Математика алгебра

Практическое занятие 1

Матрицы, операции с матрицами.

§ 1. Матрицы и действия над ними

1. Определение матрицы. *Матрицей* называется прямоугольная

Чаще всего элементы матрицы обозначаются одной буквой с двумя индексами, указывающими «адрес» элемента — первый индекс дает номер строки, содержащей элемент, второй — номер столбца. Таким образом, матрица (*размеров* $m \times n$) записывается в форме

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицы, составленные из чисел, естественно возникают при рассмотрении систем линейных уравнений

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{gathered}$$

Входные данные для этой задачи — это множество коэффициентов, естественно составляющих матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

и совокупность свободных членов, образующих матрицу $\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$.

2. Сложение матриц и умножение матрицы на число. Введем в рассмотрение алгебраические действия над матрицами. Рассматриваем матрицы с элементами из некоторого поля K. При этом две матрицы считаются *равными*, если у них совпадают элементы, стоящие на одинаковых местах.

Определим *произведение элемента* $c \in K$ *на матрицу* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$:

$$cA \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ ca_{m1} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

(для матриц над некоммутативным ассоциативным кольцом следует различать два произведения cA и Ac).

Для матриц одинакового строения, т. е. имеющих одинаковое число строк и столбцов, определяется *сложение* по правилу: если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

то

$$A + B \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

т. е. элементами *суммы* двух матриц является сумма соответствующих элементов слагаемых матриц.

Отметим некоторые свойства действий.

1. $(A+B)+C=A+(B+C)$ — ассоциативность сложения.

2. $A+B=B+A$ — коммутативность сложения.

3. Матрица 0, состоящая из нулей, играет роль нуля: $A+0=A$ при любой A.

4. Для любой матрицы A существует противоположная $-A$ такая, что $A+(-A)=0$. (В качестве матрицы $-A$, очевидно, следует взять матрицу $(-1)A$, элементы которой отличаются от элементов A знаком.)

5. $(c_1+c_2)A=c_1A+c_2A$.

6. $c(A_1+A_2)=cA_1+cA_2$.

7. $c_1(c_2A)=(c_1c_2)A$.

8. $1\cdot A=A$.

3. Умножение матриц. Введем теперь действие *умножения матрицы на матрицу*. Предварительно рассмотрим частный случай: Произведением строки A на столбец B той же длины,

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix},$$

Для прямоугольных матриц A и B произведение определено, если длины строк первого сомножителя A равны длинам столбцов второго сомножителя B, т. е. если число столбцов A равно числу строк B. Именно, произведение AB матриц A и B составляется из произведений строк A на столбцы B, при их естественном расположении в матрицу. Точнее: произведением AB матрицы A на матрицу B, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kn} \end{pmatrix},$$

называется матрица C, элемент c_{ij} i-й строки и j-го столбца которой равен произведению i-й строки A на j-й столбец B, т. е. равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на элементы j-го столбца матрицы B. Таким образом,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha}b_{\alpha j}.$$

Рассмотрим примеры:

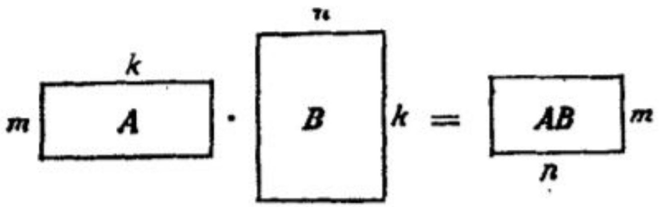
1. $(1,\ 2)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=1\cdot 3+2\cdot 4=11.$

2. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 5&1\cdot 2+2\cdot 3\\3\cdot 1+4\cdot 5&3\cdot 2+4\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&8\\23&18\end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix}1&2\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 3&1\cdot 2+2\cdot 4\\5\cdot 1+3\cdot 3&5\cdot 2+3\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&10\\14&22\end{pmatrix}.$

Последние два примера поучительны тем, что в них рассматриваются произведения одинаковых сомножителей, но в разных порядках. Результаты получились различными. Следовательно, свойство коммутативности при умножении даже квадратных матриц не имеет места.

Условие, когда произведение матриц определено, а также размеры произведения двух матриц удобно изобразить при помощи схематического рисунка:



Ясно, что если определены произведения AB и BA, то число строк A равно числу столбцов B и число строк B — числу столбцов A. Оба произведения AB и BA будут квадратными матрицами, но разных размеров, если A и B не квадратные. Если A и B квадратные, то AB не обязано равняться BA, как мы только что видели на примере. Матрицы A и B, для которых $AB = BA$, называются *коммутирующими*. Например, матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ коммутируют, ибо $AB = BA = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 24 & 36 \end{pmatrix}$.

4. Транспонирование матриц. Замена строк матрицы на ее столбцы, а столбцов — на строки называется *транспонированием* матрицы. Так, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

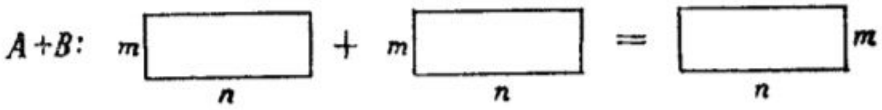
то транспонированная с ней матрица

$$A^{\text{т}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

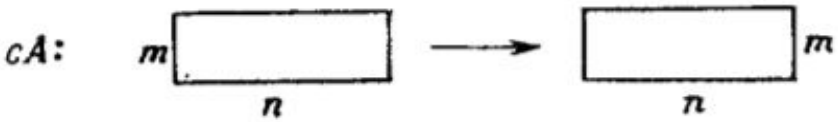
Ясно, что дважды транспонировать — значит вернуться к исходной матрице: $(A^{\text{т}})^{\text{т}} = A$. Ясно также, что $(A + B)^{\text{т}} = A^{\text{т}} + B^{\text{т}}$ и $(cA)^{\text{т}} = cA^{\text{т}}$.

Действия над матрицами схематически:

Сложени

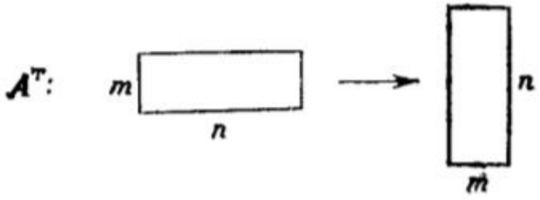


Умножение матрицы на



Умножение матрицы на

Транспонирование матриц



Эти действия обладают свойствами:

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$.
2. $A+B = B+A$.
3. Существует 0: $A+0 = 0+A = A$.
4. Для A существует $-A$: $A+(-A) = 0$.
5. $(c_1+c_2)A = c_1A + c_2A$.
6. $c(A_1+A_2) = cA_1 + cA_2$.
7. $c_1(c_2A) = (c_1c_2)A$.
8. $1\cdot A = A$.

9. $(AB)C = A(BC)$.
10. $A(B_1+B_2) = AB_1 + AB_2$.
11. $(A_1+A_2)B = A_1B + A_2B$.
12. $(cA)B = A(cB) = cAB$.

13. Существуют единицы, именно, если $A = \underbrace{\boxed{}}_{n}{}^{m}$, то

$E_mA = AE_n = A$.

14. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.
15. $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$.
16. $(cA)^{\mathrm{T}} = cA^{\mathrm{T}}$.
17. $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

1) Действие первое. Вынесение минуса из матрицы (внесение минуса в матрицу).

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 4 & -7\\ 6 & -4 & -6\end{pmatrix}$$

Вынесем минус за пределы матрицы, сменив у КАЖДОГО элемента матрицы знак:

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ -5 & 4 & -7\\ 6 & -4 & -6\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & -4 & 7\\ -6 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

3) Действие третье. Транспонирование матрицы.

Для того чтобы транспонировать матрицу, нужно ее строки записать в столбцы транспонированной матрицы.

Пример:

Транспонировать матрицу $D=\begin{pmatrix}7 & 3 & -12 & 0 & 34\end{pmatrix}$

Строка здесь всего одна и, согласно правилу, её нужно записать в столбец:

$$D^T=\begin{pmatrix}7\\ 3\\ -12\\ 0\\ 34\end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица.

Транспонировать матрицу $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

Сначала переписываем первую строку в первый столбец:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ 0 & * & * \\ -2 & * & * \end{pmatrix}$$

Потом переписываем вторую строку во второй столбец:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & -5 & * \\ 0 & 4 & * \\ -2 & -7 & * \end{pmatrix}$$

И, наконец, переписываем третью строку в третий столбец:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & -4 \\ -2 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

4) Действие четвертое. Сумма (разность) матриц.

Сумма матриц действие несложное.
НЕ ВСЕ МАТРИЦЫ МОЖНО СКЛАДЫВАТЬ. Для выполнения сложения (вычитания) матриц, необходимо, чтобы они были ОДИНАКОВЫМИ ПО РАЗМЕРУ.

Например, если дана матрица «два на два», то ее можно складывать только с матрицей «два на два» и никакой другой!

$$\xcancel{\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -7 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}}$$

<u>Пример:</u>

Сложить матрицы $F = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ и $G = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}$

Для того чтобы сложить матрицы, необходимо сложить их соответствующие элементы:

$$F + G = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+(-4) & -1+(-3) \\ -5+15 & 0+7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12-4 & -1-3 \\ -5+15 & 0+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Для разности матриц правило аналогичное, **необходимо найти разность соответствующих элементов**.

Для разности матриц правило аналогичное, **необходимо найти разность соответствующих элементов**.

Пример:

Найти разность матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

$$A - H = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-4) & 5-3 & -17-(-15) \\ -1-(-5) & 0-(-7) & 10-0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3+4 & 5-3 & -17+15 \\ -1+5 & 0+7 & 10-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

А как решить данный пример проще, чтобы не запутаться? Целесообразно избавиться от лишних минусов, для этого внесем минус в матрицу H:

$$A - H = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 15 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3+4 & 5-3 & -17+15 \\ -1+5 & 0+7 & 10-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

5) Действие пятое. Умножение матриц.

Какие матрицы можно умножать?

Чтобы матрицу K можно было умножить на матрицу L нужно, **чтобы число столбцов матрицы K равнялось числу строк матрицы L.**

<u>Пример:</u>

Можно ли умножить матрицу $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ на матрицу $L = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$?

$$KL = \overbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}^{\substack{m=2 \\ \text{2 столбца}}} \cdot \left.\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}_{n=2\ \text{строки}}$$

$m = n$, значит, умножать данные матрицы можно.

А вот если матрицы переставить местами, то, в данном случае, умножение уже невозможно!

$$LK = \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}^{\substack{m=1 \\ \text{столбец}}} \cdot \left.\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\right\}_{n=2\ \text{строки}}$$

$m \neq n$, следовательно, выполнить умножение невозможно:

$$\cancel{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}$$

Пример:

Умножить матрицу $K = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ на матрицу $L = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 \end{pmatrix}$$

$$KL = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Пример сложнее:

Умножить матрицу $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ на матрицу $N = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

Формула: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_1 + b_1c_2 & a_1d_1 + b_1d_2 \\ a_2c_1 + b_2c_2 & a_2d_1 + b_2d_2 \end{pmatrix}$

$$MN = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 & 2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 9 - 6 \cdot 6 & 4 \cdot (-6) - 6 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В результате получена так называемая нулевая матрица.

Попробуйте самостоятельно выполнить умножение NM (правильный ответ $\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$).

Обратите внимание, что $MN \neq NM$! Это почти всегда так!

Таким образом, **при умножении переставлять матрицы нельзя!**

Если в задании предложено умножить матрицу M на матрицу N, то и умножать нужно именно в таком порядке. Ни в коем случае не наоборот.

Переходим к матрицам третьего порядка:

Умножить матрицу $P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ на матрицу $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Формула очень похожа на предыдущие формулы:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 d_1 + b_1 d_2 + c_1 d_3 \\ a_2 d_1 + b_2 d_2 + c_2 d_3 \\ a_3 d_1 + b_3 d_2 + c_3 d_3 \end{pmatrix}$$

$$PR = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-3) - 4 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -20 \\ -16 \end{pmatrix}$$

А теперь попробуйте самостоятельно разобраться в умножении следующих матриц:

Умножьте матрицу $P = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ на матрицу $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Вот готовое решение, но постарайтесь сначала в него не заглядывать!

$$PS = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4 - 4 \cdot 9 & 5 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) - 4 \cdot 6 & 5 \cdot 5 + 8 \cdot 3 - 4 \cdot 5 \\ 6 \cdot 3 + 9 \cdot 4 - 5 \cdot 9 & 6 \cdot 2 + 9 \cdot (-1) - 5 \cdot 6 & 6 \cdot 5 + 9 \cdot 3 - 5 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 7 \cdot 4 - 3 \cdot 9 & 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 6 & 4 \cdot 5 + 7 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$$

Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. С.Петербург, издательство «Лань», 1999

§ 1. Действия над матрицами

219. Выполнить действия:

a) $(1, 2, 1, -1) + (3, 2, -1, 2)$;

b) $3(1, -1, 0, 3) + 2(-1, 2, 3, 1) - (1, 1, 6, 11)$;

c) $4\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

220. Умножить матрицы:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{pmatrix}$.

221. Выполнить действия:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$;

223. Умножить матрицы:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $(1\ \ 2\ \ 3)$; d) $(1\ \ 2\ \ 3)$ и $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

224. Вычислить AA^{T}, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, а A^{T} — матрица, транспонированная к A.

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются ***эквивалентными***, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют *канонической*, например

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.4. Привести к каноническому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

○ Решение: Выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & :5 & :2 & :3 \end{array} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Домашнее задание:

221. Выполнить действия:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; e) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

223. Умножить матрицы:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $(1\ 2\ 3)$; d) $(1\ 2\ 3)$ и $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

224. Вычислить AA^{T}, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, а A^{T} — матрица, транспонированная к A.