

Математика алгебра

Практическое занятие 1

Матрицы, операции с матрицами.

§ 1. Матрицы и действия над ними

1. Определение матрицы. Матрицей называется прямоугольная

Чаще всего элементы матрицы обозначаются одной буквой с двумя индексами, указывающими «адрес» элемента — первый индекс дает номер строки, содержащей элемент, второй — номер столбца. Таким образом, матрица (размеров $m \times n$) записывается в форме

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицы, составленные из чисел, естественно возникают при рассмотрении систем линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Входные данные для этой задачи — это множество коэффициентов, естественно составляющих матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

и совокупность свободных членов, образующих матрицу $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

2. **Сложение матриц и умножение матрицы на число.** Введем в рассмотрение алгебраические действия над матрицами. Рассматриваем матрицы с элементами из некоторого поля K . При этом две матрицы считаются *равными*, если у них совпадают элементы, стоящие на одинаковых местах.

Определим *произведение элемента* $c \in K$ *на матрицу* $A =$
 $= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$:

$$cA \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

(для матриц над некоммутативным ассоциативным кольцом следует различать два произведения cA и Ac).

Для матриц одинакового строения, т. е. имеющих одинаковое число строк и столбцов, определяется *сложение* по правилу: если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

то

$$A + B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

т. е. элементами *суммы* двух матриц является сумма соответствующих элементов слагаемых матриц.

Отметим некоторые свойства действий.

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ — ассоциативность сложения.

2. $A + B = B + A$ — коммутативность сложения.

3. Матрица 0 , состоящая из нулей, играет роль нуля: $A + 0 = A$ при любой A .

4. Для любой матрицы A существует противоположная $-A$ такая, что $A + (-A) = 0$. (В качестве матрицы $-A$, очевидно, следует взять матрицу $(-1)A$, элементы которой отличаются от элементов A знаком.)

5. $(c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A$.

6. $c(A_1 + A_2) = cA_1 + cA_2$.

7. $c_1(c_2A) = (c_1c_2)A$.

8. $1 \cdot A = A$.

✓ 3. Умножение матриц. Введем теперь действие *умножения матрицы на матрицу*. Предварительно рассмотрим частный случай: Произведением строки A на столбец B той же длины,

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

Для прямоугольных матриц A и B произведение определено, если длины строк первого сомножителя A равны длинам столбцов второго сомножителя B , т. е. если число столбцов A равно числу строк B . Именно, произведение AB матриц A и B составляется из произведений строк A на столбцы B , при их естественном расположении в матрицу. Точнее: произведением AB матрицы A на матрицу B , где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix},$$

называется матрица C , элемент c_{ij} i -й строки и j -го столбца которой равен произведению i -й строки A на j -й столбец B , т. е. равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на элементы j -го столбца матрицы B . Таким образом,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{\alpha=1}^k a_{i\alpha}b_{\alpha j}.$$

Рассмотрим примеры:

$$1. (1, 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11.$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 23 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 14 & 22 \end{pmatrix}.$$

Последние два примера поучительны тем, что в них рассматриваются произведения одинаковых сомножителей, но в разных порядках. Результаты получились различными. Следовательно, свойство коммутативности при умножении даже квадратных матриц не имеет места.

Умножение матриц производится методом Силвестера. В формуле для

Условие, когда произведение матриц определено, а также размеры произведения двух матриц удобно изобразить при помощи схематического рисунка:

$$\begin{array}{c}
 k \\
 \boxed{A} \\
 m
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 n \\
 \boxed{B} \\
 k
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \boxed{AB} \\
 n \\
 m
 \end{array}$$

Ясно, что если определены произведения AB и BA , то число строк A равно числу столбцов B и число строк B — числу столбцов A . Оба произведения AB и BA будут квадратными матрицами, но разных размеров, если A и B не квадратные. Если A и B квадратные, то AB не обязано равняться BA , как мы только что видели на примере. Матрицы A и B , для которых $AB = BA$, называются *коммутирующими*. Например, матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ коммутируют, ибо $AB = BA = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 24 & 36 \end{pmatrix}$.

4. Транспонирование матриц. Замена строк матрицы на ее столбцы, а столбцов — на строки называется *транспонированием* матрицы. Так, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то транспонированная с ней матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что дважды транспонировать — значит вернуться к исходной матрице: $(A^T)^T = A$. Ясно также, что $(A + B)^T = A^T + B^T$ и $(cA)^T = cA^T$.

Действия над матрицами
схематически:
Сложение

$$A+B: \begin{matrix} m \\ \boxed{} \\ n \end{matrix} + \begin{matrix} m \\ \boxed{} \\ n \end{matrix} = \begin{matrix} \\ \boxed{} \\ n \end{matrix} m$$

Умножение матрицы на

$$cA: \begin{matrix} m \\ \boxed{} \\ n \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \\ \boxed{} \\ n \end{matrix} m$$

Умножение матрицы на

$$AB: \begin{matrix} m \\ \boxed{} \\ k \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \\ \boxed{} \\ n \end{matrix} k = \begin{matrix} \\ \boxed{} \\ n \end{matrix} m$$

Транспонирование
матрицы

$$A^T: \begin{matrix} m \\ \boxed{} \\ n \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \\ \boxed{} \\ m \end{matrix} n$$

Эти действия обладают свойствами:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
2. $A + B = B + A$.
3. Существует 0 : $A + 0 = 0 + A = A$.
4. Для A существует $-A$: $A + (-A) = 0$.
5. $(c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A$.
6. $c(A_1 + A_2) = cA_1 + cA_2$.
7. $c_1(c_2A) = (c_1c_2)A$.
8. $1 \cdot A = A$.

9. $(AB)C = A(BC)$.
10. $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.
11. $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$.
12. $(cA)B = A(cB) = cAB$.

13. Существуют единицы, именно, если $A = \begin{matrix} \boxed{} & m \\ n & \end{matrix}$, то

$$E_m A = A E_n = A.$$

14. $(A^T)^T = A$.
15. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
16. $(cA)^T = cA^T$.
17. $(AB)^T = B^T A^T$.

1) Действие первое. Вынесение минуса из матрицы (внесение минуса в матрицу).

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Вынесем минус за пределы матрицы, сменив у КАЖДОГО элемента матрицы знак:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 7 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

3) Действие третье. Транспонирование матрицы.

Для того чтобы транспонировать матрицу, нужно ее строки записать в столбцы транспонированной матрицы.

Пример:

Транспонировать матрицу $D = (7 \ 3 \ -12 \ 0 \ 34)$

Строка здесь всего одна и, согласно правилу, её нужно записать в столбец:

$$D^T = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -12 \\ 0 \\ 34 \end{pmatrix} \text{ – транспонированная матрица.}$$

Транспонировать матрицу $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

Сначала переписываем первую строку в первый столбец:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$
$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ 0 & * & * \\ -2 & * & * \end{pmatrix}$$

Потом переписываем вторую строку во второй столбец:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$
$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & -5 & * \\ 0 & 4 & * \\ -2 & -7 & * \end{pmatrix}$$

И, наконец, переписываем третью строку в третий столбец:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$
$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & -4 \\ -2 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

4) Действие четвертое. Сумма (разность) матриц.

Сумма матриц действие несложное.

НЕ ВСЕ МАТРИЦЫ МОЖНО СКЛАДЫВАТЬ. Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были **ОДИНАКОВЫМИ ПО РАЗМЕРУ**.

Например, если дана матрица «два на два», то ее можно складывать только с матрицей «два на два» и никакой другой!

$$\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Пример:

Сложить матрицы $F = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ и $G = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}$

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$\begin{aligned} F + G &= \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+(-4) & -1+(-3) \\ -5+15 & 0+7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 12-4 & -1-3 \\ -5+15 & 0+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Для разности матриц правило аналогичное, **необходимо найти разность соответствующих элементов.**

—

Для разности матриц правило аналогичное, **необходимо найти разность соответствующих элементов.**

Пример:

Найти разность матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A - H &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-4) & 5 - 3 & -17 - (-15) \\ -1 - (-5) & 0 - (-7) & 10 - 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 + 4 & 5 - 3 & -17 + 15 \\ -1 + 5 & 0 + 7 & 10 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

А как решить данный пример проще, чтобы не запутаться? Целесообразно избавиться от лишних минусов, для этого внесем минус в матрицу H :

$$\begin{aligned} A - H &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 15 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 + 4 & 5 - 3 & -17 + 15 \\ -1 + 5 & 0 + 7 & 10 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5) Действие пятое. Умножение матриц.

Какие матрицы можно умножить?

Чтобы матрицу K можно было умножить на матрицу L нужно, чтобы число столбцов матрицы K равнялось числу строк матрицы L .

Пример:

Можно ли умножить матрицу $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ на матрицу $L = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$?

$$KL = \overbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}^{m=2 \text{ столбца}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{n=2 \text{ строки}}$$

$m = n$, значит, умножать данные матрицы можно.

А вот если матрицы переставить местами, то, в данном случае, умножение уже невозможно!

$$LK = \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}^{m=1 \text{ столбец}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}_{n=2 \text{ строки}}$$

$m \neq n$, следовательно, выполнить умножение невозможно:

$$\cancel{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}$$

Пример:

Умножить матрицу $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ на матрицу $L = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 \end{pmatrix}$$

$$KL = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Пример сложнее:

Умножить матрицу $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ на матрицу $N = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

Формула: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 & a_1d_1 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 & a_2d_1 + b_2d_2 \end{pmatrix}$

$$MN = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 & 2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 9 - 6 \cdot 6 & 4 \cdot (-6) - 6 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате получена так называемая нулевая матрица.

Попробуйте самостоятельно выполнить умножение NM (правильный ответ $\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$).

Обратите внимание, что $MN \neq NM$! Это почти всегда так!

Таким образом, **при умножении переставлять матрицы нельзя!**

Если в задании предложено умножить матрицу M на матрицу N , то и умножать нужно именно в таком порядке. Ни в коем случае не наоборот.

Переходим к матрицам третьего порядка:

$$\text{Умножить матрицу } P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \text{ на матрицу } R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Формула очень похожа на предыдущие формулы:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1d_1 + b_1d_2 + c_1d_3 \\ a_2d_1 + b_2d_2 + c_2d_3 \\ a_3d_1 + b_3d_2 + c_3d_3 \end{pmatrix}$$

$$PR = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ -16 \end{pmatrix}$$

А теперь попробуйте самостоятельно разобраться в умножении следующих матриц:

$$\text{Умножьте матрицу } P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \text{ на матрицу } S = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Вот готовое решение, но постарайтесь сначала в него не заглядывать!

$$\begin{aligned} PS &= \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4 - 4 \cdot 9 & 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) - 4 \cdot 6 & 5 \cdot 5 + 8 \cdot 3 - 4 \cdot 5 \\ 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 - 5 \cdot 9 & 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-1) - 5 \cdot 6 & 6 \cdot 5 + 9 \cdot 3 - 5 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 7 \cdot 4 - 3 \cdot 9 & 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 6 & 4 \cdot 5 + 7 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. С.Петербург, издательство «Лань», 1999

§ 1. Действия над матрицами

219. Выполнить действия:

a) $(1, 2, 1, -1) + (3, 2, -1, 2);$

b) $3(1, -1, 0, 3) + 2(-1, 2, 3, 1) - (1, 1, 6, 11);$

c) $4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

220. Умножить матрицы:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

f) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix};$

g) $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{pmatrix}.$

221. Выполнить действия:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$;

223. Умножить матрицы:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $(1 \ 2 \ 3)$; д) $(1 \ 2 \ 3)$ и $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

224. Вычислить AA^T , где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, а A^T — матрица, транспонированная к A .

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

⇒ Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют *канонической*, например

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание:

221. Выполнить действия:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^a; & \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^a; & \text{c) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^b; \\ \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n; & \text{e) } \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^n. \end{array}$$

223. Умножить матрицы:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; & \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \\ \text{c) } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ и } (1 \ 2 \ 3); & \text{d) } (1 \ 2 \ 3) \text{ и } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

224. Вычислить AA^T , где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, а A^T — матрица, транспонированная к A .