IV группа

Цель проекта:
научиться возводить двучлен в любую натуральную степень.

Возведём двучлен $(a+b)$ во вторую и третью степени:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Возведём двучлен $(a+b)$ в четвёртую и пятую степени алгебраическим способом:

$$(a+b)^4 = (a+b)^2(a+b)^2 = \left(a^2+2ab+b^2\right)\left(a^2+2ab+b^2\right) =$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = \left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)\left(a^2+2ab+b^2\right) =$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Понаблюдаем за степенями:

.Степень каждого одночлена равна показателю степени, в которую мы возводили двучлен.

.Степень первого множителя в каждой строке уменьшается от наибольшей до нулевой, степень второго множителя наоборот увеличивается от нулевой до наибольшей.

Теперь нам известны степени одночленов для любой натуральной степени, но коэффициенты остаются неизвестными. Понаблюдаем за коэффициентами одночленов. Для этого возведём двучлен в нулевую и первую степени:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$
$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

Мы замечаем, что первый и последний одночлен всегда имеет коэффициент 1. Запишем коэффициенты в виде треугольника, при этом коэффициенты первого и последнего одночленов образуют боковые стороны треугольника:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Нам известны боковые коэффициенты, но неизвестны коэффициенты находящиеся внутри треугольника. Понаблюдав за ними, мы догадались, чтобы получить внутренние коэффициенты необходимо сложить два вышестоящих над ним слева и справа числа. Теперь мы с лёгкостью можем вычислить шестую степень двучлена $(a+b)$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$$(a+b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6$$

Изображение Паскаля

Треугольник, составленный по описанному правилу, называют треугольником Паскаля, по имени хорошо известного вам из учебника физики французского философа, писателя, физика и математика Блеза Паскаля.

Треугольник Паскаля обладает массой интереснейших свойств, главное из которых мы уже заметили: не выполняя самого умножения с его помощью просто, быстро и точно можно возводить в любую степень двучлен $(a+b)$.

Правда, для того чтобы узнать коэффициенты разложения седьмой степени, надо знать их для шестой, а чтобы знать для шестой - сначала найти их для пятой и так далее до самого начала.