

**Численное решение
дифференциальных уравнений
модифицированным методом
ломаных Эйлера с
использованием редактора
электронных таблиц MS Excel**

Свирина Анастасия Олеговна, методист ИМЦ

Большинство физических, химических, экономических и прочих процессов описываются дифференциальными уравнениями или системами дифференциальных уравнений. Возникает необходимость получения результатов их решения. И не всегда есть возможность получить точный ответ аналитическим способом.

Поэтому требуются навыки в решении ДУ с использованием численных методов. Один из таких методов – метод ломаных Эйлера. Рассмотрим решение дифференциального уравнения усовершенствованным методом ломаных Эйлера, который имеет большую точность расчетов.



Дано:

Начальные условия:

Создание таблицы

Даем название столбцам таблицы в соответствии с алгоритмом для решения ДУ аналитически.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i, y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i))$	Δy_i	
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									

Длина отрезка равна единице, а шаг разбиения – 0,05. Количество узловых точек – 21. Записываем в таблицу.

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following table structure:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i, y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i))$	Δy_i	
1									
2	0								
3	1								
4	2								
5	3								
6	4								
7	5								
8	6								
9	7								
10	8								
11	9								
12	10								
13	11								
14	12								
15	13								
16	14								
17	15								
18	16								
19	17								
20	18								
21	19								
22	20								
23									

- Значение $x_n = 1$, а соответствующее ему значение $y_n = 2$.

Скриншот интерфейса Microsoft Excel с таблицей для вычисления значений x_i и y_i по заданным формулам. В строке 2 выделены значения $x_1 = 1$ и $y_1 = 2$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2						
3	1								
4	2								
5	3								
6	4								
7	5								
8	6								
9	7								
10	8								
11	9								
12	10								
13	11								
14	12								
15	13								
16	14								
17	15								
18	16								
19	17								
20	18								
21	19								
22	20								
23									

Рассчитываем координаты x_i . Их значение находится по формуле: $x_i + h$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i, y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2						
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

Находим первый аргумент «внешней функции».

Скриншот интерфейса Microsoft Excel. В строке формул в ячейке D2 введена формула $=B2+(0,05/2)$. Таблица данных:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2}f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2}f(x_i; y_i))$	Δy_i	
2	0	1	2	1,025					
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

- Следующим шагом находим значение функции в точке y_0

Экран Excel с формулой в ячейке E2: $= (B2+5) - ((4*C2)/B2)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2	1,025	-2				
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							

- После чего можно рассчитать второй аргумент «внешней функции». Он находится по формуле: $y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0; y_0)$

Скриншот интерфейса Microsoft Excel, иллюстрирующий расчет второго аргумента «внешней функции».

Формула в ячейке F2: $=C2+((0,05/2)*E2)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95			
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									
24									

Ищем значение функции в точке, рассчитанной с учетом погрешности.

Файл | Главная | Вставка | Разметка страницы | Формулы | Данные | Рецензирование | Вид

Вставить | Calibri | 11 | A⁺ A⁻ | Шрифт | Выравнивание | Перенести текст | Обобщий | Число | Условное форматирование | Форматирование

Буфер обмена | Шрифт | Выравнивание | Число | Условное форматирование | Форматирование

G2 | \times \checkmark f_x | $= (D2+5) - ((4 * F2) / D2)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098		
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

Полученный результат умножаем на шаг разбиения.

Файл | Главная | Вставка | Разметка страницы | Формулы | Данные | Рецензирование | Вид

Calibri | 11 | A⁺ A⁻ | Ж К Ч | Буфер обмена | Шрифт | Выравнивание | Перенести текст | Объединить и поместить в центре | Число | Условное форматирование | Форматирование | Стили

H2 | \times \checkmark f_x | =G2*0,05

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05							
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

- Осуществляем поиск следующего значения y . Делается это по формуле: $y_{i(n)} = y_{i(n)-1} + \Delta y_{i(n)-1}$

Скриншот интерфейса Microsoft Excel, демонстрирующий таблицу для численного решения задачи Коши. В строке формул введена формула $=C2+H2$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05	1,920762195						
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									
24									

Копируем полученные значения по образцу. (Выделяем значения полей D, E, F, G, H и «растягиваем» на одну строку вниз)

ФАЙЛ ГЛАВНАЯ ВСТАВКА РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ ФОРМУЛЫ ДАННЫЕ РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ ВИД

Вставить Буфер обмена Шрифт Выравнивание Число Стили

Calibri 11 Перенести текст Общияй

Ж К Ч Объединить и поместить в центре % 000 0,00 0,00

Условное форматирование Форма как та

Стили

D2 : X ✓ fx =B2+(0,05/2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05	1,920762195						
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

(Выделяем значения полей C, D, E, F, G, H и «растягиваем» до конца таблицы)

Файл ГЛАВНАЯ ВСТАВКА РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ ФОРМУЛЫ ДАННЫЕ РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ ВИД

Вставить Буфер обмена Шрифт Выравнивание Число

Calibri 11 Перенести текст Обобщенное форматирование

С3 =C2+H2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05	1,920762195	1,075	-1,267189315	1,889082462	-0,954144046	-0,047707202	
4	2	1,1							
5	3	1,15							
6	4	1,2							
7	5	1,25							
8	6	1,3							
9	7	1,35							
10	8	1,4							
11	9	1,45							
12	10	1,5							
13	11	1,55							
14	12	1,6							
15	13	1,65							
16	14	1,7							
17	15	1,75							
18	16	1,8							
19	17	1,85							
20	18	1,9							
21	19	1,95							
22	20	2							
23									

Искомое приближенное решение:

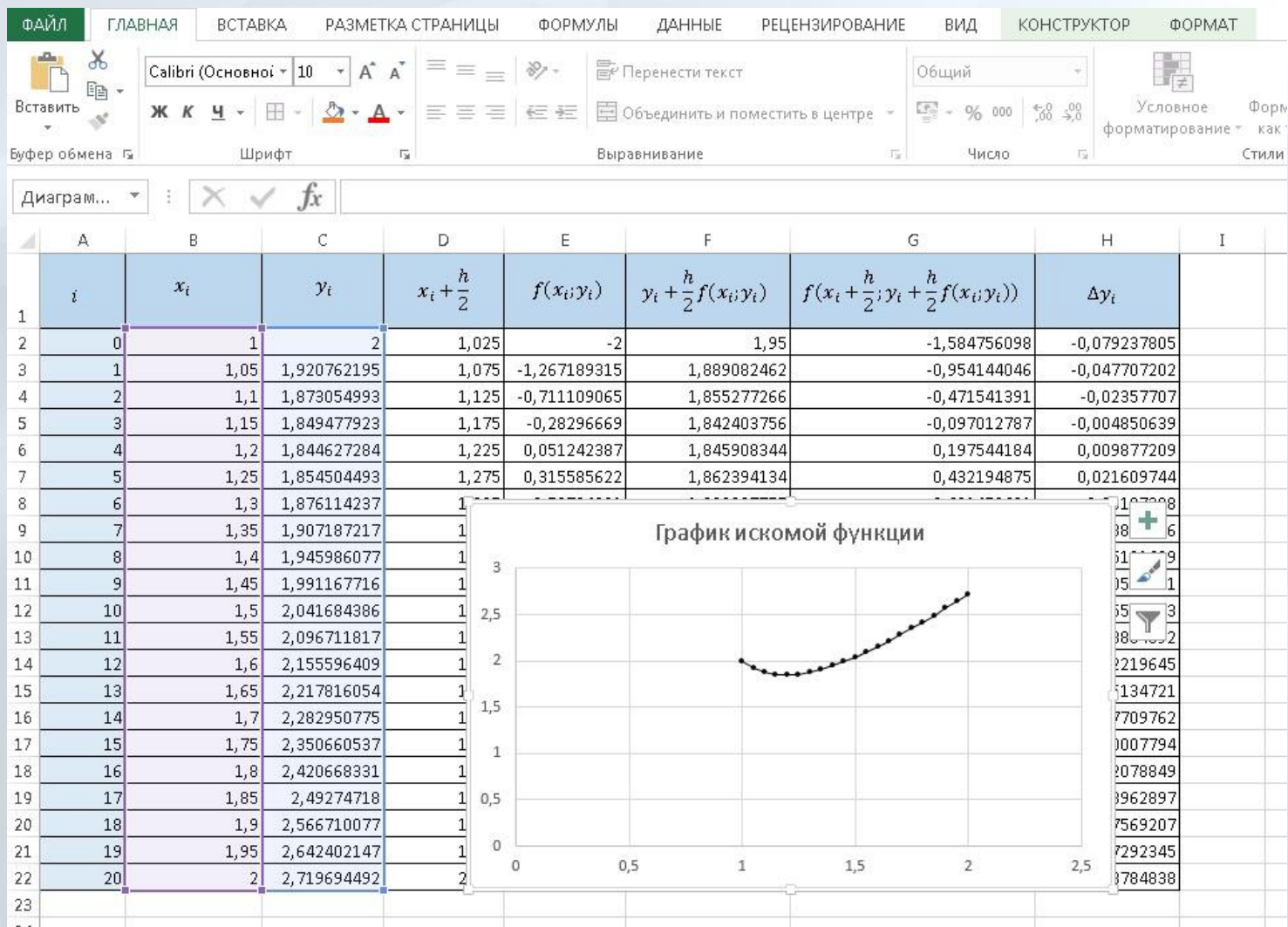
Файл | ГЛАВНАЯ | ВСТАВКА | РАЗМЕТКА СТРАНИЦЫ | ФОРМУЛЫ | ДАННЫЕ | РЕЦЕНЗИРОВАНИЕ | ВИД

Буфер обмена | Шрифт | Выравнивание | Число | Условное форматирование | Стили

С22 : \times \checkmark fx =C21+H21

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	i	x_i	y_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$f(x_i; y_i)$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)$	$f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i))$	Δy_i	
1									
2	0	1	2	1,025	-2	1,95	-1,584756098	-0,079237805	
3	1	1,05	1,920762195	1,075	-1,267189315	1,889082462	-0,954144046	-0,047707202	
4	2	1,1	1,873054993	1,125	-0,711109065	1,855277266	-0,471541391	-0,02357707	
5	3	1,15	1,849477923	1,175	-0,28296669	1,842403756	-0,097012787	-0,004850639	
6	4	1,2	1,844627284	1,225	0,051242387	1,845908344	0,197544184	0,009877209	
7	5	1,25	1,854504493	1,275	0,315585622	1,862394134	0,432194875	0,021609744	
8	6	1,3	1,876114237	1,325	0,52734081	1,889297757	0,621459601	0,03107298	
9	7	1,35	1,907187217	1,375	0,699074913	1,92466409	0,775977193	0,03879886	
10	8	1,4	1,945986077	1,425	0,840039781	1,966987071	0,903632783	0,045181639	
11	9	1,45	1,991167716	1,475	0,957123543	2,015095804	1,010333412	0,050516671	
12	10	1,5	2,041684386	1,525	1,055508303	2,068072094	1,100548606	0,05502743	
13	11	1,55	2,096711817	1,575	1,139130796	2,125190087	1,177691844	0,058884592	
14	12	1,6	2,155596409	1,625	1,211008978	2,185871633	1,244392903	0,062219645	
15	13	1,65	2,217816054	1,675	1,273476233	2,24965296	1,302694424	0,065134721	
16	14	1,7	2,282950775	1,725	1,328351117	2,316159553	1,354195239	0,067709762	
17	15	1,75	2,350660537	1,775	1,377061629	2,385087078	1,400155881	0,070007794	
18	16	1,8	2,420668331	1,825	1,420737042	2,456186757	1,44157697	0,072078849	
19	17	1,85	2,49274718	1,875	1,460276368	2,529254089	1,479257944	0,073962897	
20	18	1,9	2,566710077	1,925	1,496399838	2,604120073	1,513841407	0,07569207	
21	19	1,95	2,642402147	1,975	1,529687903	2,680644345	1,545846897	0,077292345	
22	20	2	2,719694492	2,025	1,560611016	2,758709767	1,575696756	0,078784838	
23									
24									

- Строим график. Выделяем пары значений x и y , далее «Вставка» → «Диаграммы» → «Точечная с прямыми отрезками и маркерами».



При решении данного ДУ аналитически результат будет равен — **2,71875**.

Вывод: усовершенствованный метод ломаных Эйлера дает более точные результаты в отличие от «классического» метода. Связано это с тем, что производная берется не в начале шага, а как промежуточное или среднее на разных участках одного шага. В процессе использования метода вычисляются несколько производных в разных частях шага, которые впоследствии усредняются. За счет этого точность метода возрастает на порядок.

Список литературы

1. Эльсгольц Л.Э. «Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление» (61 стр.), 1979г.
2. Демидович Б.П. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу», 1995г.
3. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. «Дифференциальные уравнения» (31 стр.), 1985г.