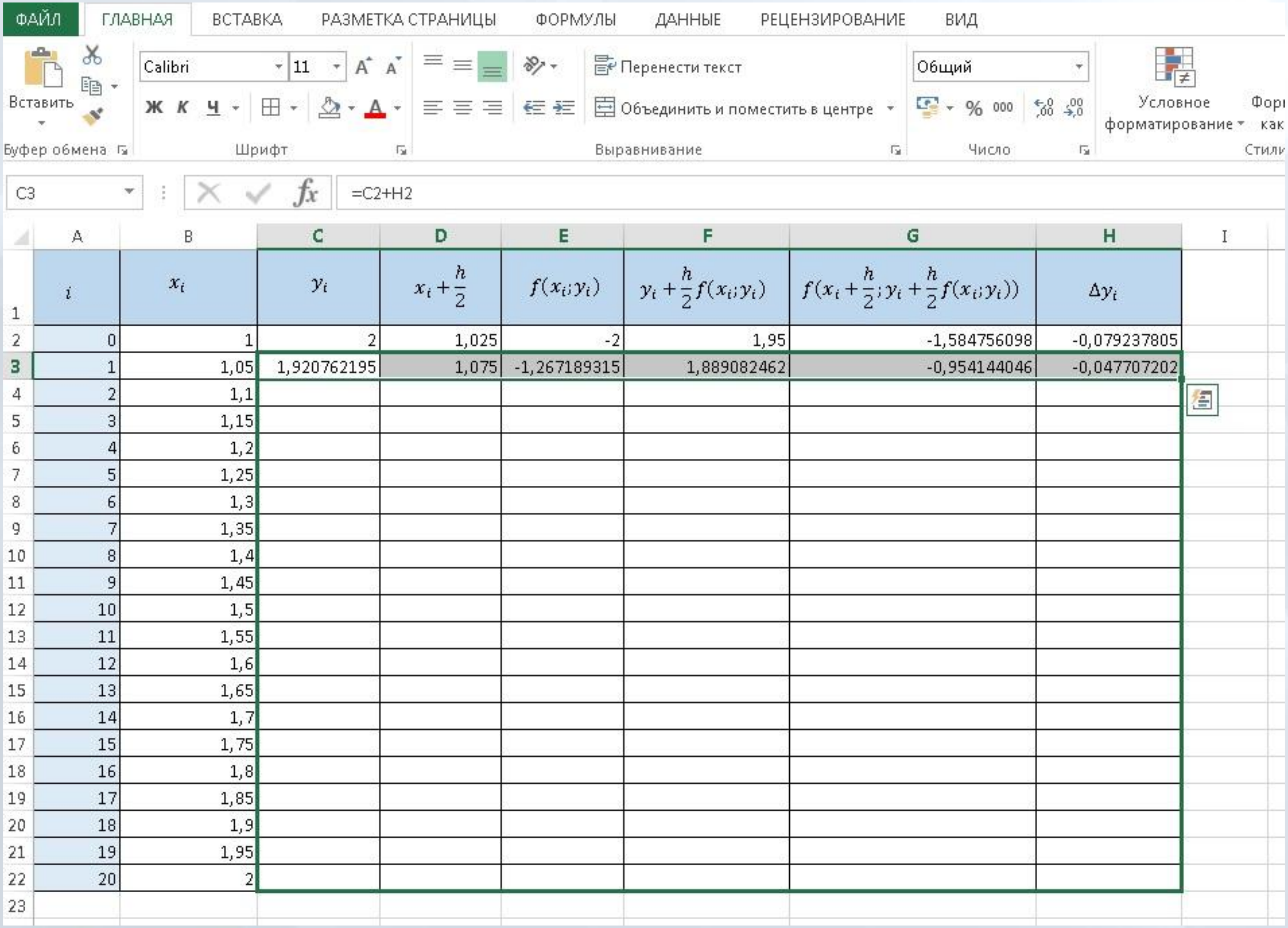
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i;y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i;y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i;y_i))$	Δy_i
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805
3	1	1,05	1,920762195					
4	2	1,1						
5	3	1,15						
6	4	1,2						
7	5	1,25						
8	6	1,3						
9	7	1,35						
10	8	1,4						
11	9	1,45						
12	10	1,5						
13	11	1,55						
14	12	1,6						
15	13	1,65						
16	14	1,7						
17	15	1,75						
18	16	1,8						
19	17	1,85						
20	18	1,9						
21	19	1,95						
22	20	2						

Копируем полученные значения по образцу. (Выделяем значения полей D, E, F, G, H и «растягиваем» на одну строку вниз)

D2 =B2+(0,05/2)

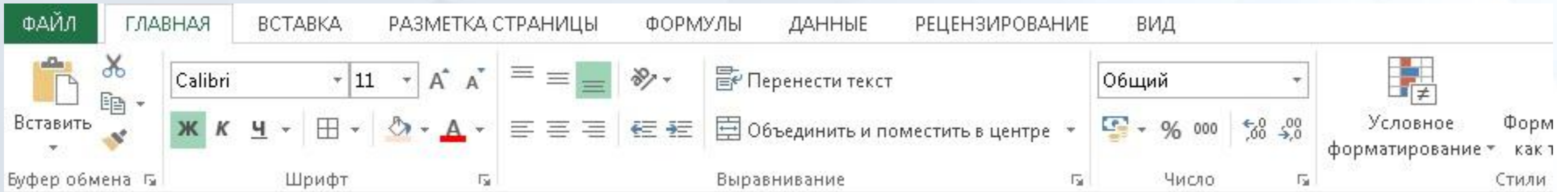
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	x_i	y_i	$x_i+\frac{h}{2}$	$f(x_i;y_i)$	$y_i+\frac{h}{2}f(x_i;y_i)$	$f(x_i+\frac{h}{2};y_i+\frac{h}{2}f(x_i;y_i))$	Δy_i
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805
3	1	1,05	1,920762195					
4	2	1,1						
5	3	1,15						
6	4	1,2						
7	5	1,25						
8	6	1,3						
9	7	1,35						
10	8	1,4						
11	9	1,45						
12	10	1,5						
13	11	1,55						
14	12	1,6						
15	13	1,65						
16	14	1,7						
17	15	1,75						
18	16	1,8						
19	17	1,85						
20	18	1,9						
21	19	1,95						
22	20	2						

(Выделяем значения полей C, D, E, F, G, H и «растягиваем» до конца таблицы)



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	x_i	y_i	$x_i+\frac{h}{2}$	$f(x_i;y_i)$	$y_i+\frac{h}{2}f(x_i;y_i)$	$f(x_i+\frac{h}{2};y_i+\frac{h}{2}f(x_i;y_i))$	Δy_i
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805
3	1	1,05	1,920762195	1,075	-1,267189315	1,889082462	-0,954144046	-0,047707202
4	2	1,1						
5	3	1,15						
6	4	1,2						
7	5	1,25						
8	6	1,3						
9	7	1,35						
10	8	1,4						
11	9	1,45						
12	10	1,5						
13	11	1,55						
14	12	1,6						
15	13	1,65						
16	14	1,7						
17	15	1,75						
18	16	1,8						
19	17	1,85						
20	18	1,9						
21	19	1,95						
22	20	2						
23								

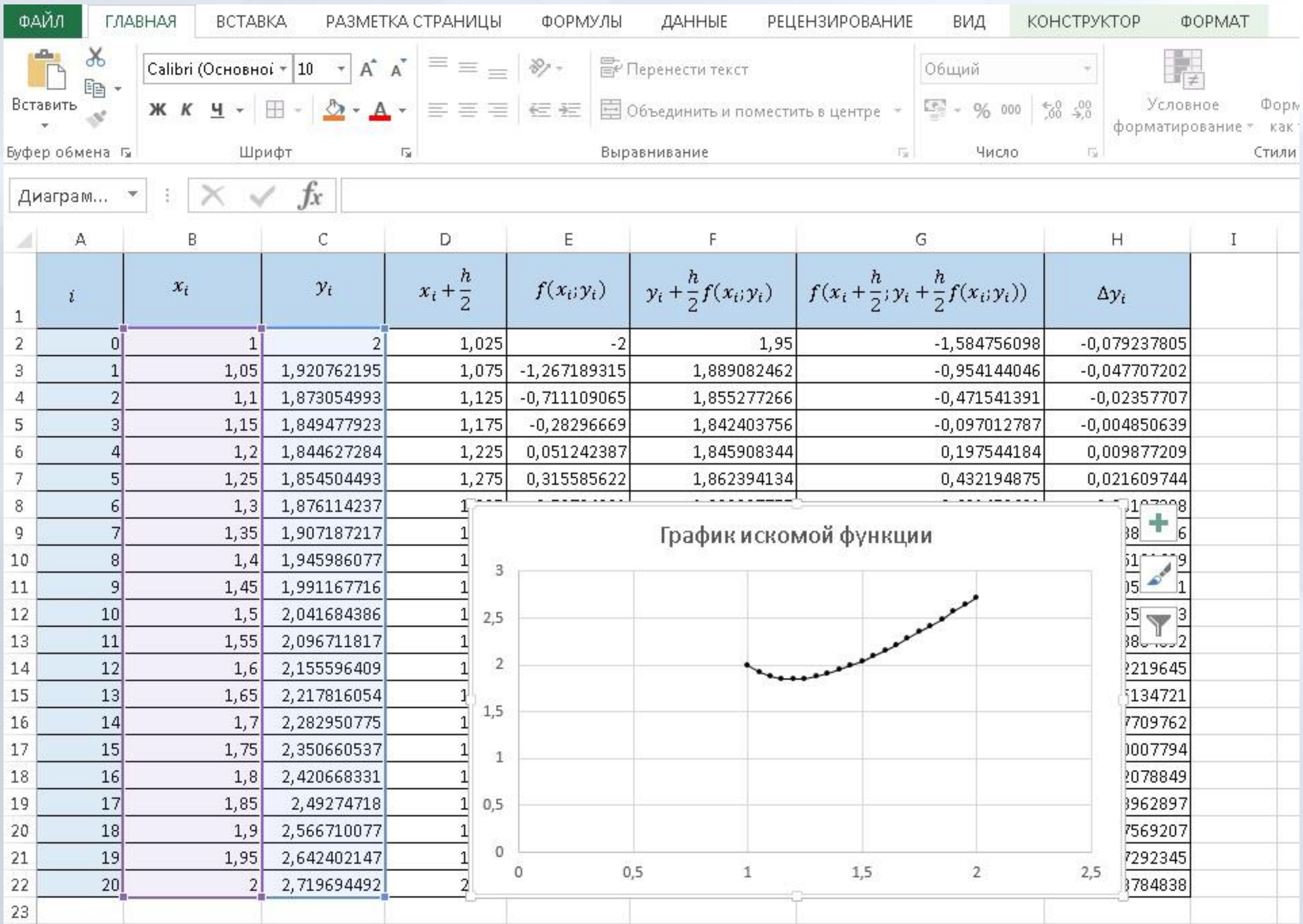
Искомое приближенное решение:



C22 | =C21+H21

i	x_i	y_i	$x_i+\frac{h}{2}$	$f(x_i;y_i)$	$y_i+\frac{h}{2}f(x_i;y_i)$	$f(x_i+\frac{h}{2};y_i+\frac{h}{2}f(x_i;y_i))$	Δy_i
0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805
1	1,05	1,920762195	1,075	-1,267189315	1,889082462	-0,954144046	-0,047707202
2	1,1	1,873054993	1,125	-0,711109065	1,855277266	-0,471541391	-0,02357707
3	1,15	1,849477923	1,175	-0,28296669	1,842403756	-0,097012787	-0,004850639
4	1,2	1,844627284	1,225	0,051242387	1,845908344	0,197544184	0,009877209
5	1,25	1,854504493	1,275	0,315585622	1,862394134	0,432194875	0,021609744
6	1,3	1,876114237	1,325	0,52734081	1,889297757	0,621459601	0,03107298
7	1,35	1,907187217	1,375	0,699074913	1,92466409	0,775977193	0,03879886
8	1,4	1,945986077	1,425	0,840039781	1,966987071	0,903632783	0,045181639
9	1,45	1,991167716	1,475	0,957123543	2,015095804	1,010333412	0,050516671
10	1,5	2,041684386	1,525	1,055508303	2,068072094	1,100548606	0,05502743
11	1,55	2,096711817	1,575	1,139130796	2,125190087	1,177691844	0,058884592
12	1,6	2,155596409	1,625	1,211008978	2,185871633	1,244392903	0,062219645
13	1,65	2,217816054	1,675	1,273476233	2,24965296	1,302694424	0,065134721
14	1,7	2,282950775	1,725	1,328351117	2,316159553	1,354195239	0,067709762
15	1,75	2,350660537	1,775	1,377061629	2,385087078	1,400155881	0,070007794
16	1,8	2,420668331	1,825	1,420737042	2,456186757	1,44157697	0,072078849
17	1,85	2,49274718	1,875	1,460276368	2,529254089	1,479257944	0,073962897
18	1,9	2,566710077	1,925	1,496399838	2,604120073	1,513841407	0,07569207
19	1,95	2,642402147	1,975	1,529687903	2,680644345	1,545846897	0,077292345
20	2	**2,719694492**	2,025	1,560611016	2,758709767	1,575696756	0,078784838

- Строим график. Выделяем пары значений x и y, далее «Вставка» → «Диаграммы» → «Точечная с прямыми отрезками и маркерами».



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	x_i	y_i	$x_i+\frac{h}{2}$	$f(x_i;y_i)$	$y_i+\frac{h}{2}f(x_i;y_i)$	$f(x_i+\frac{h}{2};y_i+\frac{h}{2}f(x_i;y_i))$	Δy_i
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805
3	1	1,05	1,920762195	1,075	-1,267189315	1,889082462	-0,954144046	-0,047707202
4	2	1,1	1,873054993	1,125	-0,711109065	1,855277266	-0,471541391	-0,02357707
5	3	1,15	1,849477923	1,175	-0,28296669	1,842403756	-0,097012787	-0,004850639
6	4	1,2	1,844627284	1,225	0,051242387	1,845908344	0,197544184	0,009877209
7	5	1,25	1,854504493	1,275	0,315585622	1,862394134	0,432194875	0,021609744
8	6	1,3	1,876114237					
9	7	1,35	1,907187217					
10	8	1,4	1,945986077					
11	9	1,45	1,991167716					
12	10	1,5	2,041684386					
13	11	1,55	2,096711817					
14	12	1,6	2,155596409					
15	13	1,65	2,217816054					
16	14	1,7	2,282950775					
17	15	1,75	2,350660537					
18	16	1,8	2,420668331					
19	17	1,85	2,49274718					
20	18	1,9	2,566710077					
21	19	1,95	2,642402147					
22	20	2	2,719694492					

При решении данного ДУ аналитически результат будет равен – **2,71875**.

Вывод: усовершенствованный метод ломаных Эйлера дает более точные результаты в отличие от «классического» метода. Связано это с тем, что производная берется не в начале шага, а как промежуточное или среднее на разных участках одного шага. В процессе использования метода вычисляются несколько производных в разных частях шага, которые впоследствии усредняются. За счет этого точность метода возрастает на порядок.

Список литературы

1. Эльсгольц Л.Э. «Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление» (61 стр.), 1979г.
2. Демидович Б.П. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу», 1995г.
3. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. «Дифференциальные уравнения» (31 стр.), 1985г.