Вычислительная математика

Лекция 2
Методы оценки погрешностей

Ошибки при вычислениях

В кожух квадратного сечения (со стороной $2R$) помещен цилиндр радиуса R (рис. 1.1). По углам кожуха размещены сферические катки неизвестного радиуса r. Требуется определить объем таких катков. Решая эту задачу, из элементарного соотношения $(R+r)^2 = 2(R-r)^2$ получаем значения радиуса r и, соответственно, искомого объема:

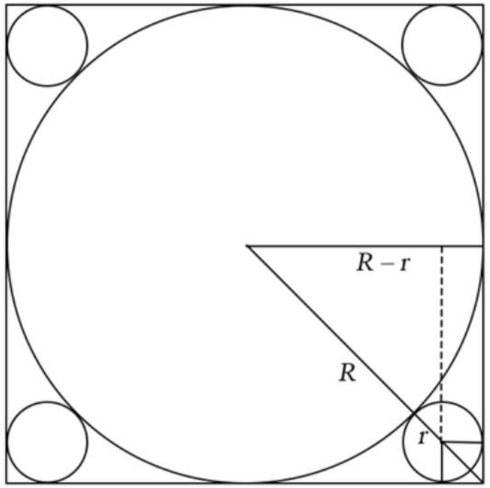


Рис. 1.1

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3.$$

Очевидно, что фигурирующий здесь куб отношения можно вычислить различными путями:

$$\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3 = \left(\sqrt{2}-1\right)^6 = (3-2\sqrt{2})^3 = 99-70\sqrt{2}.$$

Если под рукой нет калькулятора и единственными техническими средствами являются лист бумаги и авторучка, избегая многозначных чисел, примем значение $\sqrt{2}$ равным 1.4. Проведя соответствующие вычисления, обнаруживаем парадокс – приведенные выше формулы дают существенно разные значения 0.00463, 0.004096, 0.008 и 1 (истинное же значение, округленное до 7 знаков после десятичной точки, равно 0.0050506).

Возникают естественные вопросы. Какова точность полученного результата? С какой точностью нужно задавать исходные показатели для получения результата с заданным числом верных знаков (цифр)? Повлияют ли порядок вычислений или выбор метода на итог расчета?

Все вычислительные погрешности можно разделить на три группы.

1. Первая из них связана с *погрешностью округлений* в процессе вычислений. От нее практически невозможно избавиться; даже при компьютерном счете она не исчезает, хотя за счет представления в формате чисел с двойной точностью (`double precision`) и режима плавающей точки (`float point`) она уменьшается до незначимых величин.

2. При задании исходных данных мы, как правило, берем не истинные оценки, а приближенные. Объявляемый продавцом вес товара зависит от того, под каким углом он видит стрелку весов. Заработная плата рабочего выступает как приближенная оценка истинных затрат его труда. Большинство физических констант найдено в результате эксперимента. Использование подобных величин приводит к *неустранимой погрешности*, или *погрешности исходных данных*.

3. Одну и ту же задачу можно решать разными методами, каждый из которых вносит в результат свою погрешность – *погрешность метода*.

Абсолютная и относительная погрешности

Пусть α – приближенное значение некоторого числа А, точного значения которого мы не знаем. *По возможности малое число* $\Delta > 0$ такое, что $|\alpha - A| < \Delta$, называют *предельной абсолютной погрешностью* (слово «предельный» обычно опускают). Если в истинном значении $\sqrt{2} = 1.4142135623\ldots$ выполнить общепринятое округление до двух знаков после десятичной точки $\sqrt{2} \approx 1.41$, то абсолютная погрешность такого представления не превышает 0.005.

Абсолютная погрешность не всегда дает полную характеристику результата вычислений. Так при оценках, связанных с миллиардами рублей, точность до рубля едва ли разумна и недостижима (прогноз прибыли Сбербанка РФ на следующий год с такой точностью вызывает в лучшем случае усмешку читателя). С другой стороны, та же точность при оценке затрат на изготовление экземпляра разменной монеты едва ли приемлема. Абсолютная погрешность в 1 мм ничтожна при оценке расстояния от Москвы до Рио-де-Жанейро и абсурдна для расстояний между молекулами твердого вещества. Поэтому часто используется понятие *предельной относительной погрешности* $\delta = \dfrac{\Delta}{|A|}$ (очевидно, что в реальности при неизвестном А приходится использовать деление не на $|A|$, а на $|\alpha|$).

Элементарный здравый смысл подсказывает, что при работе с малыми (например, существенно меньшими 1) или большими (например, значимо превышающими 10) величинами более содержательную информацию несет относительная погрешность. В согласии с этим построено представление числовой информации в памяти компьютеров.

Компьютерное представление числа

При представлении чисел в памяти компьютеров используются две основные формы записи – с фиксированной (`fixed point`) или плавающей (`float point`) точкой.

В режиме `fixed point` обычно один двоичный разряд отводится на запись знака числа и остальные – на изображение его абсолютной величины (положение разделительной точки определяется устанавливаемым форматом). В однобайтовом поле (8 разрядов – бит) в зависимости от уговора о положении точки (считать число дробным, меньшим единицы, или целым) можно изображать числа из диапазона от 2^{-7} до $2^8 - 1 = 127$, в поле двойного слова (64 разряда) – от 2^{-63} до $2^{64} - 1$. Попытка записи чисел, меньших 2^{-7} или 2^{-63}, дает *машинный нуль*.

В режиме `float point` используют так называемую *нормальную форму*

$$a = \pm x \cdot q^{p},$$

где $1 / q \le |x| < 1$ – *мантисса* и p – *порядок* числа (например, $17.5 = 0.175 \cdot 10^2$, $0.000057 = 0.57 \cdot 10^{-4}$). В компьютерной записи один байт используется для отображения знака числа (1 бит), знака порядка (1 бит) и абсолютной величины порядка (6 бит). Мантисса записывается в остальных 3 или 7 байтах поля («слова» или «двойного слова»). Поэтому для поля типа «слово» (формат `real` в ряде систем программирования) диапазон допустимых значений составляет $[0.5 \cdot 2^{-64}, (1 - 2^{-24}) \cdot 2^{63}]$, что соответствует значениям от 10^{-20} до 10^{19} и 10–11 *значащим* десятичным *цифрам*. Выход за максимально возможный предел обычно ведет к прерыванию работы компьютера с сообщением о переполнении разрядной сетки (`overflow`).

Объявляя режим плавающей точки, мы автоматически приходим к приближенному представлению чисел, дробная часть которых не является конечной суммой степеней 2. Так двоичная запись мантиссы числа $0.1 = 0.8 \cdot 2^{-3}$ в 3×8 двоичных разрядах имеет вид 0.1100 1100 1100 1100 1100 110**1** (правило округления), т. е. машинная запись числа превышает истинное его значение на величину порядка $(2^{-25}) \cdot 2^{-3} \approx 10^{-28}$. Вроде бы погрешность ничтожна, но при компьютерном расчете, прибавив к нулю 10 раз двоичный эквивалент 0.1, получим значение, большее 1. Цикл с заголовком типа `while x≠1 do x:=x+0.1` не имеет шансов на завершение.

Усечение и округление

Рассмотрим любое действительное число p, представленное в ***нормализованной десятичной форме***:

(4) $$p = \pm 0{,}d_1 d_2 d_3 \ldots d_k d_{k+1} \ldots \times 10^n.$$

Здесь $1 \le d_1 \le 9$ и $0 \le d_j \le 9$ для $j > 1$. Предположим, что k — максимальное число десятичных цифр, на которое можно переносить десятичную точку при вычислениях на компьютере с использованием представления с плавающей точкой; действительное число p представим в виде $fl_{\text{chop}}(p)$,

(5) $$fl_{\text{chop}}(p) = \pm 0{,}d_1 d_2 d_3 \ldots d_k \times 10^n,$$

где $1 \le d_1 \le 9$ и $0 \le d_j \le 9$ для $1 < j \le k$. Число $fl_{\text{chop}}(p)$ называется ***представлением числа p усечением с плавающей точкой***. В этом случае k-я цифра $fl_{\text{chop}}(p)$ равна k-й цифре p. Альтернативой k-цифровому представлению является ***представление числа p округлением с плавающей точкой*** $fl_{\text{round}}(p)$, задаваемое в виде

(6) $$fl_{\text{round}}(p) = \pm 0{,}d_1 d_2 d_3 \ldots r_k \times 10^n,$$

где $1 \le d_1 \le 9$ и $0 \le d_j \le 9$ для $1 < j < k$ и последнюю цифру r_k получаем округлением числа $d_k d_{k+1} d_{k+2} \cdots$ до ближайшего целого числа. Например, действительное число

$$p = \frac{22}{7} = 3{,}142857142857142857\ldots$$

имеет следующие семизначные представления:

$$fl_{\text{chop}}(p) = 0{,}314285 \times 10^1,$$
$$fl_{\text{round}}(p) = 0{,}314286 \times 10^1.$$

Вообще, усечение и округление необходимо записать соответственно как 3,14285 и 3,14286. Читателю следует отметить, что, по существу, все компьютеры используют некоторую форму округления числа с плавающей точкой.

Погрешности элементарных вычислений

При сложении и вычитании абсолютная погрешность результата не превышает суммы абсолютных погрешностей операндов

$$\Delta_{a+b} = |a + b - (A + B)| = |(A \pm \Delta_a) + (B \pm \Delta_b) - (A + B)| \le \Delta_a + \Delta_b.$$

При ручном счете, суммируя операнды, имеющие разную абсолютную погрешность, выбирают операнд с максимальной погрешностью и остальные округляют с сохранением лишнего знака. Так при поиске 3.1 + 65.626 + 2.76435 достаточно найти сумму 3.1 + 65.63 + 2.76 =70.49 с последующим округлением до 70.5.

Для абсолютной погрешности суммы значительного количества n слагаемых приемлема менее завышенная *вероятностная* оценка

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i ,$$

где Δx_i – абсолютные погрешности слагаемых.

Что касается оценки относительной погрешности при суммировании, можно лишь показать, что при сложении чисел с одинаковыми знаками *относительная погрешность суммы не превышает наибольшей относительной погрешности операндов*

$$\delta\left(\sum_i x_i\right) = \Delta\left(\sum x_i\right) \Big/ \left|\sum x_i\right| < \max_i \delta\, x_i .$$

При вычитании относительная погрешность результата, близкого к нулю, может оказаться большой. Так при близких величинах $a = 47.132$ и $b = 47.111$ (относительная погрешность операндов равна $0.0005 / 47 \approx 0.00001$) относительная погрешность разности $a - b = 0.021$ равна $0.0005 / 0.021 \approx 0.05$, т. е. возросла в 5000 раз.

Относительная погрешность произведения и частного не превышает суммы относительных погрешностей операндов

$$\delta_{ab} = \Delta_{ab} / |ab| = \left|\frac{(A+\Delta a)(B+\Delta b) - AB}{ab}\right| = \left|\frac{B\cdot\Delta a + A\cdot\Delta b + \Delta a\cdot\Delta b}{ab}\right| \approx$$

$$\approx \left|\frac{B\cdot\Delta a + A\cdot\Delta b}{ab}\right| \le \left|\frac{B}{b}\cdot\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{A}{a}\cdot\frac{\Delta b}{b}\right| \approx \delta a + \delta b,$$

$$\delta_{a/b} = \Delta_{a/b} / |a/b| = \left|\left[\frac{(A+\Delta a)}{(B+\Delta b)} - \frac{A}{B}\right] / (a/b)\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{(A+\Delta a)(B-\Delta b)}{B^2-(\Delta b)^2} - \frac{A}{B}\right] / (a/b)\right| = \left|\left[\frac{[A\cdot B - A\cdot\Delta b + B\cdot\Delta a - \Delta a\cdot\Delta b]}{B^2-(\Delta b)^2} - \frac{A}{B}\right]\cdot\frac{b}{a}\right| \approx$$

$$\approx \left|\left[-\frac{A}{B}\cdot\frac{\Delta b}{B} + \frac{\Delta a}{B}\right]\cdot\frac{b}{a}\right| = \left|-\frac{Ab}{aB}\cdot\frac{\Delta b}{B} + \frac{b\cdot\Delta a}{aB}\right| \approx \left|-\frac{\Delta b}{B} + \frac{\Delta a}{a}\right| \le$$

$$\left|\frac{B}{b}\cdot\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{A}{a}\cdot\frac{\Delta b}{b}\right| \approx \delta a + \delta b,$$

абсолютная же погрешность зависит от значений самих операндов и при делении, например, на число, близкое к нулю, может оказаться большой.

Значащие цифры и верные знаки

Не прибегая к формальным определениям, заметим, что в записи 512.430 (можете еще приписать нули справа) присутствует 6 значащих цифр, а в записи 0.0023 – 2 значащие цифры. То же можно сказать и для экспоненциальных представлений $0.512430 \cdot 10^3$ и $0.23 \cdot 10^{-2}$.

Для числа 512.43… при абсолютной его погрешности 0.08 диапазон истинного значения от 512.35 до 512.51 и совпадение трех первых цифр позволяют назвать их *верными*. Остальные цифры *сомнительны*.

Записав значение 3.1415, мы гарантируем верность пяти значащим цифрам и абсолютную погрешность 0.00005. Для простоты оценок *относительная погрешность принимается равной абсолютной погрешности, деленной на удвоенную первую его значащую цифру*. Для нашего примера относительная погрешность равна 0.00005/6.

Еще раз обратите внимание, что записи 1 млн. и 1 000 000 руб. не эквивалетны – их абсолютные погрешности не превышают 0.5 млн. рублей и 50 коп. Получив оценку 123456 с гарантией лишь 4 верных знаков, мы должны записать ее в виде $1234 \cdot 10^2$, $0.1234 \cdot 10^6$ и т. п.

Определение 1.8. Говорят, что число $\widehat{p}$ является приближением p с d значащими цифрами, если d является наибольшим положительным целым число, для которого

$$\frac{|p-\widehat{p}|}{|p|} < \frac{10^{-d}}{2}. \qquad (2)$$

▲

Потеря значащих цифр

Рассмотрим два приблизительно равных числа $p = 3{,}1415926536$ и $q = 3{,}1415957341$, имеющих точность, равную 11 десятичным цифрам. Предположим, что разность между числами равна $p - q = -0{,}0000030805$. Поскольку первые шесть цифр p и q одинаковы, разность между $p - q$ состоит только из пяти точных десятичных цифр. Этот феномен называется ***потерей значащих цифр*** или ***потерями из-за вычитания***. Эта потеря точности окончательного ответа может подкрасться, когда о ней не подозреваешь.

Погрешности и ряд Тейлора

Аналитическая (непрерывная дифференцируемая) функция $F(x)$ представима в виде степенного ряда – при $x = x^*$ разлагается в окрестности x^* в сходящийся ряд Тейлора*

$$F(x) = F(x^*) + F'(x^*)(x - x^*) + \frac{F''(x^*)}{2!}(x - x^*)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{F^{(n)}(x^*)}{n!}(x - x^*)^n + \ldots$$

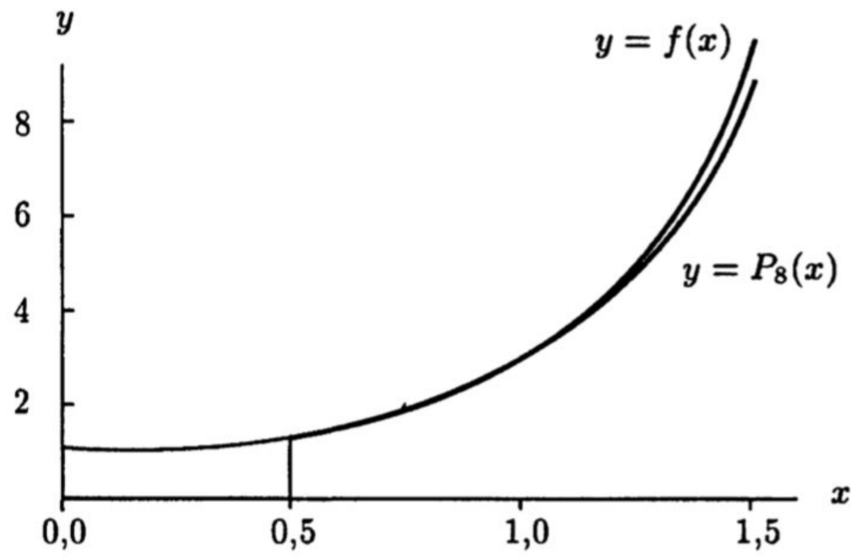
(при $x^* = 0$ этот ряд называется рядом Маклорена**).

Представьте себе, что вам необходимо найти значение синуса 400° при отсутствии копьютера. Для функции $\sin(x)$ ряд Маклорена

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

Естественно перевести значение аргумента из градусной меры в радианную $x = 400°/180°\cdot\pi = 2\frac{2}{9}\cdot\pi$ радиан. С учетом периодичности функции уменьшаем x на 2π, получая $x = \frac{2}{9}\pi \approx 0.636626$.

Тогда $\sin(x) = 0.6981 - \frac{0.6981^3}{3!} + \frac{0.6981^5}{5!} - \ldots = 0.6981 - 0.0567 +$ $+ 0.0014 - 1.603719 \cdot 10^{-5} + \ldots = 0.6428$. Заметьте, что уже четвертый член нашего знакочередующегося ряда меньше $0.5 \cdot 10^{-4}$ и не влияет на четвертую значащую цифру.



Высказанные замечания лежат и в основе практически всех стандартных процедур вычисления различных функций*. Так для показательной функции

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

при $|x| < 1$ восьмое слагаемое равно $0.25 \cdot 10^{-4}$ и сумма восьми членов ряда гарантирует не менее пяти верных знаков.

Ряды не бесполезны и в более сложных случаях. Например:

$$\int_0^z \frac{\sin(x)}{x}dx = \int_0^z \frac{1}{x}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right]dx = 1 - \frac{z^3}{3\cdot 3!} + \frac{z^5}{5\cdot 5!} - \cdots$$

В этом случае имеет место ряд с весьма быстрым убыванием слагаемых (по модулю) при небольших значениях аргумента.

Формула Тейлора и итерационные методы

Каждый старшеклассник умеет «искать» квадратный корень и пасует перед корнями большего порядка. Обратимся к задаче поиска $y = \sqrt[k]{x}$. Заменим ее задачей решения уравнения $F(y) = y^k - x = 0$ и воспользуемся разложением $F(y)$ в ряд Тейлора в окрестности значения y_n (ограничимся учетом только первых двух ее членов):

$$F(y) \cong F(y_n) + (y - y_n)\, F'(y_n) = y_n^{\,k} - x + (y - y_n)\, k\, y_n^{\,k-1} = 0,$$

откуда получаем улучшенное приближение $y = y_{n+1}$ для искомого корня

$$y_{n+1} = \frac{k-1}{k} y_n + \frac{x}{k y_n^{k-1}}.$$

Задавшись некоторым начальным значением y_0, отыскиваем последующие приближения до тех пор, пока они не окажутся близкими в смысле заданной абсолютной или относительной погрешности. Например, для кубического корня такой процесс последовательных приближений (итерационный процесс)

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2y_n + \frac{x}{y_n^2}\right), n = 0, 1, 2, \ldots$$

при $x = 10$ и $y_0 = 2$ дает $y_1 = 2.083$, $y_2 = 2.156$, $y_3 = 2.154$ и т. д.

Однако, взяв уравнение $4x - 4 = 0$, преобразовав его к виду $x = 4 - 3x$ и запустив итерационный процесс $x_{n+1} = 4 - 3x_n$, получаем $x_0 = 0$, $x_1 = 4$, $x_2 = -8$, $x_3 = 28$, $x_3 = -80$ и т. д. Очевидно, возник расходящийся итерационный процесс, нарушены условия сходимости, обсуждение которых последует ниже.

Итерационные методы эффективны для решения многих задач, особенно задач большой размерности. Достоинством итерационных процедур является возможность получения результата с любой требуемой точностью и их устойчивость к промежуточным ошибкам (незначительные арифметические ошибки могут замедлить процесс приближений, не влияя на конечный результат). Однако при таком подходе должна быть уверенность в сходимости процесса и задан какой-то критерий для выбора начального приближения.

Прямая задача теории погрешностей

Очевидно, что при массовых вычислениях никто не занимается утомительной пооперационной оценкой погрешностей. При ручном счете используют 1-2 *лишних* значащих цифры, что избавляет от лишней и бесполезной работы, но в итоговых оценках учитывают присутствие наименее точных исходных данных. При машинном счете стараются избежать гигантской погрешности из-за вычитания близких величин, делений на числа, близкие к нулю, умножений очень маленьких чисел на очень большие. Получив девятизначный результат, не надейтесь на правильность всех цифр. Имейте в виду − если отбрасываемая цифра 5 и за ней последуют нулевые, работает *правило четной цифры*: увеличение последней значащей выполняется лишь в случае, если она нечетная. Так, округляя числа 1.2500 и 1.3500 до двух значащих цифр, получаем 1.2 и 1.4

Если воспользоваться известной формулой Тейлора для функции нескольких переменных

$$F(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n) =$$

$$= F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j}\Delta x_i\,\Delta x_j + \ldots$$

и ограничиться только линейной ее частью, то для абсолютной и относительной погрешностей при вычислении значений функции $F(X)$ можно установить приближенные оценки вида

$$\Delta F = \sum_i \left|\frac{\partial F}{\partial x_i}\right| \Delta x_i,\ \delta F = \sum_i \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\ln(F)\right| \Delta x_i, \tag{1.1}$$

где Δx_i – абсолютные погрешности аргументов.

Так при вычислении квадратного корня обнаруживаем

$$\Delta(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x,\ \delta(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}\ln(\sqrt{x})\,\Delta x = \frac{1}{2}\delta x,$$

а для значений $F(a, b) = a^2 + e^{a\sin(b)}$ получаем

$$\Delta F \approx \left|2a + \sin(b)\,e^{a\sin(b)}\right|\Delta a + \left|\cos(b)\,e^{a\sin(b)}\right|\Delta b.$$

Пример решения прямой задачи

Пример 1. Попробуем оценить погрешность результата вычисления значения $F(a, b, t) = (a^2 + b^3) / \cos(t)$, если $a = 28.3 \pm 0.02$, $b = 7.45 \pm 0.01$, $t = 0.7854 \pm 0.0001$.

Абсолютные погрешности исходных данных:

$$\Delta a = 0.02,\ \Delta b = 0.01,\ \Delta t = 0.0001.$$

Относительные погрешности исходных данных:

$$\delta a = 0.02 / 28.3 = 0.00071,\ \delta b = 0.01 / 7.45 = 0.00135,$$

$$\delta t = 0.0001 / 0.7854 = 0.00013.$$

Ориентируясь на (1.1), имеем

$$F = (a^2 + b^3) / \cos(t) = 1214.4 / 0.7071 = 1717.44,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2a \big/ \cos(t) = 80.05,\ \frac{\partial F}{\partial b} = 3b^2 \big/ \cos(t) = 235.48;$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{a^2 + b^3}{\cos^2 t} \sin(t) = 1717.4;$$

$$\Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial F}{\partial b}\right| \Delta b + \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right| \Delta t = 4.1275;$$

$$\delta F = \Delta F / F = 0.0024\ (\approx 0.25\ \%).$$

Оценив диапазон возможных значений величины F, обнаруживаем доверие к первым трем цифрам и, выполнив округление, имеем итог $\boldsymbol{F = 1.72 \cdot 10^3}$ (но не 1720).

Обратная задача теории погрешностей

Наряду с рассмотренной *прямой задачей* оценки погрешности итога вычисления некоторого выражения при известных погрешностях его параметров определенный интерес представляет и *обратная задача теории погрешностей* – с какой погрешностью достаточно задать исходные параметры, чтобы обеспечить требуемую точность результата? Эта задача математически некорректна и может иметь множество решений. Одно из них базируется на *принципе равных влияний* (предположение, что каждый из параметров вносит одинаковую абсолютную погрешность в общую погрешность результата) и имеет вид

$$\Delta x_i = \frac{|x_i| \Delta F}{\sum_i \left| x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|}. \tag{1.2}$$

Пример решения обратной задачи

Пример 2. С какой точностью нужно задать параметры a, b, t при вычислении значения $F = (a^2 + b^3) / \cos(t)$ с $m = 5$ верными знаками, если заданы $a \approx 28.3$, $b \approx 7.45$, $t \approx 0.7854$?

Находим $a^2 = 800.9$, $b^3 = 413.5$, $\cos(t) = 0.7071$, $a^2 + b^3 = 1214.4$, $F = (a^2 + b^3) / \cos(t) = 1214.4 / 0.7071 = 1717.4$ (результат записан с пятью значащими цифрами, но следует ли всем им доверять?).

Ориентируясь на (1.2), находим

$$a\ (dF / da) = 2a^2 / \cos(t) = 1601.9 / 0.7071 = 2265.45,$$

$$b\ (dF / db) = 2b^3 / \cos(t) = 827.0 / 0.7071 = 1169.57,$$

$$t\ (dF / dt) = t\ (a^2 + b^3) / \cos^2(t) \sin(t) = 0.7071 \cdot 1214.4 / 0.7071 =$$

$$= 1214.4,$$

$$\textit{знаменатель}\text{: } 2265.45 + 1169.57 + 1214.4 = 4649.4.$$

Отсюда допустимая погрешность исходных параметров равна

$$\Delta a = 28.3 \cdot 0.008572 / 4649.4 = 0.00005 = 0.5 \cdot 10^{-4};$$

$$\Delta b = 7.45 \cdot 0.008572 / 4649.4 = 0.00001 = 0.1 \cdot 10^{-4};$$

$$\Delta t = 0.7071 \cdot 0.008572 / 4649.4 = 0.000001 = 0.1 \cdot 10^{-5}.$$

Сравнивая найденные оценки с фактическими погрешностями входных величин ($\Delta a = 0.05$, $\Delta b = 0.005$, $\Delta t = 0.00005$), видим, что доверять пяти цифрам в найденном значении F нельзя.

Контрольные вопросы

1. Есть ли разница в представлении значений $0.5 \cdot 10^{-4}$, $0.005 \cdot 10^{-2}$, 0.00005, 0.000050?

2. Оценка по относительной погрешности, в отличие от абсолютной, разумна для величин, близких к единице или к 10^9?

3. На экран калькулятора выдано значение 12.333333. Если его относительная погрешности равна 0.001, то его запись с верными цифрами имеет вид 12.3300000, 12.33, 12.3 или 12.300000?

4. При вычислении синуса от малых значений аргумента абсолютная погрешность неизменна, удваивается или уменьшается вдвое?

5. С какой точностью достаточно задать число $\pi = 3.14159265358979323846\ldots$, чтобы найти объем шара с пятью верными знаками?

6. В одном из списков летописи, использованном одним из «птенцов гнезда Петрова» Василием Татищевым при написании «Истории Российской», сообшалось, что князь «…выступил в поход с **20000 воинов**», в другом списке – «**с 20 тысячами воинов**». Как следовало писать Татищеву, как вы воспринимаете эту информацию?

Практика